数　学　科

研究協力委員

栃木県立宇都宮工業高等学校	教諭	関　　健 志
栃木県立鹿沼高等学校	教諭	宮 崎　陽 介
栃木県立黒磯高等学校	教諭	佐 藤　陽 太

研究委員

栃木県総合教育センター研修部	副主幹	小 川　賢 一
研究調査部	指導主事	中 條　康 雄

○　調査研究にあたり

平成 29 年３月 31 日に公示された小・中学校学習指導要領における教科内容の主な改善事項の一つに理数教育の充実が示されている。具体的には、次の２点となっている。１点目は、前回改訂において２～３割程度授業時数を増加し充実させた内容を今回も維持した上で、日常生活等から問題を見いだす活動（小：算数、中：数学）や見通しをもった観察・実験（小中：理科）などの充実により更に学習の質を向上することである。２点目は、必要なデータを収集・分析し、その傾向を踏まえて課題を解決するための統計教育の充実（小：算数、中：数学）、自然災害に関する内容の充実（小中：理科）である。

また、前回の改訂において中学校と高等学校では「数学的な見方や考え方のよさ」を「数学のよさ」に変更したが、今回の中学校の改訂においては、数学科の目標の冒頭において「数学的な見方・考え方を働かせ」と変更している。

「数学的な見方・考え方」のうち、「数学的な見方」は「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」であり、また、「数学的な考え方」は、「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識を関連付けながら、統合的・発展的に考えること」である。以上のことから、「数学的な見方・考え方」は、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的に考えること」として整理できるとしている。

この「数学的な見方・考え方」は、数学的に考える資質・能力を支え、方向付けるものであり、数学の学習が創造的に行われるために欠かせないものである。また、生徒一人一人が目的意識をもって問題を発見したり解決したりする際に積極的に働かせていくものである。そのために、統合的・発展的に考えることを重視しなければならない。

また、数学科の目標の中で「粘り強く考え」と新たに記載された。平成 29 年７月に示された中学校学習指導要領解説数学編において、この文言に対する直接的な解説は示されていないが、着目すべき文言であるといえる。

高等学校の学習指導要領については、今年度中に告示されることとなるが、高等学校数学科の目標設定の考え方においても、上記の中学校数学科と同様のものであるといえよう。

本年度の「主体的・対話的で深い学びに関する調査研究」においては、新たに示された「数学的な見方・考え方」を踏まえるとともに、新たに記載された「粘り強く考え」にも着目し、「主体的・対話的で深い学び」の実現のための授業改善について、研究協力員の所属校における三つの実践事例を紹介する。

事例１　発見力と創造力を身に付けさせる指導

～　既存の知識を活用した授業展開について　～

単元名	図形と計量
これまでの課題	(1) 授業中に生徒が定義の意味や意義を考えたり、理解しようとしたりする場面が少なく、定義を暗記させることをメインに授業が展開されている。 (2) 新しい公式を提示する際、定義から公式の成り立ちを証明し、それを生徒に見せるだけの授業になってしまっているため、生徒自身が思考することなく公式の暗記に頼る授業展開となってしまっている。 (3) 例題の説明後、数値が異なる類題の演習では、実質的には計算処理を行っている程度であり、生徒に深く考えさせる機会や生徒同士の対話による問題解決の機会を奪ってしまっている。 (4) 教科書の順序どおりに公式や例題を説明していくだけでは、既習事項との関連性や本時の学習の意義が分からないまま授業を受けることになり、主体的に学ぶことが難しい。
授業改善のポイント	(1) 「相似な図形の性質」「三平方の定理」を利用して、直接測定することが困難な木の高さなどを求める問題を解きながら、直角三角形の辺の比率と角度の関係に生徒自身が気付くように発問で誘導していく。生徒の発見があった後に、それを三角比として定義する。 (2) 問題を解いていく中で法則性を発見し、生徒自身が文字を使って一般化し、その意味や有用性を認識する授業展開が理想であると考え、できる限りその手法を用いた授業を行う。 (3) 解き方そのものを考え出すことに重点を置くため、本事例では前提として、生徒に予習を必要としない授業展開にした。そのため、授業の最初は前時の内容の確認と関連した発問から始まる。生徒は既習事項を駆使しながら問題を解き、その方法について周りの生徒と話し合っていく。最後に問題を解いた方法について文字を用いて一般化させ、公式として提示する。 (4) 単元の最初にその単元の意義を説明することはもちろんであるが、できる限り授業の最初には、既習事項と関連させて前時の授業で扱った内容をどう発展させられるかを生徒に考えさせる。この発問をわずかな時間でもすることで、次の課題を主体的に捉えさせる一助となる。 本時においては、授業の冒頭に前時で三角形の決定条件から残りの辺の長さや角度を求めたことを確認し、同じく三角形の決定条件から計量できるものは他にないか、という発問をすることで、生徒が主体的に面積の計量を考えていくように誘導する。また、公式や解法を与えることなく既習事項のみで生徒に解決策を考えさせることで、発見力や創造力を身に付けさせ、より深い学びにつなげていく。さらに、対話を通してグループで面積を計量するための三角形の決定条件を選択することで、主体的に協働する意識を高めている。

1　指導観

(1) 本単元について（教材観）

図形と計量については中学校の第３学年で、「相似な図形の性質」、「三平方の定理」などを

学習しており、直接測定することが困難な木の高さ、地図上に表された標高差のある２地点間の距離などを求めることを扱っている。高等学校では、直角三角形において、正弦（sin）、余弦（cos）、正接（tan）の意味を理解させ、三角比の相互関係や鈍角の三角比まで拡張する意義を理解させる。さらに、三角形の辺と角との間の基本的な関係である正弦定理や余弦定理を学び、長さと角度という違ったものさしで表記されている数量をつなげて考えられるようにすることで、平面図形や空間図形の計量などに活用できるようにする。

(2) 生徒の実態（生徒観）

今回授業を行ったクラスは、習熟度別のクラス編成において最も数学が得意な生徒が集まっている。ほとんどの生徒が大学進学を希望していることもあり、**表１**に示されているように、他のクラスと比較して学習意欲が高い。

表１　数学の学習アンケート結果

数学の学習アンケート（時間は平均、その他は肯定的な回答の割合）		
質問項目	習熟度 Aクラス	習熟度 Aクラス以外の平均
１日あたりの数学の家庭学習時間は?	43.2分	24.9分
難しい問題でも諦めずに解こうとする。	88.9%	42.5%
私にとって勉強する価値がある教科である。	100.0%	58.1%
数学の勉強法は、公式を覚えることである。	22.3%	69.2%
文字を使った式に抵抗を感じる。	47.1%	77.6%
数学の授業は楽しい。	62.5%	17.3%
数学の家庭学習は楽しい。	31.5%	10.1%

(3) 生徒に身に付けさせる力（育成を目指す資質・能力）

創意工夫のもとに、課題解決能力や思考力、更には発見力や創造力を身に付けてほしい。また、難問だと感じる問題に対しても粘り強く取り組む姿勢や、学習集団で協力して解決策を模索する力を養ってほしい。特に本事例においては、既習事項を活用しながら生徒自身が三角形の面積を求める公式を導き出すという学習過程において、主体的に活動しながら、自己や他者との対話を行うことを通して深い学びにつなげてほしい。

２　単元の指導計画及び評価計画

○単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1 三角比の考え方に関心をもち、その有用性を考察しようとしている。 A2 具体的な事象を考察するにあたり、積極的に三角比を活用しようとしている。	B1 直角三角形の辺と角との間の関係について考察することができる。 B2 鈍角の三角比について鋭角の三角比との整合性を考察した上で、有用性を認識することができる。	C1 三角比の意味を理解した上で、計量した値を三角比を用いて表現することができる。 C2 具体的な事象を考察するにあたり、三角比を有効に活用することができる。	D1 直角三角形において、三角比が何を表しているかを理解している。 D2 条件の与えられた図形において、三角比を用いて様々な計量をしている。

時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間	相似な直角三角形を用いた問題演習から、三角比の定義を発見し理解する。	A1 B1 D1	観察、ワークシート
第２時間	与えられた直角三角形において、三角比の値や辺の長さを求める。	C1 D1	観察、ワークシート
第３時間	直角三角形を用いて、三角比の相互関係を考察する。	A1 B1	観察、ワークシート
第４時間	三角比を用いて、三角形の辺の長さを求める。	A2 D2	観察、ワークシート 小テスト
第５時間	三角比を用いて、具体的な事象の計量を行う。	A2 D2	観察、ワークシート
第６時間	一般化された直角三角形において、各辺の長さを三角比を用いて表す。	C1	観察、ワークシート
第７時間	三角比における角度の変換を、直角三角形を用いて考察する。	A1 B1	観察、ワークシート
第８時間	座標平面において鋭角の三角比を考察し、鈍角を含めた三角比を再定義する。	B2	観察、ワークシート
第９時間	再定義された三角比において、既習の定理や公式との整合性を確認する。	B2	観察、ワークシート
第10時間	鈍角についての新たな定理や公式を考察する。	B2	観察、ワークシート
第11時間	向かい合う角の大きさと辺の長さについて考察し、正弦定理を導き出す。	A2	観察、ワークシート 小テスト
第12時間	正弦定理を用いて三角形の辺の長さを求める。	A2 D2	観察、ワークシート
第13時間	三角形とその外接円との関係について、正弦定理を用いて考察する。	A2 D2	観察、ワークシート
第14時間	既習事項を用いて余弦定理を導き出す。	A2	観察、ワークシート 小テスト
第15時間	余弦定理を活用し、図形の計量を行う。	D2	観察、ワークシート
第16時間	正弦定理，余弦定理を使うことで、三角形の決定条件から残りの辺の長さや角度の大きさを求める。	D2	観察、ワークシート
第17時間 （本時）	多様な条件下で三角形の面積を求める方法を考察する。	A2 C2	観察、ワークシート
第18時間	様々な平面図形の面積を求める。	C2 D2	観察、ワークシート
第19時間	三角比を用いて、正四面体についての計量を行う。	A2 D2	観察、ワークシート
第20時間	平面図形の計量を応用し、空間図形の計量を行う。	A2 D2	観察、小テスト
第21時間	単元末テスト	C2	テスト

3　本時の展開

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（課題、発問、活動等）</th><th>指導上の留意点および評価</th></tr>
<tr><td>導入（５分）
前時の復習</td><td>確認　それぞれの三角形の決定条件において、正弦定理、余弦定理を用いて残りの辺の長さや角の大きさが求められることを簡単に確認する。</td><td>・三角形の合同条件と三角形の決定条件の関連性を確認しておく。
・三角形について、残りの計量できる値が面積であることを生徒から引き出す。</td></tr>
<tr><td>展開１（10分）
ワークシートの各大問の①を各自で解く</td><td>課題１　1、2、3それぞれについて与えられた条件から、三角形の面積を数値計算によって求める。</td><td>・机間指導により、つまずいている生徒を支援する。
1 については高さを示す。
2 についてはAHの長さを問う。
3 についてはBHの長さを問う。</td></tr>
<tr><td>展開２（10分）
答え合わせ</td><td>【活動】グループワークにより、各大問の①の答え合わせをする。分からなかった問題については、協力し合って解法を導く。</td><td>・机間指導により各グループの解法が正しいかを確認する。
・全てのグループが解法を理解できた場合、黒板での説明は省略する。グループにより、最後まで解けない問題があった場合、その問題を正解しているグループの代表が黒板を使って発表する。</td></tr>
<tr><td>展開３（15分）
公式を導き出す</td><td>【活動】どの条件が三角形の面積を求める公式を導きやすいか、①の数値計算を元にグループで話し合い、1 ～ 3 から１つ選ぶ。

課題２　各グループが選択した問題の②と③を解くことで、一般化された三角形の面積を求める公式を導き出す。また、指名されたグループの代表者が板書する。</td><td>・前時の学習内容から、３つの三角形の決定条件のうち、１つで面積を求められれば、残りの条件の時にも面積を求めることが可能であることを示しておく。
・３辺の長さや１辺とその両端の角が決定されている場合の面積の求め方は難易度が高いため、この条件を選んだグループがあった場合には、机間指導を行いながらアドバイスをして、できるだけ公式を導くことができるようにする。

評価【数学的な技能】
具体的な事象を考察するにあたり、三角比を有効に活用することができる。 C2</td></tr>
<tr><td>まとめ（10分）
発表</td><td>【活動】指名されたグループの代表者が黒板で発表する。</td><td>評価【関心・意欲・態度】
具体的な事象を考察するにあたり、積極的に三角比を活用しようとしている。 A2

・３辺の長さが決定している場合の面積を求める公式については、解答を配ることで生徒に多様な求め方を示す。</td></tr>
</table>

※課題１及び課題２の問題はP83 参照。

4　実践の様子

(1) 本時における生徒の思考の流れ

ア　三角形の決定条件が具体的な数値で示されている場合について三角形の面積を求める。

イ　三角形の面積を求める公式を導くことができそうな条件をグループで検討する。

ウ　文字を使って一般化した公式を導き出す。

(2) 本時における具体的な生徒の様子

ア　$\boxed{1}$は２辺とその間の角が決定している場合、$\boxed{2}$は１辺とその両端の角が決定している場合、$\boxed{3}$は３辺の長さが決定している場合である。三角形の面積を求めるにあたり、既習事項である「(底辺)×(高さ)÷２」の公式を用いることになる。$\boxed{3}$は三平方の定理から高さを導くしかない。$\boxed{1}$、$\boxed{2}$における三角形の高さを求める際の教師側の意図としては、一般化に向けて三角比の既習事項を用いて高さを導き出してほしかったが、三角比を用いる生徒はほとんどいなかった。多くの生徒は補助線を入れて直角三角形を作り、辺の比を使って高さを計算し、面積を求めていた。しかしながら、グループでの学び合いが顕著に見られ、それぞれが正答にたどり着いている様子が見られたため、特に三角比にこだわる事なく授業を進めていくことにした。

図１　互いに教え合う様子

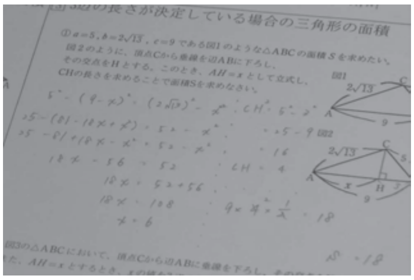


図２　$\boxed{3}$①の解答

イ　代表の生徒が解答を板書した後、班ごとに三角形の面積を求める公式を導いていく。$\boxed{1}$から$\boxed{3}$のうち、どの条件から公式を導けば最も簡単かをそれぞれの班で話し合い予想を立てた。５班のうち４班はすんなりと$\boxed{1}$の決定条件を選んでいた。残りのうちの１班だけが$\boxed{2}$の条件を選択していた。

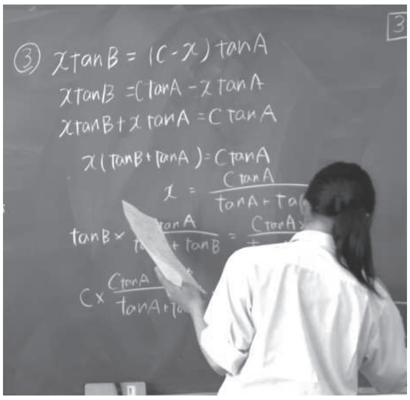


図３　$\boxed{2}$③の板書

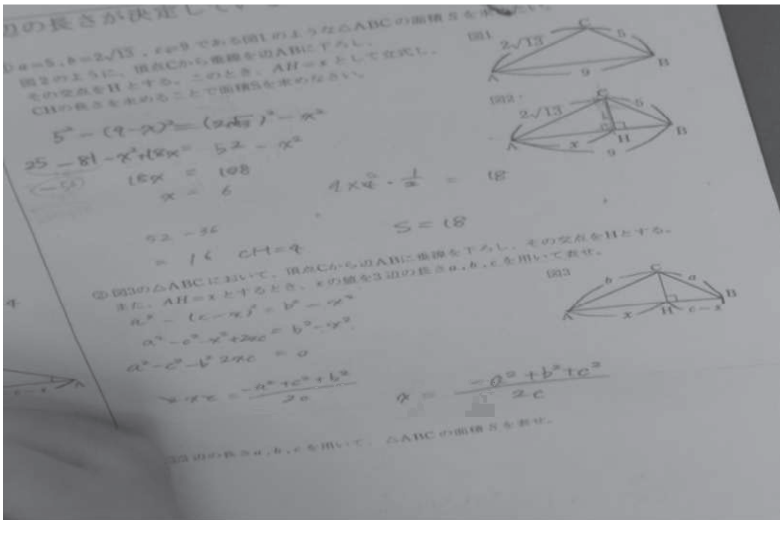


図４　$\boxed{3}$①、②の解答

ウ　$\boxed{1}$の条件を選んだ班はかなり早い段階で公式を導くことができたので、その後、それぞれに$\boxed{2}$や$\boxed{3}$ の条件での公式を導こうと話合いを重ねていた。特段の指示もしていない中で、主体的に本時の課題をとらえながら活動している様子が見られた。最初から$\boxed{2}$を選択した班については最後の公式を導く

ところまでは到達することができなかったが、他の班で$\boxed{2}$の条件での公式を導くことに成功した生徒が２～３名いたので、$\boxed{1}$の条件での公式と一緒に板書した。$\boxed{3}$の条件での公式については公式を導くことができた生徒はいなかったが、授業の最後に参考としてプリントで解答を示したところ、今まで見たことがないほどの長い公式に驚きの声や、$\boxed{1}$の条件を選択した生徒から、「やっぱり$\boxed{1}$が簡単だったよ!」という喜びの声が上がった。

５　更なる改善に向けて（成果と課題）

(1)　授業アンケートの結果から

下の**表２**は本校で行っている授業評価アンケートの結果である。授業に参加している生徒全員が積極的に授業に取り組んでいることが結果に示されている。

今回の事例に示したように生徒が主体的に考えていく授業を行っていると、生徒の活動をよく見て取ることができるので、主体的に取り組んでいるかは一目瞭然である。また今回の研究において気付いたことであるが、生徒の変化に素早く反応できるというメリットもある。生徒同士の対話の様子や思考する様子を普段から見ていると、心や体調の変化、生徒同士の人間関係の変化を素早く感知して声かけを行うことができるので、生徒指導の面からもメリットが大きいことがわかった。

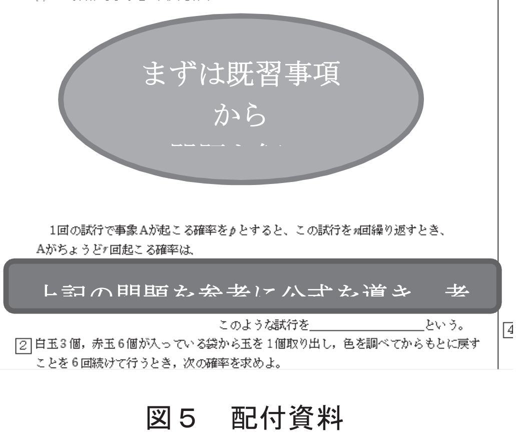
一方で例題や公式を提示することなく問題に取り組ませるということは、慎重に授業展開を考えて提示する問題を選択しないと、生徒は「分からない」という印象だけでその日の授業を終えてしまうことがある。どうしても予想したとおりに生徒の思考が流れていかなかったり、既習事項を組み合わせて公式を導いていく際に既習事項の定着が不徹底だったりと、授業後に反省することもあった。その結果がアンケートの難易度についての項目に現れているのだと思う。約５人に１人が授業の難易度が自分に合っていないと感じてしまっているので、これを解消していくことがこれからの課題の一つである。

表２　授業評価アンケート結果

質問項目	はい	いいえ
私は授業に積極的に取り組んでいる。	100.0%	0.0%
この授業は興味が湧き、満足度が高い。	97.0%	3.0%
授業はわかりやすい。	92.4%	7.6%
授業の難易度は私に合っている。	80.2%	19.8%

(2)　公式の定着化

小テストや授業での問題演習の様子を見ていて気付いたことがある。それは、例年の生徒に比べて公式を活用できている生徒が少ないことである。本事例の授業実践後に行った小テストでも、三角形に高さとなる補助線を入れて三角比を使って高さを求めてから三角形の面積を求める生徒が多数見られた。つまり、「公式がなくても問題は解ける」→「公式は必要ない」と考える生徒が多数出ることになってしまったのである。問題演習の不足というのもその一因だとは思うが、やはり思考過程を重視する余り、「公式の丸暗記なんて意味がない。」「数学は思考す


反復試行における確率

$\boxed{1}$ 1個のさいころを続けて4回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　1回目と2回目に1の目が出て、3回目と4回目には1以外の目が出る確率

(2)　1の目がちょうど2回出る確率

1回の試行で事象Aが起こる確率をpとすると、この試行をn回繰り返すとき、Aがちょうどr回起こる確率は、

このような試行を＿＿＿＿＿＿＿＿という。

$\boxed{2}$ 白玉3個，赤玉6個が入っている袋から玉を1個取り出し，色を調べてからもとに戻すことを6回続けて行うとき，次の確率を求めよ。

図５　配付資料

る事を最優先しなさい。」と授業中に言い続けて、公式の重要性についてはほとんど触れていなかったためだと考えられる。基本的に復習の大部分を生徒の家庭学習に頼っていたため、公式を使わない解法もそのままになってしまった。これを改善すべく授業プリントを工夫した例が**図５**である。生徒に公式を導かせるだけでなく、それを公式としてプリントやノートにまとめ、公式の良さや有用性をきちんと認識し、頭の中をしっかり整理させることも大切だと実感した。

(3) おわりに

「アクティブ・ラーニング」という言葉が台頭して久しい今日、これまでに多く行われてきた一斉授業・一方的な授業に加えて様々な授業方法が提案されている。もちろんどの授業方法も一長一短があるとは思うのだが、個々の教員がより良い授業を求めて日々授業改善をしていくことは、最も大事な教員の使命であろう。私が本事例を通して最も訴えたいことは、「過去の既成概念を取り払って改善を試みることも時には大切なのではないか」ということである。一斉授業で知識を詰め込む授業に対する考え方や、教育にはゆとりが一番必要であるという考え方など、様々な考え方が存在していたが、我々教員は、既成概念にとらわれることなく試行錯誤しながら、自分が教えている今の生徒にとって最善の授業を追求していくべきだと思う。本事例では、学習においての基本と言われる予習を必要としないことを前提としている。黒板において例題の解説をすることもない。毎回の授業において生徒は、今までに蓄えた知識を様々に組み合わせ、新しい知識を創造していく。もちろん授業者側で筋道は考えておくのだが、実際に道を発見し、その道を進むのは、生徒自身であるべきだと思う。授業者としてその過程の中で、正答へと続く道を発見する力（発見力）、正答への道を創り出していく力（創造力）を育むための授業づくりと心がけている。

このような方針で授業実践をしてきた一部の事例を今回提示したが、もちろん先に述べたとおり、課題もたくさんある。また、本校でも習熟度別授業で数学の成績上位の生徒が集まっているクラスだからできる授業内容も含まれている。本事例が、各校の様々な生徒に合わせて授業を改善していくための、きっかけや一助にしていただければ、これほど嬉しいことはない。

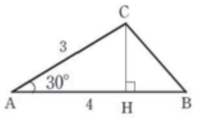
高さが分からない三角形の面積の求め方

授業実践例のプリント（解答例）

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　）

1 2辺とその間の角が決定している場合の三角形の面積

① $b=3$，$c=4$，$A=30°$ である △ABC の面積 S を求めよ。



頂点Cから辺ABに垂線を下ろし、その交点をH
とすると、

$CH=3\times\sin 30°$

$=3\times\frac{1}{2}$

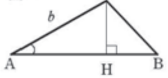
$=\frac{3}{2}$

したがって、求める面積 S は、

$S=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$

② 図2の △ABC において、CHの長さを b，A を用いて表せ。

図 2

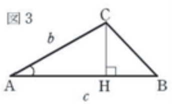


$CH=b\times\sin A$

$=b\sin A$

③ 2辺の長さとその間の角の大きさ，b，c，A を用いて，△ABC の面積 S を表せ。

図 3



②より，$CH=b\sin A$ だから，
求める面積 S は，

$S=\frac{1}{2}\times c\times b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$

2 1辺とその両端の角が決定している場合の三角形の面積

①① $c=4$，$A=30°$，$B=45°$ である 図1 のような△ABC の面積 S を求めたい。
図 2 のように、頂点Cから垂線を辺ABに下ろし、その交点をH
とする。このとき、$BH=x$として立式し、
CHの長さを求めることで面積Sを求めなさい。

図1

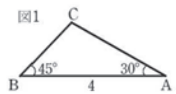
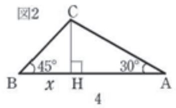


図2



$BH=4-x$

となるので、

$CH=x\tan45°=(4-x)\tan30°$

したがって、

$x\tan45°=(4-x)\tan30°$

$x=\frac{4-x}{\sqrt{3}}$

$(1+\sqrt{3})x=4$

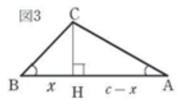
$x=\frac{4}{\sqrt{3}+1}=2(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-2$

よって、求める面積S は、

$S=\frac{1}{2}\times4\times(2\sqrt{3}-2)=4\sqrt{3}-4$

② 図3 において、CHの長さを x，B を用いて表せ。
また、同じくCHの長さを c，x，A を用いて表せ。

図3



直角三角形BCHより、

$CH=x\tan B$

また、直角三角形ACHより、

$CH=(c-x)\tan A$

③ 1辺の長さとその両端の角の大きさ，c，A，B を用いて，△ABC の面積 S を表せ。

$CH=x\tan B=(c-x)\tan A$

したがって、

$x\tan B=c\tan A-x\tan A$

$(\tan A+\tan B)x=c\tan A$

$x=\frac{c\tan A}{\tan A+\tan B}$

$CH=x\tan B$ より、$CH=\frac{c\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}$ となるので、

求める面積S は、$S=\frac{1}{2}\times c\times\frac{c\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{c^2\tan A\tan B}{2(\tan A+\tan B)}$

式の変形により、$S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$ とすることもできる。

3 3辺の長さが決定している場合の三角形の面積

① $a=5$，$b=2\sqrt{13}$，$c=9$ である図1 のような△ABC の面積 S を求めたい。
図 2 のように、頂点Cから垂線を辺ABに下ろし、
その交点をH とする。このとき、$AH=x$ として立式し、
CHの長さを求めることで面積Sを求めなさい。

図1

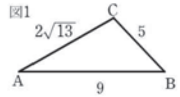
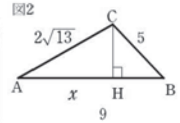


図2



$BH=9-x$ となるので、三平方の定理から、

$(2\sqrt{13})^2-x^2=5^2-(9-x)^2$

$52-x^2=25-(81-18x+x^2)$

$18x=108$

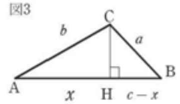
$x=6$

したがって、$CH^2=(2\sqrt{13})^2-6^2$ より、　$CH=4$

よって、求める面積S は、$S=\frac{1}{2}\times9\times4=18$

② 図3の△ABC において、頂点Cから辺ABに垂線を下ろし、その交点をHとする。
また、$AH=x$ とするとき、x の値を3 辺の長さ a，b，c を用いて表せ。

図3



$BH=c-x$ となるので、三平方の定理から、

$b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$

$b^2-x^2=a^2-(c^2-2cx+x^2)$

$2cx=-a^2+b^2+c^2$

$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$

③ 3 辺の長さ a，b，c を用いて，△ABC の面積 S を表せ。
②より、

$CH^2=b^2-\left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2$

$=\frac{4b^2c^2}{4c^2}-\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2c^2a^2}{4c^2}$

$=\frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2}{4c^2}$

$=\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^4-2b^4-2c^4}{4c^2}$

$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}{4c^2}$

$CH=\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{2c}$

よって、求める面積S は、

$S=\frac{1}{2}\times c\times\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{2c}$

$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}{4}$

事例２　「いかにして伝えるか？」表現力を付けさせる指導

～　対話による思考過程の意識化を通して　～

単元名	図形と方程式（軌跡と領域）
これまでの課題	(1) 解き方を教えることが中心で、問題が解けないとすぐに諦めている。 (2) 生徒が自分の解法をきちんと説明できるようにする指導が少なく、生徒が他者に伝えることができない。 (3) 授業後に、生徒が何を学んだかを理解することができていない。
授業改善のポイント	(1) 問題を解く際に、理解、関連、計画、実行の段階で、思考過程を意識できるようにする。 (2) 自分の解き方を「まず・次に・最後に」と三段ステップで他者に伝えられるようにする。 (3) 振り返りの場面を設定し、ルーブリックによる自己評価を行う。 本時においては、まずワークシートに沿って、軌跡の問題をどのように理解しているか捉えさせ、軌跡の方程式を求めるためには、過去の学びで何が関連するかを考えられるようにする。そして、どのように求めるのかを計画し、実際に軌跡の問題を解く。 次に、グループワークで自分の解き方を他のメンバーに説明する。また、グループでまとめた解答を全体に発表し、軌跡の方程式の求め方の共有を通して、「軌跡の動点をＰとおく」、「条件から式をつくる」、「式を整理して方程式を求める」という手順により、軌跡の方程式を求めることができることに生徒一人一人が気付くようにする。 そして最後に、振り返りの場面を設定し、活動内容をルーブリックにより自己評価させ、軌跡の問題を解く学習活動を通して、何を学んだかを明確に自覚させる。

１　指導観

(1) 本単元について（教材観）

本単元は、座標や直線、円などの基本的な平面図形を、連立方程式や判別式などの既習知識を活用しながら、図形的な意味をさらに拡張していく系統性の強い学習内容である。そのため、生徒が過去に学んだ知識を活かせる教材づくりが大切であり、生徒の学習レディネスの把握と、その段階に応じた個別指導が必要となる。

(2) 生徒の実態（生徒観）

多くの生徒は問題を解く際に、まず解法を当てはめ、それで解けないと諦めてしまうことが多い。また、定期テストの結果分析から、解答の過程が不十分である生徒が多いことがわかった。さらに、授業中に解法の説明を求めても、自分の考えを表現できない生徒が多い。そのため、「いかにして解くのか？」と自問自答させる問いかけをし、メタ認知的な思考の足場作りをさせたい。また、過去の学びと比較させながら、考える過程を重視した学習指導に留意し、自分の考えを相手に分かりやすく表現する能力を、いかに身に付けさせていけるかが、今後の課題となっている。

(3) 生徒に身に付けさせる力（育成を目指す資質・能力）

直線や円などの平面図形の性質や関係について、座標や式を用いて数学的に表現・処理することを、事象の考察に活用できるようにすることが単元の目標である。

特に、軌跡の分野においては、「２点間の距離」、「内分点と外分点」、「円の方程式の公式を導く過程」といった既習知識との関連性を意識させながら、自分の考えを論理的に表現し、軌跡の動点を $P(x, y)$ とおき、条件から式をつくり、その式を整理することにより、軌跡の方程式を求めることができるようにする。

２　単元の指導計画及び評価計画

○単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1 直線や円を表す方程式に興味をもちながら学習しようとしている。	B1 図形の性質を証明する際に、座標を活用して考察することができる。	C1 直線や円の方程式を、公式使って求めることができる。	D1 垂直条件を理解し、新たな知識として習得している。
A2 円の方程式に関心をもち、意欲的な態度で取り組もうとしている。	B2 円と直線の関係を、判別式や点と直線の距離から考察することができる。	C2 点と直線の方程式を、公式を使って求めることができる。	D2 円の位置関係を、図形的な意味から理解している。
A3 動点が１つの軌跡と２つの軌跡の違いを比較しようとしている。	B3 円の接線を、既習内容と関連させて考察することができる。	C3 軌跡の方程式の求め方を、論理的に説明することができる。	D3 軌跡の方程式の求め方を既習内容との関連で理解している。

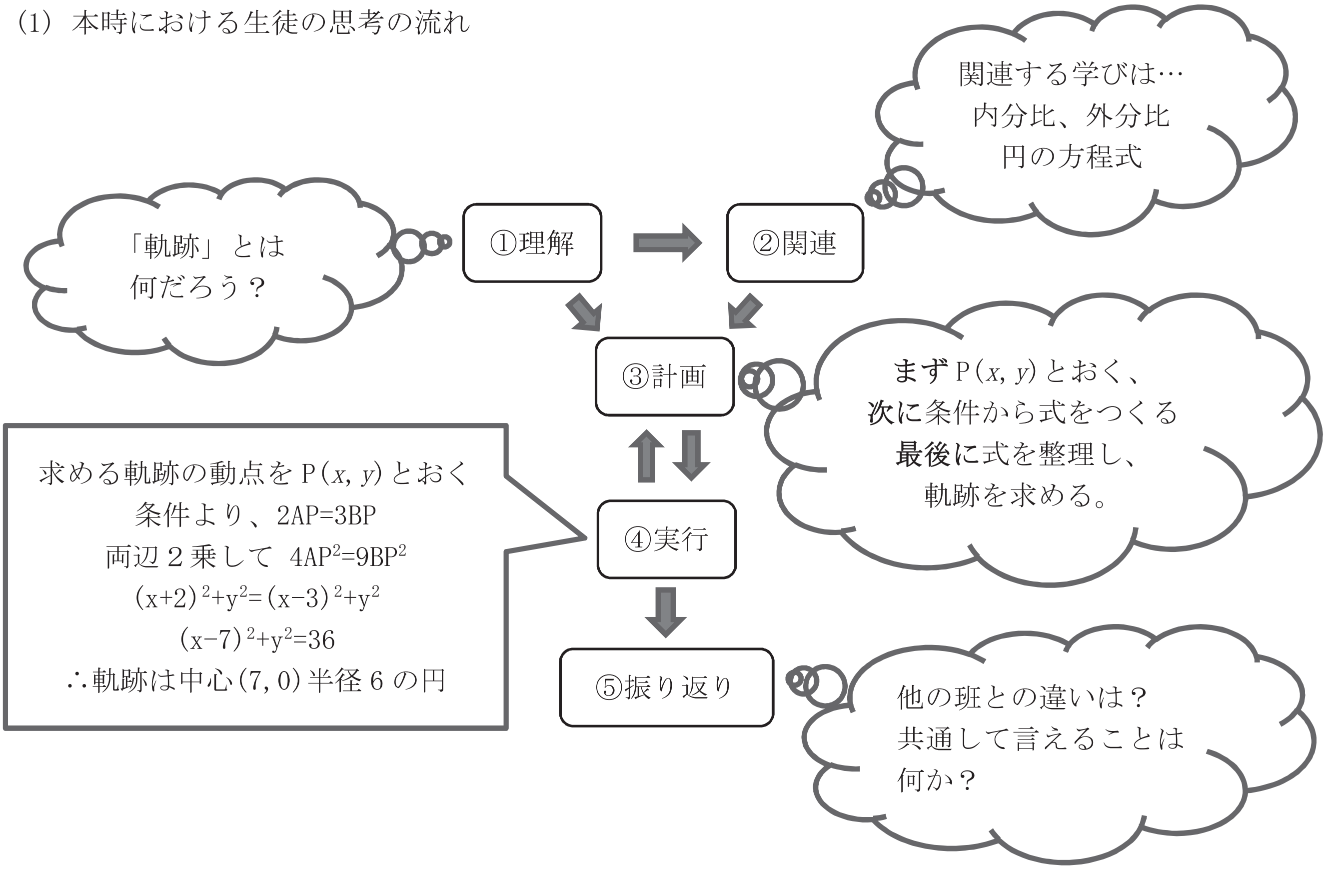
時間	学習活動	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間	公式から、直線の方程式を求める。	A1 C1	ノート
第２時間	直線の性質から、平行・垂直条件を理解する。	D1	課題
第３時間	公式から、点と直線の距離の公式を求める。	A1 C2	机間指導
第４時間	座標平面を活用し、図形の性質を証明する。	B1	机間指導
第５時間	点の集合体の性質を活用し、円の方程式を求める。	A2 C1	小テスト
第６時間	種々の条件から、円の方程式を求める。	A2 C1	ノート
第７時間	円と直線の共有点の個数の求め方を考察する。	B2 D2	課題
第８時間	公式から、円の接線の方程式を求める。	B3	机間指導
第９時間	２つの円の位置関係を理解する。	D2	机間指導
第 10 時間	【発展】垂直条件から直線に対称な座標を求める。	C1 D1	小テスト
第 11 時間 （本時）	動点が１つの軌跡の方程式を求める。	C3 D3	机間指導 自己評価
第 12 時間	動点が２つの軌跡の方程式を求める。	A3 C3	机間指導

３　本時の展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点及び評価
導入（10 分） 前時の復習	復習 ⑴ ２点 $A(0,3), P(x,y)$ 間の距離を x, y で表せ。 ⑵ ２点 $A(-4,0), B(2,0)$ において線分 AB を $2:1$ に内分する点と外分する点を図示せよ。 ⑶ 点 $C(4,2)$ を中心とする半径３の円が $(x-4)^2+(y-2)^2=3^2$ となる理由を説明せよ。	・授業の流れを、ICT（プレゼンテーションソフト）で説明する。 ・目標の提示で学習の見通しを示し、意欲を高めさせる。 ・全員が解けるという目標を共有させ、協働して課題解決を促す。 ・既習内容を確認させる。（自分との対話） ・ICT（関数グラフ描画ソフト）を使って条件を満たす点の集合体が円であることを確認させる。
展開１ （25 分） グループに分かれて課題に取り組む 自分との対話 他者との対話	課題　A班 ２点 $A(3,0), B(0,5)$ から等距離にある点の軌跡 課題　B班 ２点 $A(-2,0), B(3,0)$ に対して $AP:BP=3:2$ を満たす点 P の軌跡 【個人学習】 ワークシート 理解『どのような問題か？』 関連『関連する学びは何か？』 計画『どのように解くか？』 実行『計算せよ』 【グループワーク】 協働して課題を解決する。発表する役割分担を決める。	・４人１組のグループワークとする。Ａ班×２　Ｂ班×２ 評価【知識・理解】 軌跡の方程式の求め方を既習内容との関連で理解している。　D3 評価【数学的な技能】 軌跡の方程式の求め方を、論理的に説明することができる。　C3 思考を概念化し、表現に置き換える。
展開２ （10 分） 班ごとに発表する	【発表】 各班２分で発表する。お互いの考えを比較する。 「まず・次に・最後に」（三段ステップ）で説明する。	多様な手段により表現し、伝える。
まとめ （５分）	【振り返り】　ワークシート 振り返り『共通することは何か？』 『新たな発見は何か？』 『感想を書きましょう』 自己の学びをモニタリングさせ、次の学習につなげる。	・次時に確認テストの実施を予告し、新たな技能を習得させる。

4　実践の様子

(1)　本時における生徒の思考の流れ



(2)　本時における具体的な生徒の様子

ア　生徒の様子（①理解、②関連）

　どの班も、最初はじっくり個人で取り組むことから始まった。グループワーク開始早々、Ａ班の全てのグループが、教師が意図した動点を P(x, y) とおく解法ではなく、垂直二等分線を求める方法で計算を始めた。これは、前日の授業で「垂直条件から直線と対称な点を求める」を学習したからである。学習のつながりからすると、生徒の素直な思考である。生徒の素直な思考を尊重し、解法の方向性の修正させることなく、教師は介入せずに生徒同士の学び合いを見守った。

図１　活動の様子

イ　ワークシートの記録（③計画）

　計画を考える際には、「まず・次に・最後に」と、三段ステップでまとめるように指導した。思考の過程としては、「計画を立て」→「計算を実行」→「行き詰ったらまた計画を見直す」というサイクルであると思われるが、あえて計画を書き表現することにより、自分の考えを明確に意識できるようにした。

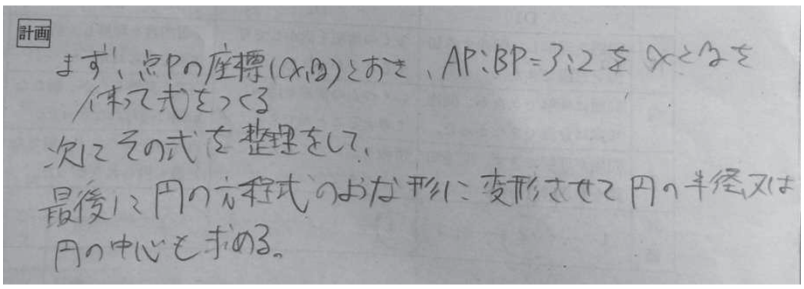

計画
まず、点Pの座標(x,y)とおき、AP:BP=3:2をxとyを使って式をつくる
次にその式を整理をして、
最後に円の方程式のような形に変形させて円の半径又は円の中心を求める。

図２　ワークシートの記録

ウ　生徒の発言（④実行）

生徒Ｂが投げかけた「垂直」という言葉に対して、生徒Ｃの「え？」と、一時的にコミュニケーションの断絶が起きている。しかし、その後に「２点結ぶ」という言葉の補完により、「垂直二等分線」という、新たな知識の再構成が起きている。

このような、発言者である生徒Ｂの意図を超越した生徒同士のコミュニケーションの連鎖反応は、相手に伝える場面の随所で起きていた。

表１　発言の逐語録（抜粋）

生徒Ａ	「（２点からの）距離が同じだよね。」
生徒Ｂ	「垂直じゃない？」
生徒Ｃ	「え？」
生徒Ｂ	「ほら、２点結ぶと・・・」
生徒Ｄ	「ああ、垂直二等分線だ。」
生徒Ｂ	「ああ、そうか！」

エ　発表の様子と振り返り（⑤振り返り）

生徒は発表資料を使って発表した。既習内容との関連で、ウェビングマップを活用した発表も見られた。自分の班の解き方と共通する部分から軌跡の求め方に気付かせることがねらいであるが、Ａ班の生徒の中に、Ｂ班の発表を聞くことで自分たちの問題には別解があることに気付く生徒がいた。そのことを振り返りのワークシートに本時の学びとして書いた生徒も多く、新たな学びを生徒自らが得たようである。

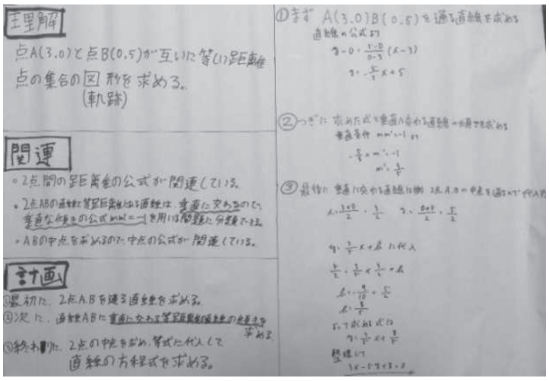


図３　発表資料（Ａ班）


図4 発表の様子(A班)

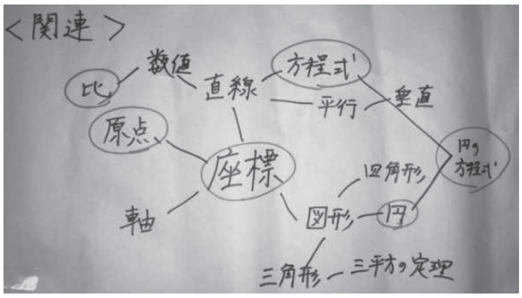


図５　ウェビングマップを活用した発表（Ｂ班）

５　更なる改善に向けて（成果と課題）

(1)　自己評価

振り返りの場面でルーブリック（資料２（p93））を実施した。これは学習活動の評価規準が基となっており、評価基準を明確にし、評価の分析結果に客観性を持たせている。また、学び手である生徒が到達目標を理解し、学習意欲を向上させることに寄与している。

３件法で得られた得点を主成分分析し、横軸は「総合評価」、縦軸は「導入・まとめ評価」と解釈した散布図を作成した。これよるとＡ班はＢ班よりも、導入・

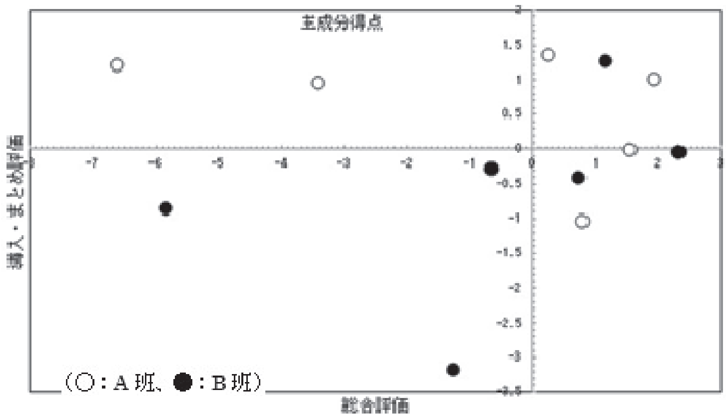


図６　自己評価の主成分分析結果

まとめの評価が高いことが分かる。A班の解答は教師が意図した解法を使っていなかったが、導入では自分の知識を活用し、振り返りの場面で自分の考えを修正した。A班の生徒は、B班の生徒と比較し、この授業で学んだことが多かったと実感していることが分かった。

(2) 授業アンケート

主体的、対話的で深い学びが達成されたかを確認するために、5件法による授業アンケート（資料3）を作成した。授業の前と後で2回調査を行い、その結果をまとめた。事前の調査に比べて事後の調査では、全ての項目で得点の増加が認められた。その中でも特に、以下に挙げる4項目については得点の増加が顕著であった。

表2　授業アンケート結果（抜粋）

質問項目	実施時期	5：とてもそう思う	4：少し思う	3：どちらともいえない	2：あまり思わない	1：全くそう思わない
（1）興味関心をもって学習することができた。	授業前	4	7	3	2	1
	授業後	7	7	2	0	0
（2）見通しをもちながら学習することができた。	授業前	2	6	6	1	1
	授業後	6	8	1	1	0
（5）学習後の反省では、次の学習の目標を見つけることができた。	授業前	3	3	8	1	1
	授業後	4	11	0	1	0
（11）仲間と共に考えを創り上げることができた。	授業前	5	7	3	0	1
	授業後	11	4	0	0	1

生徒はこの授業でのグループワークにおける伝える活動を通して、特に興味・関心を高め、見通しをもって学習し、振り返りにより次の学習の目標を見つけることができたといえる。また、グループワークを設定したことにより、生徒は仲間と協働して考えを創りあげることができたと実感し、学習活動では、特に主体的な学びと対話的な学びにおいて、生徒の高い自己評価を得ることができたと考えられる。

(3) 授業の感想（自由記述）

授業の感想の自由記述について、統計ソフト（KH Coder）を使ってクラスター分析を行い、共起ネットワークを算出した結果が**図7**である。それを見ると「経験」や「ワーク」という言葉が多く抽出され、「普通」や「使う」・「学校」などの言葉とリンクしている。これは、「普段、学校では経験できないような、グループワークで解答を導く経験ができた」などの回答が多かったためである。また、「普通」にリンクされた「解く」・「問題」・「難しい」・「教える」・「分かる」という言葉も、「普通に解く難しい問題も、教えると分かるようになる」という回答が反映されている。つまり、生徒はこの

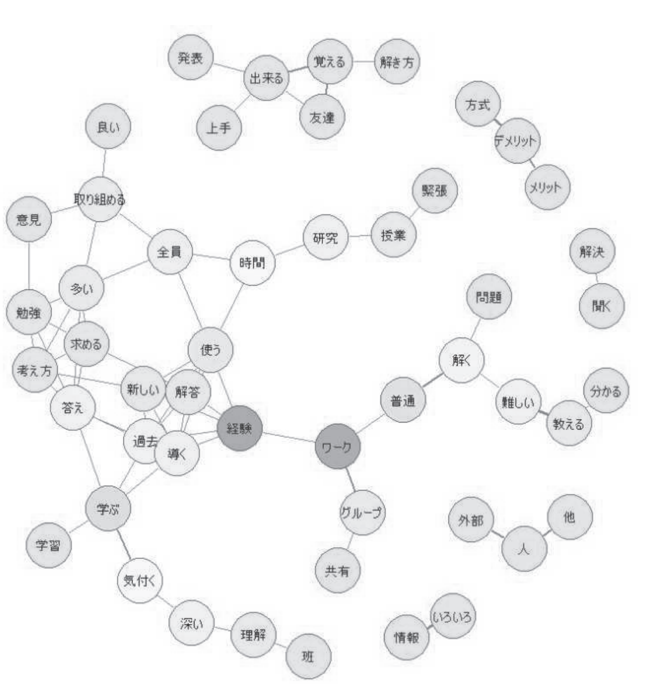


図7　自由記述の共起ネットワーク

授業を通して、自分との対話だけでは解決が困難な問題を、教え伝える行為に代表されるような他者との対話を行うことで、その困難を乗り越えることができたという実感を持っていることが分かった。

(4) 小テスト

授業の次の日に確認の小テスト（10点満点）を実施した。生徒は授業の前に同じ問題に挑戦し、一人で考えた場合はほとんどの生徒が答えることができなかった。当たり前のことではあるが、事後テストでは平均点は大幅に上がり、軌跡の方程式を求めることができるように変容していることが分かる。生徒はこの授業を通して、思考過程を意識しながら軌跡の求め方を考え、仲間と自分の考えを伝え合いながら、軌跡の方程式を求める手順を獲得し、軌跡の方程式を求める力を身に付けることができた。

表３　事前と事後のテストの比較

事前テスト		事後テスト	
平均点	標準偏差	平均点	標準偏差
0.38	1.05	7.06	2.38

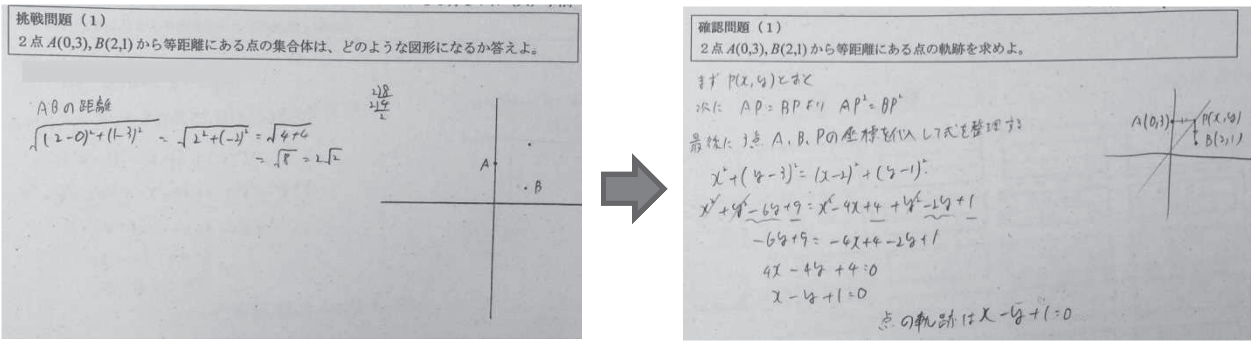


図８　事前テストと事後テストの答案の変容

(5) 最後に（今後の課題）

図９に示すような教師の意図と違う解法を使ったＡ班の生徒は、導入時に自分の持っている知識を活用できたことと、振り返りの場面で、新たな学びを得たという実感を強く感じたようである。そして、この解法が前日の学びから連想されたものであることを考えると、その時間で教師が与えた「課題」というある種「強制的な学び」よりも、生徒自身が体験した「経験的な学び」の方が、その後の学びに強く影響することが示唆された。今回は、思考の意識化と表現させる学びによって、達成度評価と一定の成果は出たものの、今後もその手法については検討していきたい。

A(3, 0), B(0, 5)を通る直線は $y=-\dfrac{5}{3}x+5$

直線ABと垂直な傾きは $\dfrac{3}{5}$ であり、

ABの中点 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2})$ を通るので、

垂直二等分線は　$3x-5y+8=0$

図９　Ａ班の生徒の解答の流れ

なお、学習活動を自己評価させるために、**表４**に示す本時の学習活動の評価規準を設けた。数学科の評価規準に応じた内容とした理由は、活動評価に教科の特性を関連付けさせるためである。

表４　学習活動を自己評価するための評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
a1　学習の目標を理解し、見通しをもって主体的に学習している。	b1　問題を数学的な見方で捉え、数式等に置換し考えられる。	c1　計画を立て、その計画どおりに計算する技能を持っている。	d1　問題文を理解し、自分と対話し関連する知識を引き出せる。
a2　学習の内容に関心をもち、意欲的な態度で取り組んでいる。	b2　どのように計算するか、関連する知識と統合し考察できる。	c2　図形の技能的な処理を論理的に考え、適切に計算できる。	d2　問題解決のために、必要な知識を選択している。
a3　振り返りから次の課題を見つけ、成長する意欲をもっている。	b3　計算結果で、その解答が問題解決に適切かどうか評価できる。	c3　学習を振り返り、新たな技能を習得している。	d3　学習内容を理解し、新しい知識を習得している。

［引用・参考文献］
・OECD 教育研究革新センター『メタ認知の教育学 生きる力を育む創造的数学力』（明石書店）
・田中博之『言葉の力を育てる活用学習 型を活用し個性的に表現する子どもたち』（ミネルヴァ書房）
・田中博之『アクティブ・ラーニング「深い学び」実践の手引き 新学習指導要領のねらいを実現する授業改善』（教育開発研究所）
・江森英世『算数・数学授業のための数学的コミュニケーション論序説』（明治図書）
・NITS 独立行政法人教職員支援機構「新たな学びに関する教員の資質能力向上のためのプロジェクト（次世代型教育推進センター）」https://cran.r-project.org/
・末吉正成「Excel ビジネス統計分析」（翔泳社）
・樋口耕一「KH Coder2.00f」http://khc.sourceforge.net/

［資料１：ワークシート（Ａ班）］

問題　２点 $A(3,0), B(0,5)$ から等距離にある点の軌跡を求めよ。

A

理解

関連

計画

実行

模造紙にグループの解答を書き、発表する分担を決めてください（必ず全員が発表すること）。
（○○時○○分より発表を開始します）

振り返り

(1) Ａ班とＢ班の問題の解き方で、共通することは何ですか？

(2) 自分や仲間との対話を通して、新たに発見したことは何ですか？

［資料２：自己評価項目］

関心・意欲・態度（a）

	a1	a2	a3
3	目標を理解し、主体的に学習できた。	学習内容に興味があり、意欲的に学習できた。	次の課題を見つけ、より成長したいと思った。
2	目標を理解したが、主体的に学習できなかった。	興味はあるが、学習に意欲的とまではいえなかった。	成長したいと思うが、課題は見つからなかった。
1	目標を理解できず、活動も消極的だった。	興味もなく、意欲的に学習できなかった。	課題も見つからず、成長したいとも思わなかった。
評価	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3

数学的な見方や考え方（b）

	b1	b2	b3
3	問題を数式で表現し、解答を考えることができた。	関連する知識を活かして考えることができた。	得た解答から、問題の軌跡の様子を説明できた。
2	数式で表現したが、解答を考えられなかった。	考えたが、関連する知識を活かしきれなかった。	得た解答から、軌跡の様子を頭の中で想像できた。
1	数式で表現できず、解答も得られなかった。	知識を活かせず、考えることもできなかった。	軌跡を想像することができず説明もできなかった。
評価	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3

数学的な技能（c）

	c1	c2	c3
3	計画を立て、そのとおりに計算することができた。	計算方法を論理的に考え、述べることができた。	軌跡の計算を理解し、計算方法を身に付けた。
2	計画を立てたが、それに沿った計算ができなかった。	考えを述べたが、論理性にやや課題が残った。	計算はできるが、細かいミスがいくつかあった。
1	計画も立たず、計算もすることができなかった。	考えを述べることができなかった。	計算を理解できず、実際に計算できなかった。
評価	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3

知識・理解（d）

	d1	d2	d3
3	問題を理解し、関連する知識を意識できた。	多くの情報を活かして考えることができた。	学習内容を理解し、新たな知識を得られた。
2	問題は理解できたが、関連知識は意識できなかった。	いくつかの情報を活かして考えることができた。	内容を理解したが、新たな知識は得られなかった。
1	問題が理解できず、関連知識も意識できなかった。	情報を活かして考えることができなかった。	内容が理解できず、新たな知識も得られなかった。
評価	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3	1 ---- 2 ---- 3

［資料３：授業アンケート質問項目］

１．もっともあてはまる番号に○をしてください。

1	2	3	4	5
（全くそう思わない）	（あまり思わない）	（どちらともいえない）	（少し思う）	（とてもそう思う）

【主体的な学び】

（１）興味関心を持って学習することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（２）見通しを持ちながら学習することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（３）取り組む課題と持っている知識を結びつけて考えられた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（４）粘り強く考えることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（５）学習後の反省では、次の学習の目標をみつけることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5

【対話的な学び】

（６）仲間とお互いの考えを比較することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（７）問題を考える上で、多くの情報を収集することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（８）自分の考えを表現することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
（９）伝えたいことを、いろいろな手段で説明することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(10)教科書や情報など、資料を手掛かりに考えることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(11)仲間と共に考えを創りあげることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(12)仲間と協力して課題を解決することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5

【深い学び】

(13)自分に問いかけながら考えることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(14)新たな知識や技能を習得することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(15)過去に習った知識や技能を活用することができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(16)自分の課題と結びつけて考えることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(17)知識や技能を概念として捉えることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(18)自分の考えを創りあげることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5
(19)新しい考えを創りあげることができた。　1 ---- 2 ---- 3 ---- 4 ---- 5

２．授業の感想を自由に書いてください。

事例３　作問演習による授業実践 ～　作問者の意図を意識し、その言語化を図る　～	
単元名	数列
これまでの課題	(1) 数列の分野では、様々な和のパターンや漸化式など生徒が苦手意識をもっている。 (2) 苦手意識をなくすため、プリント作成や生徒による解説、グループワークなど生徒の現状を把握しながら、様々な取組がなされているが、さらなる改善が必要である。 (3) 単元における総復習として重要な役割を担っている問題演習は、その解法の確認にとどまっている。
授業改善のポイント	(1) グループで様々な問題に取り組み、公式などの基礎事項の意味や活用を考えられるようにした。 (2) 生徒による解説、グループワークなどを作問演習と組み合わせることで、生徒が主体的に活動するようにした。 (3) 生徒の応用力の育成を図るため、問題演習の授業改善を行い、作問演習を取り入れた。そこでは、単元の総復習を行い、作問者の意図といった新しい視点を意識させた。 本時においては、各グループが作成した問題について生徒が解説する。基礎事項の確認や作問者の意図を意識し、生徒が自らの知識を言語化して解説することで、数列についての理解を深めさせる。

1　指導観

(1) 本単元について（教材観）

自然数の列、偶数の列などは、小学校以降様々な学習場面に登場し、生徒にとって親しみやすい内容である。本単元では、簡単な等差数列や等比数列の一般項とその和について理解し、それらを漸化式や数学的帰納法によって、事象の考察に活用できるようにする。数学Ⅲの「数列の極限」においては、さらに数列の理解を深めていく。

(2) 生徒の実態（生徒観）

表１は、本事例における学習集団が数列を学習してきた感想の結果である。その結果から、数列を苦手とする生徒は多いことがわかる。特に、漸化式から一般項を求めることや群数列、数学的帰納法など考察する力が必要な場面でつまずくことが多い。

表１　数列を学習してきた生徒の感想

1　大変難しかった	2　難しかった	3　普通だった	4　そんなに難しくなかった	5　易しかった
66.7%	26.7%	6.7%	0.0%	0.0%

(3) 生徒に身に付けさせる力（育成を目指す資質・能力）

数列の公式の理解を深めることで、その公式の意味を正確に捉え、事象の考察に活用できる力を身に付けさせる。

本事例では、既習の公式と問題とのつながりを意識させる。このことから、公式の意味を正確

に捉えることで公式を正しく理解する力、作問者の意図を考えさせることで問題を考えて解く力、生徒一人一人が解説することで知識を言語化する力を身に付けさせる。

2　単元の指導計画及び評価計画

○単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	知識・理解
A1　数列に関心をもつとともに、その有用性を考察しようとしている。 A2　事象の考察に積極的に活用して、数学的論拠に基づいて判断しようとしている。	B1　数列の知識を用いて、事象を数学的に考察し表現することができる。 B2　思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えることができる。	C1　数列において、事象を数学的に表現・処理することができる。 C2　数列において、推論の方法の技能を身に付けている。	D1　数列における基本的な概念、原理・法則などを体系的に理解している。 D2　数列における基本的な概念、原理・法則などの知識を身に付けている。

時間	学　習　内　容	評価規準とのかかわり	評価方法
第１時間	数列と一般項について	A1 D1	観察 ノート 小テスト
第２、３時間	等差数列と一般項について	A1 B1 C1	
第４、５時間	等差数列の和について	B2 C1 D2	
第６、７時間	等比数列と一般項について	A1 B1 C1	
第８、９時間	等比数列の和について	B2 C1 D2	
第10,11時間	和の記号Σについて	B1 C1 D2	
第12,13時間	階差数列について	A1 B1 C1	
第14,15時間	いろいろな数列の和について 【作問一斉指導】 第ｎ項がｎの分数式で表される数列の和や等差数列×等比数列の和について生徒一人一人が作問する。	A2 B2 D1	
第16～18時間	漸化式について 【作問一斉指導】 $a_{n+1}=pa_n+q$ で定義される数列の一般項について生徒一人一人が作問する。	A2 B2 D1	
第19～21時間	数学的帰納法について	B2 C2 D2	
第22,23時間	章末問題 グループワークで、基礎事項がどのように活用されているかをまとめながら演習する。	A2 B2 D2	観察 ノート
第24,25時間	【作問演習】 グループに分かれて、教科書や問題集、参考書をもとに問題と解説を作成する。	A1 B2 D2	観察 プリント
第26時間	【作問演習】 各グループの問題から、生徒がそれぞれ 2 題選択して問題演習をする。	B2 C1 D2	
第27時間	【作問演習】 問題演習の解答を各グループに分け、それをもとに問題の再確認をする。	A1 B2 D2	
第28時間	【問題解説】 グループを再編成し、作問者が解説をする。	B2 D1	

3　実践の様子

(1)　作問一斉指導（第 14 時間から第 18 時間）

次のアからウの条件による問題について作問させ、その問題を隣の席の生徒と交換し、相互で問題を解かせた。生徒の作問を確認しながら、良問や題意に即さない問題について一斉指導した。

ア　$\boxed{1}$第ｎ項がｎの分数式で表される数列の和の問題。

(1)は標準的問題、(2)は計算が煩雑で難問、(3)(4)は条件にあわない。（**図１**）

作問一斉指導　例

$\boxed{1}$ (1) $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

(2) $\frac{1}{1\cdot9}+\frac{1}{2\cdot10}+\cdots+\frac{1}{n(n+8)}$

(3) $\frac{3}{5\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\cdots+\frac{3}{(2n+3)(3n+4)}$

(4) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{4}{2\cdot3}+\cdots+\frac{3n-2}{n(n+1)}$

図１　作問一斉指導$\boxed{1}$問題例

イ　$\boxed{2}$等差数列×等比数列の和の問題。

(1)(2)は標準的問題、(3)は等比数列の和との違いを把握する良問、(4)は 2 回の作業が必要で難であるが良問、(5)は条件にあわない。（**図２**）

$\boxed{2}$ (1) $\sum_{k=1}^{n} 2k\cdot3^k$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cdot2^k$

(3) $\sum_{k=1}^{n} n\cdot2^{k-1}$

(4) $\sum_{k=1}^{n} 3k^2\cdot6^{k-1}$

(5) $\sum_{p=1}^{q} pq$

図２　作問一斉指導$\boxed{2}$問題例

ウ　$\boxed{3}$漸化式$a_{n+1}=pa_n+q$で定義される数列の一般項の問題。

(1)(2)は標準的問題、(3)は式の形にとらわれず良問、(4)等差数列との違いを把握する良問。（**図３**）

$\boxed{3}$ (1) $a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n-2$

(2) $a_1=-2,\ a_{n+1}=-a_n+3$

(3) $a_1=5,\ 2a_{n+1}=6a_n+1$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+1$

図３　作問一斉指導$\boxed{3}$問題例

【具体的な生徒の様子】

作問作業開始の指示をした後、すぐに生徒は作問に取りかかれなかった。どの程度まで、式を変形してよいのかに迷ったようである。形にこだわり過ぎず自由に作問をしてよいことを指示すると、積極的に作問に取り組むようになった。

$\boxed{1}$(3)(4)、$\boxed{2}$(5)のような条件にあわない問題が多く出たが、生徒にとっては公式の深い理解につながった。

(2)　作問演習（第 24 時間から第 27 時間）

作問演習に際しては、問題作成、問題演習、問題の再確認を行った。

ア　問題作成

グループに分かれて、教科書や問題集、参考書をもとに問題と解説を作成した（ワークシート①$\boxed{資料１}$：p103）。どのような基礎事項が活用されているか、別解はないかを考えさせた。

また、作問者の意図についてまとめることで、問題に対する理解を深めさせた。他のグループが解くことを想定して、問題の難易度についても考えることとした。

【具体的な生徒の様子】

今まで解いてきた数列の問題を見直し、手が出せなかった難易度の高い問題にまで目を向けて、良い問題を作成しようとしていた。解答作成や基礎事項の確認、作問者の意図を考えることについてはスムーズに進んでいった。

問題作成により、基本公式から難易度の高い問題まで網羅することができたため、数列の総復習としての役割も果たしていた。

イ　問題演習

各グループの問題をワークシート②資料２（p104）にまとめ、その中から生徒がそれぞれ２題選択して問題演習を行った。解答だけでなく作問者の意図や感想についてコメントさせた。

【具体的な生徒の様子】

他のグループが作問したこともあり、生徒は積極的に問題演習に取り組んでいた。問題文に不備があった問題については、それに気付いて不備を指摘しながら解く者やそのまま考え込んでしまっている者がいた。

自分のグループの問題を解いているかどうかなどを気にする様子も見られたが、次の授業でフィードバックすることを伝え問題演習に集中させた。

ウ　問題の再確認

問題演習の解答を各グループに配布し、解答の別解や感想をもとに問題の再確認を行った。問題文の不備の指摘や別解を参考に、問題や解説などを訂正した。

【具体的な生徒の様子】

解答よりもコメントの部分が気になっており、良い評価であったときにはグループ内で喜ぶ様子がみられた。また、問題文の不備についての指摘があったとき、自分たちでは気付かなかったことに反省し、問題文の重要性や作問の難しさを感じていた。

不備についての指摘を「文句が書いてある」とへそを曲げるグループもあったが、なぜ指摘されたかについて考えさせ、解く側の立場から問題をみることも作問においては重要であることを伝えた。生徒にとっては、自ら作った問題に対しての思い入れが強いことがわかった。

以下、授業の流れに即して生徒のワークシートを示す。

問題作成（２時間）

作問演習ワークシート①

3年　組　番　氏名

問題

(1) 初項 2，公差 7 の等差数列 $\{a_n\}$ を求めなさい。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-n$ となる $\{b_n\}$ について一般項 b_n を求めなさい。

(3) 等差数列 $\{a_n\}\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ (1)(2) で求めたものである時、この2つに含まれる数を小さい順から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ を一般項を求めなさい。

問題演習（１時間）コメント

<作問評価>

○ 難易度　(易しい) 1 2 3 4 5 (難しい)

→ 解けた解けなかったではなく、難しいと感じたかどうか

○ 出題意図との適合度　(意図に沿わない) 1 2 3 4 5 (意図に沿う)

→ 基本事項が定着しているかを問えているか、作問者の意図に沿う出題となっているか

○ 作問者へのコメント → 良い（悪い）と感じた点、こんな工夫をすればより意図に沿うなど

(1)の等差数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよの形にした方が良いと思った

<作問評価>

○ 難易度　(易しい) 1 2 3 4 5 (難しい)

→ 解けた解けなかったではなく、難しいと感じたかどうか

○ 出題意図との適合度　(意図に沿わない) 1 2 3 4 5 (意図に沿う)

→ 基本事項が定着しているかを問えているか、作問者の意図に沿う出題となっているか

○ 作問者へのコメント → 良い（悪い）と感じた点、こんな工夫をすればより意図に沿うなど

(3)について、「この2つに含まれる数」よりも「この2つに共通する数」のほうが適切だと思った。

基礎事項の確認ができる良い問題だと感じた。

問題の再確認（１時間）

作問演習ワークシート①

3年　　組　　番　氏名

問題

(1) 初項2，公差7の等差数列$\{a_n\}$の一般項を求めなさい。

(2) 初項から第n項までの和S_nが$S_n=2n^2-n$となる$\{b_n\}$について一般項b_nを求めなさい。

(3) 等差数列$\{a_n\}\{b_n\}$の一般項がそれぞれ(1)(2)で求めたものである時、この2つに共通する数を小さい順から順に並べてできる数列$\{c_n\}$を一般項を求めなさい。

(3) 問題解説（第28時間）

グループを再編成し、基礎事項の確認や作問者の意図を意識した解説を作問者が行った。解説のポイントや聞く側のポイントをまとめ、全体に説明することでスムーズな解説が行われるようにした。解説の際にはＢ４サイズに拡大コピーしたプリントを黒板の代わりに使った。

また、解説など対話が苦手な生徒がいたため、２人で解説するグループを作ることで配慮した。最後に、作問演習全体の振り返りを行った。

【具体的な生徒の様子】

解説前に確認の時間をとった際に、別解の解説に不安を感じたグループから質問があり、具体例を挙げて解説することで理解しやすくなることを助言した。

解説者には緊張や不安もあり、自らの知識を言語化して伝えることに苦労していたが、聞く側の反応から理解してもらえたと感じると安堵の表情を浮かべていた。

グループによっては解説に時間がかかってしまう場合があったが、諦めずに何とか説明しようとする姿勢がみられた。また、聞く側が各自でまとめながら聞いており、どの部分の説明でつまずいているのかを確認し助言した。

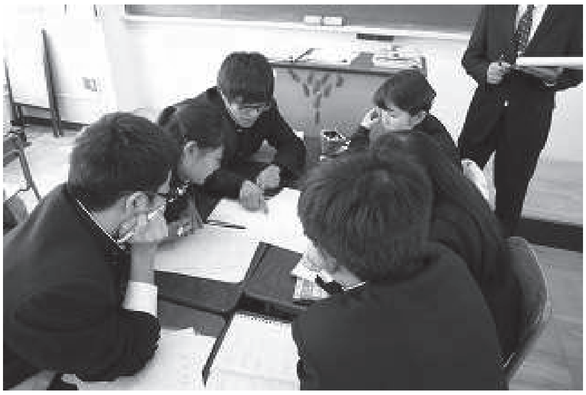



図４　グループ解説の様子

なお、第28時間の授業の流れは次のようである。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点および評価
導入（10分） 本時の流れの確認	【説明】 本時の流れを説明する。 【活動】 ・解説、質問の準備をする。 ・各グループで解説する内容を確認する。 ・他のグループの問題を見直し、作問者の意図についてまとめる。	・基礎事項の活用法と別解について確認させる。 ・次の事項について板書し、共通認識を図る。 ① 解説のポイント ・問題の訂正。 ・基礎事項の確認。 ・意図を伝える。 ②聞くポイント ・分からなかった部分を明確にする。 ・意図を考える。 評価 【知識・理解】 数列における基本的な概念、原理・法則などを体系的に理解している。 D1

	新しいグループに移動する。	・各グループから新しいグループには１～２名が移動するように指示する。
展開（25 分） 解説及び質問	【活動】 ・各グループで解説・質問させる。 ・解説と作問者の意図について生徒が説明しその後、質問する。（１問５分程度）	・各グループを観察しながら、時間を区切って進めていくよう助言する。 ・作問者の意図を考えながら、解説を聞くように指示する。 ・どのように説明したらよいか悩んでいる生徒には適宜助言する。 評価【数学的な見方や考え方】 思考の過程を振り返り多面的・発展的に考えることができたか。 B2
まとめ(10 分)	もとのグループに戻り、まとめのワークシートに記入する。 情報交換をしながら、ワークシートへ記入する。 作問演習の振り返りをする。	ワークシートに基づき、グループでの情報交換を促す。

５　更なる改善に向けて　（成果と課題）

（1）事後アンケートから

表２　事後アンケートの結果

１　各グループの解説について

よくできた	まあまあできた	どちらともいえない	あまりできなかった	できなかった
40.0%	26.7%	16.7%	10.0%	6.7%

２　作問者の意図について

よくできた	まあまあできた	どちらともいえない	あまりできなかった	できなかった
46.7%	30.0%	16.7%	3.3%	3.3%

３　作問をしてみて

よくできた	まあまあできた	どちらともいえない	あまりできなかった	できなかった
43.3%	36.7%	6.7%	3.3%	10.0%

４　数列について

大変難しかった	難しかった	普通だった	そんなに難しくない	易しかった
46.7%	40.0%	6.7%	6.7%	0.0%

ア　自由記述の例

・条件など一文字を抜かしてしまうけで問題が解けなかったり、ややこしくなったりすることに気付いた。

・(1) (2) での誘導は作問者の意図があり、新たな視点を手に入れた。

・今までは、「問題が解けた」または「解けなかった」ということだけで作問者の意図を考え

てはいなかった。
・作問者の意図を考えて解くことで、解法の道筋がよく見えるようになった。
・数列に興味がわいた。公式の意味を考えるようになった。

イ　事後アンケート結果の分析

事後アンケートの結果から、多くの生徒が積極的に作問演習に参加できており、数列に対する苦手意識がやや薄れたようである。そのことにより、苦手意識を抱いていた数列に対しても積極的に取り組もうとする姿勢が生まれてきた。また、作問者の意図を考えるといった視点や問題文の重要性について気付かせることは、数列の分野だけでなく他の分野への問題の取組によい影響が期待される。

(2) その後の様子について

生徒は基礎事項や作問者の意図を意識した演習に取り組んでおり、理解が不十分な生徒に対して積極的に説明している。

また、今回の作問演習をしたのは文系のクラスであったが、その問題を理系クラスの生徒が解き、その後、理系クラスでも作問演習に取り組み、それを文系クラスの生徒が解いた。学校内でクラス間を越えた知的な交流ができたことは、非常に有意義なものであった。

文理で作問演習をしてみると、理系の生徒は問題文の前提条件など細かく気にしているが、文系の生徒は解法に終始しているところがあり、問題文に対する意識の違いが見受けられた。

(3)　今後の課題について

本事例で一番の課題は時間数を確保することある。作問から解説まで５時間もかかってしまい、時間をかけずに実施する方法を考えていかなければならない。例えば、作問や問題演習を宿題にしたり、不備のあった問題を教員がすべて直しておくことで再確認の時間をなくしたりすることで、時間数を減らすことができるであろう。今後も継続して作問演習を取り入れていき、生徒や学校の実情にあった形にしていきたい。

また、問題の解説を生徒によるグループ解説にすることで、知識の言語化を意識した授業であった。生徒は何とかして伝えようと努力していたが、解説の例文などを提示すれば、さらにスムーズに解説ができたかもしれない。

さらに、生徒の理解度チェックがおろそかになってしまったことが反省としてあげられる。生徒にはよい経験となったが、一人の教員がすべての班を把握することが困難であり、心配な部分がある。特に難しい問題については教員が解説し、確認テストを実施して理解度を確認することが必要である。

日々の授業の中で、解答するための方針を見いだすための考える力、計算力、公式を正確に理解する力､知識を言語化する力など重点的に付けさせたい力は学年やクラスによって様々である。そのような中で、作問演習は取組の一例であることを再認識し、今後も授業改善を継続させていきたい。

〔参考文献〕
・芹沢光雄『出題者心理からみた入試数学』（講談社）

資料1　生徒たちが作成した問題及び解答

3班

作問演習ワークシート①

3年　組　番　氏名

問題

Aさんは1日目に $\log_2 a_1$ 円，2日目には $\log_2 a_2$ 円…n日目には $\log_2 a_n$ 円貯金する。n日目までにはいくら貯まるか。

また，100日目までにはいくら貯まるか。

ただし，$\{a_n\}$ の初項4，公比4とする。

解答

$a_n = 4^n$

$\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n$

$= \log_2 4 + \log_2 16 + \cdots + \log_2 4^n$

$= \log_2 (4 \times 16 \times \cdots \times 4^n)$

$= \log_2 (2^2 \times 2^4 \times \cdots \times 2^{2n})$

$= \log_2 2^{2+4+\cdots+2n}$

$= (2+4+\cdots+2n)\log_2 2$

$= \sum_{k=1}^{n} 2k$

$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} n(n+1)$

$= \underline{n(n+1)円}$

$100(100+1) = \underline{10100円}$

基礎事項（公式等）

等比数列

- $a_n = a \cdot r^{n-1}$
- $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\log_a M^k = k\log_a M$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}n(n+1)$

作問者の意図

ログと数列の知識を使い，一見難しそうに見えるが，解いてみると簡単な公式から解くことができる。

資料２　生徒たちが作成した問題

作問演習ワークシート ②

3年　　組　　番　氏名

問題1

問題

半径5の円 C_1 に内接する三角形を $\triangle P_1Q_1R_1$ とし $\triangle P_1Q_1R_1$ の内接円を C_2 とする。
$\triangle P_1Q_1R_1$ と円 C_2 の接点を P_2, Q_2, R_2 とし $\triangle P_2Q_2R_2$ の内接円を C_3 とする。
この操作を繰り返してできる n 個目の円を C_n とする。

(1) 円 C_n の半径 r_n は?

(2) 円 C_n の面積を S_n とするとき, $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n$ は?

問題2

問題

机の上に4枚コインがある。この中から無作為に2枚選び、裏返す。
表2枚，裏2枚の状態から始め，この操作を n 回行う。

表が4枚のときの確率を p_n とする
　　2枚　　〃　　q_n
　　0枚　　〃　　r_n

(1) $q_{n+1}=-\frac{1}{3}q_n+1$ となることを証明せよ

(2) q_n を求めよ

問題3

問題

Aさんは1日目に $\log_2 a_1$ 円，2日目には $\log_2 a_2$ 円 … n 日目には $\log_2 a_n$ 円貯金する。n 日目までにはいくら貯まるか。
また，100日目までにはいくら貯まるか。
ただし，初項4，公比4とする。

問題4

問題

(1) 初項2，公差7の等差数列 $\{a_n\}$ を求めなさい。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-n$ となる $\{b_n\}$ について一般項 b_n を求めなさい。

(3) 等差数列 $\{a_n\}\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ(1)(2)で求めたものである時、この2つに含まれる数を小さい順から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ を一般項を求めなさい。

問題5

問題

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{3}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{5}{1},\frac{1}{4},\frac{3}{3},\frac{5}{2},\frac{7}{1},\frac{1}{5},\frac{3}{4}\ \cdots\cdots$$

$\frac{13}{7}$ は第何群の何番目か? また第何項か?
ただし約分はしないものとする