



# 教科における探究的な学習の充実

## 実践編



### 数学科(数学C)

## 1 単元「ベクトルと平面図形」(第2学年)

### 2 単元の目標

- (1) 位置ベクトルの考えを理解するとともに、平面図形に対して、内分点、外分点の位置ベクトル及び一直線上にある点の条件について、それらの利用の仕方を理解できるようにする。
- (2) ベクトルやその内積の基本的な性質などを用いて、平面図形の性質を見いだしたり、多面的に考察したりすることができるようにする。
- (3) 粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたり、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度を養う。

### 3 評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
位置ベクトルの考えを理解するとともに、平面図形に対して、内分点、外分点の位置ベクトル及び一直線上にある点の条件について、それらの利用の仕方を理解している。	ベクトルやその内積の基本的な性質などを用いて、平面図形の性質を見いだしたり、多面的に考察したりすることができる。	<ul style="list-style-type: none"> <li>粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしている。</li> <li>問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとしている。</li> </ul>

### 4 単元の指導と評価の計画

●指導に生かす評価 ○指導に生かすとともに記録に残す評価

時間	問い(学習課題)・主な学習活動〔評価方法〕		評価		
			知	思	態
1	問い(学習課題)	三角形内部の点Pの位置はどのように説明できるだろう?			
		三角形の内部にある点Pの位置を表す方法を考える活動を通して、内分点・外分点の位置ベクトルの表し方の必要性に気付く。		●	
2	問い(学習課題)	位置ベクトルとは何か? 内分点・外分点の位置ベクトルはどう表せるだろう?	●		
		位置ベクトルの考え方を理解し、分点をベクトルを用いて表す。			
3	問い(学習課題)	二直線の交点の位置ベクトルはどのように表せるだろう?	○	●	
4		分点の位置ベクトルを用いて、課題を解決していく。〔ワークシート〕			
5	問い(学習課題)	五心の位置ベクトルはどのように表せるだろう?			
		三角形の重心を内分点の位置ベクトルを用いて表す。さらに、「三角形の内心および外心をベクトルを用いて表せるか」「どこの辺の長さや比が必要か」などの条件に焦点を当てながら考察する。		●	
6	問い(学習課題)	点の位置をベクトルで表すときのポイントは何だろう?			
		前時の内容を共有し、それぞれの解答を再検討したり、解答を比較して新たな発見や仮説を見いだしたりする。さらに、残りの五心(垂心・傍心)についても、ベクトルで表現できるかを考察する。		●	●
7	問い(学習課題)	ほかの図形はベクトルを用いてどのように表せるだろう?			
	8	小単元全体で学んだことを振り返り、ワークシートにまとめる。既習の知識と関連させながら、他の図形(直線や円、領域)に対して、ベクトルを用いてどのように表現できるかを考察する。 〔ワークシート〕		○	○
単元終了後		〔ペーパーテスト〕	○	○	

探究的な学習

## 《 本単元における探究的な学習について 》

三角形の五心について、それぞれどのような図形的な性質があるか、それをどのようにベクトルで表現できるかを考察する。自分の考えや気付いたことなどをまとめ、グループで共有しながら探究していく。さらに、学んだことを振り返り、既習の知識と関連付けながら、他の図形(直線や円、領域)に対して、ベクトルを用いてどのように表現できるかを考察する。なお、学習指導要領解説にも、『数学の学習では、「数学的な見方・考え方」を働かせながら、知識及び技能を習得したり、習得した知識及び技能を活用して探究したりすることにより、知識は生きて働くものとなり、技能の習熟・熟達につながるとともに、より広い領域や複雑な事象の問題を解決するための思考力、判断力、表現力等や、自らの学びを振り返って次の学びに向かおうとする力などが育成される。』と記載されている。本単元の探究的な学習は、教師が意図的に数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を引き起こし、よりよい資質・能力の育成を目指すものである。

## 5 学習活動の実践と指導のポイント

### 1時間目

三角形とその内部にある点Pに対して、点Pの位置を生徒自身が設定し、その位置をペアで説明し合う活動を行った。生徒はベクトルや比、垂直などというキーワードを使いながら、様々な方法で説明を試みた。その後、点の位置をベクトルで表すにはどうすればよいかを考え、内分点や外分点、ベクトルの実数倍などの既習の知識に触れながら、今後の学習に見通しをもてるようにした。

### 2時間目

内分点・外分点の位置ベクトルについて基本的な知識を身に付けた後、 $\triangle OAB$ の $\angle O$ の二等分線と辺ABとの交点Pの位置ベクトルを求める活動を行った。

### 3・4時間目

二直線の交点の位置ベクトルを辺の比に着目して議論しながら考察した。その際、辺の比を1つの文字を用いて表す方法を見いだしたり、チェバ・メネラウスの定理と関連させたりしながら理解を深めた。さらに、直線上の点であることや二直線の垂直などを利用して、交点の位置ベクトルを求めた。

## 5～8時間目 探究的な学習

### 探究的な学習の過程

5時間目

① 課題設定



② 個人&グループで考察



6時間目

③ 代表グループが発表



④ 振り返り



7・8時間目

⑤ 課題設定



⑥ 個人&グループで考察



⑦ 振り返り

### 5時間目 [探究的な学習の過程①②]

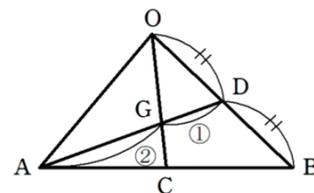
探究ループリックを使って学習の目標を確認する場面を設定した上で、「五心の位置ベクトルはどのように表せるだろう?」という問いを示し、重心の位置ベクトルを求める活動を行った。生徒は、自分で三角形を設定した上で重心を図に示しながら、これまでに学んだベクトルの知識を活用して課題に取り組んだ。個人で考えた後、グループで考えを比較する場面を設定した。さらに、三角形の内心または外心をベクトルを用いて表せるかという課題に取り組んだ。

【生徒に提示したスライド】

#### 平面図形とベクトル ～五心探究～

- 1)自分で三角形を設定しよう
  - 2)設定した三角形における五心をベクトルで表そう
  - 3)グループを作り、それぞれの五心のベクトルを比較しよう
    - ・どんな三角形を設定したか
    - ・どのように求めたか
    - ・解答を比較して気付いたことは何か
- プリントの下のスペースに書こう

【重心についての生徒の考えの例】



GはAD上の点であり

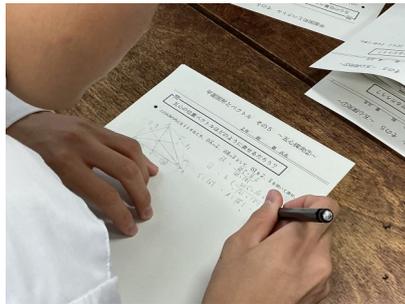
AG : GD = 2 : 1

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OD}}{2+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

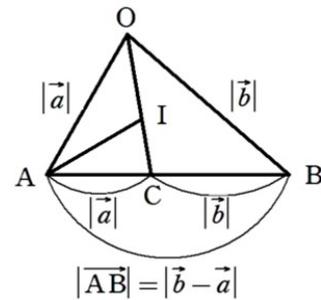
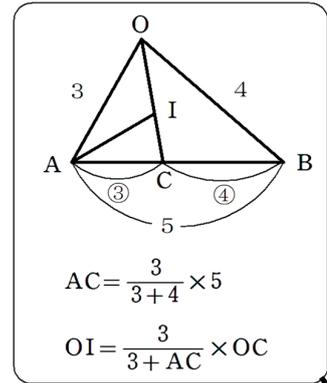
◎指導のポイントと生徒の様子◎

探究ルーブリックの観点の中で、この時間に重視する項目を確認することで、生徒が学習活動に見通しをもてるようにした。また、生徒自ら三角形を設定することで、五心の特徴を捉え「どこの辺の長さや比が必要か」などに着目し、図形の性質から必要な条件を見いだすことができるようにした。さらに、個人で考えてからグループで考えを比較することで、三角形の設定や利用した条件の違いに気付き、考えを広げられるようにした。

生徒は、重心については、中点や中線を2:1に内分する性質から、必要な条件を見だしベクトルの式で表すことができた。内心については、角の二等分線の性質に気付き、ベクトルの式で表そうとしていた。自ら三角形を設定する経験が新鮮な様子であったが、戸惑いながらも【内心についての生徒の考えの例】にたどり着く生徒も見られた。また、試行錯誤しながら学ぶ様子も見られた。その中で、具体的な数値を設定して考えようとする生徒が見られたことは予想外であったが、生徒の中で、具体と抽象を行き来しながら、位置ベクトルの理解が深められていくことが分かった。外心についても、多くの生徒が垂直二等分線の性質を利用して、垂直から複数の内積の式をつくることができていたが、文字や記号のまま連立方程式を解くことには課題が見られた。



【内心についての生徒の考えの例】



$$\vec{OC} = \frac{|\vec{b}| \cdot \vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

$$AC = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \times |\vec{b} - \vec{a}| \text{ より}$$

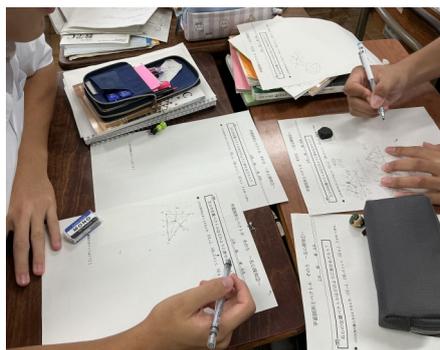
$$OI : IC = |\vec{a}| + |\vec{b}| : |\vec{b} - \vec{a}| \text{ だから}$$

$$\vec{OI} = \frac{|\vec{a}| + |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{b} - \vec{a}|} \times \vec{OC}$$

$$= \frac{|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{b} - \vec{a}|}$$

6時間目 [探究的な学習の過程③④]

「点の位置をベクトルで表すときのポイントは何だろう?」という問いを深められるように、他者の考えを取り入れながら、内心と外心についてのそれぞれの解答を再検討したり、解答を比較して新たな発見や仮説を見いだしたりし、グループ内の考えを整理した。整理した内容を基に、内心と外心の位置ベクトルに関する考察の結果を代表のグループが発表し、その発表を踏まえて、さらに考察を深めた。その後、垂心、傍心の位置ベクトルを求めるための方針をグループで協議した。



## ◎指導のポイントと生徒の様子◎

グループでの協議では、三角形の辺の長さや角度を各自で設定したことで、他者と「答えが合っているか」という確認だけではなく、「どのような三角形を設定したか」「なぜそのような三角形を設定したのか」「どのように考えたか」「結論から分かることは何か」といった会話が生徒間で生まれ、点の位置に関する議論を深めることができた。

代表グループの発表の際に、三角形の3辺を文字で置き、条件を数式化する過程を共有する中で、重心が辺の長さに依存しない一方、外心や内心は辺の長さによって決まるといった違いに気付くようにした。さらに、垂心や傍心についても位置ベクトルで表す課題に取り組むことで、「平面上のどんな点も2つのベクトルで表せる」という次元に通じる概念を生徒が理解できるように支援した。

グループでの協議を通して、他者の意見を取り入れ、自分が設定した図形や、解答との比較・関連付けを行う中で、「なるほど」や「そう考えたのか」などのつぶやきが聞かれ、各自の考察を深める姿が見られた。さらに、「条件を変えるとどうなるか」「別の図形ではどうか」といった新たな疑問や課題を見いだす姿が見られた。このような生徒の考えを教室全体で取り上げることで、次時以降の学びにつながるようにした。



## 7時間目【探究的な学習の過程⑤⑥】

前時までの五心探究の活動を踏まえ、得られた学びを基にして、改めて生徒の疑問から新たな問いを見だしクラス全体で共有した。「点の集合である直線や円はどのようにベクトルで表せるだろうか?」という問いを設定し、五心探究の活動と同様に図形の性質からベクトルの式を見いだす課題を個人で行ってから、グループで考えを共有し、各自の考えを深めた。

### 平面図形とベクトル その6

2年 組 番 氏名

◎五心の位置ベクトルを考察する活動を通して、どのような学びがあったらう。～これまでの振り返り～

これまでの、をベクトルで表現することを考えてきた。

さらなる疑問はあるだろうか。次の課題を考えてみよう。

問

### 【生徒が記述した「前時までの振り返り」の例】

- ・三角形の形は違っても、 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて同じ位置ベクトルで表せる。
- ・これまでに学習した公式や法則を利用すると、少しずつ解き進めることができた。あきらめないことが大切だと思った。
- ・正三角形で考えると重心も内心も同じになった。
- ・実際に三角形の辺の長さに数値を設定すれば考えることができたが、文字で設定すると難しかったので、まずは、具体的に数字を設定して考えるようにしていきたい。

### 【生徒が記述した「次の課題」の例】

- ・直線のベクトル      ・曲線、円      ・領域
- ・空間にある点の位置ベクトルは、どのように表現することができるか。
- ・図形の性質や図形と方程式の分野と、どう結び付けられるか。

### ◎指導のポイントと生徒の様子◎

これまでの学びを振り返ることで、見いだした事項を、数学Aの「図形の性質」や数学Ⅱの「図形と方程式」などで学習した既習の知識と結びつけ、概念を広げたり、統合的・発展的に考えたりできるようにした。また、さらなる疑問を次の課題につなげるように促すことで、生徒が探究的な学習に、主体的、継続的に取り組むことができるようにした。次の課題としては「直線」「円」がキーワードとして多く挙がったため、「点の集合である直線や円は、どのようにベクトルで表せるだろうか?」という課題を設定した。

生徒は、五心と同様に平行や垂直といった図形の性質や円周角の定理などを利用し、ベクトル方程式を見いだすことができた。なお、空間にある点の位置ベクトルに関心を示す生徒も多く見られたため、「空間におけるベクトルは、平面上のベクトルとどのような違いがあるだろうか?」という課題も設定した。

### 8時間目 [探究的な学習の過程⑥⑦]

まず、生徒と考えた次の課題の1つとして「領域」を示し、「図形の内部はどのようにベクトルで表すことができるか?」という課題を設定した。平面上の点の存在範囲について、これまでと同様に個人の考えをグループで共有し考察した。次に、空間と平面との違いをクラス全体で確認しながら、次の単元に向けて新たな問いを共有した。



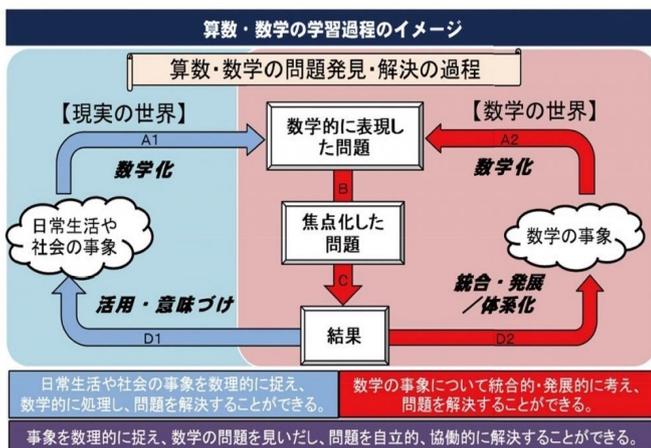
### ◎指導のポイントと生徒の様子◎

「図形と方程式」の学習内容と関連付けることで、「領域」の学習課題を示した。直線のベクトル方程式「 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ 、 $s + t = 1$ 」を基に、 $s + t$ の値を変化させると、何がかわるかを考えさせることによって、点の存在範囲を考察させた。また、「空間においては、3つのベクトルで点や図形を表すことができそうだ」という生徒のつぶやきを取り上げ、次の単元「ベクトルと空間図形」につながるようにした。

## 6 探究的な学習における評価について

### ◎探究ルーブリックを用いた生徒の自己評価

学習指導要領解説にもある『算数・数学の学習過程のイメージ』を基に、探究ルーブリックには、「統合・発展」の観点を設定した。学習前に探究ルーブリックを示したことで、生徒が目指すべきゴールが明確になり、自ら考えながら学習を進めることで主体的な学びにつなげることができた。また、単元「ベクトルと空間図形」を学習した後に改めて探究ルーブリックを使って学習活動を振り返りながら自己評価を行うことで、自らの成長を実感することができるようになった。



	課題設定	情報収集	整理・分析	統合・発展	説明
A	点の位置を数学の用語を用いて適切に表し、さらに数やベクトルなどの式で表した。	位置ベクトルの考えを長さの比と関連付けながら理解し、分点をベクトルで表した。	チェバ・メネラウスの定理と関連させながら、交点を位置ベクトルの考えを用いて表す方法を見いだした。	点を位置ベクトルの考えを用いて表した過程を振り返り、五心・直線・円・領域などの図形をベクトルで表す方法を見いだした。その際、図形の決定条件や方程式と関連付けながら、考察した。	数学的な表現を用いて論理的に説明することができた。さらに、他者の考えを深めたり、改善したりした。
B	点の位置を数学の用語を用いて適切に表した。	位置ベクトルの考えを理解し、分点をベクトルで表した。	交点を位置ベクトルの考えを用いて表す方法を見いだした。	点を位置ベクトルの考えを用いて表した過程を振り返り、五心・直線・円・領域などの図形をベクトルで表す方法を見いだした。	他者の考えを参考にしたり、協働したりしながら、数学的な表現を用いて論理的に説明した。
C	点の位置を数学の用語を用いて適切に表さなかった。	位置ベクトルの考えを理解し、分点をベクトルで表すことが理解できなかった。	交点を位置ベクトルの考えを用いて表す方法を見いださなかった。	五心・直線・円・領域などの図形をベクトルで表す方法を見いださなかった。	数学的な表現を用いて論理的に説明しなかった。

探究ルーブリック

## ◎「思考・判断・表現」の評価例

教師による評価は、探究ルーブリックの「統合・発展」の観点を判断基準として活用し、7、8時間目のワークシートの記述を質的に捉え、思考・判断・表現の記録に残す評価とした。単に点の位置ベクトルで学んだことを、円のベクトル方程式や領域を導くだけでなく、内積を基にして得られた式が円のベクトル方程式と同値であることについて記述したり、高次元の図形についてベクトルの考えを用いて記述している生徒などをA評価とした。



### 〔ルーブリックの項目「統合・発展」の観点〕

「十分満足できる」状況(A)	「おおむね満足できる」状況(B)	「努力を要する」状況(C)
点を位置ベクトルの考えを用いて表した過程を振り返り、五心・直線・円・領域などの図形をベクトルで表す方法を見いだした。その際、図形の決定条件や方程式と関連付けながら、考察した。	点を位置ベクトルの考えを用いて表した過程を振り返り、五心・直線・円・領域などの図形をベクトルで表す方法を見いだした。	五心・直線・円・領域などの図形をベクトルで表す方法を見いださなかった。

## 7 授業者より～実践の成果とこれからの方向性～

今回の実践は、これまでの教員生活で培ってきた授業づくりに新たな視点をもたらすものとなりました。「生徒が自ら課題を設定する」ことを取り入れ、単元の導入からオープンな問いを課題として設定することで、意識付けを行いました。生徒が三角形の形状を自ら決めて考察する探究活動には、当初不安もありましたが、これまでの授業では見られなかった生徒の多様な発想や主体的な学びの姿に驚き、大きな手応えを感じました。また、単に教科書の内容を教えるということを超えて、教材研究における重要な視点をもつことができました。



探究的な授業を形にする経験を通して「既習の知識を活用して課題解決に取り組み、それを他者と共有し、新たな発展を生む」探究活動の意義を知ることができました。今回の実践では、「統合・発展」に焦点を当てましたが、今後は、「活用・意味づけ」にも焦点を当てて、日常や社会の事象と数学との関係を捉えて、高等学校数学科の授業がもつ可能性を大きく広げていきたいです。

### 【探究的な学習後の生徒の振り返り】

- ・五心探究のときはベクトルをどう活用していいか、自由度がありすぎて難しいと思っていたが、空間ベクトルを学習することで、ベクトルのよさを実感できるようになってきた気がする。
- ・探究で試行錯誤しているうちに、問題を解決するには様々なアプローチの仕方があり、色々な方向から挑戦できるベクトルの面白さに気付いた。

本実践で作成した資料は、栃木県総合教育センターWebサイトで閲覧及びダウンロードできます。また、他教科の実践についても紹介されていますので、ご覧ください。



【問合せ先】 栃木県総合教育センター 研究調査部

〒320-0002 栃木県宇都宮市瓦谷町1070 TEL 028(665)7204