高等学校における教科指導の充実

数　学　科

数学の学ぶ意欲を高める指導の工夫

～理解と納得、そして、おもしろさを実感できる授業を目指して～

栃木県総合教育センター

平成 23 年 3 月

ま　え　が　き

21世紀は、新しい知識・情報・技術が、政治・経済・文化をはじめ社会のあらゆる領域の基盤として飛躍的に重要性を増す、いわゆる「知識基盤社会」の時代であると言われています。そのような時代を生きるために、確かな学力、豊かな心、健やかな体の調和を重視する「生きる力」をはぐくむことがますます重要になります。また、各種の調査からは、日本の児童生徒について、思考力・判断力・表現力、知識・技能の活用、学習意欲、学習習慣・生活習慣などで課題があると分析されました。このような状況を踏まえて、平成20年１月の中央教育審議会答申で学習指導要領の改訂の方向性が示され、平成21年３月に高等学校学習指導要領が告示されました。

平成22年12月に公表されたOECD生徒の学習到達度調査（PISA2009年）の結果においては、読解力、数学的リテラシー、科学的リテラシーのそれぞれで下位層が減少し、上位層が増加したことから、読解力を中心に日本の生徒の学力は改善傾向にあると考えられていますが、課題は依然として残されています。今後とも引き続き、基礎的・基本的な知識の習得や、問題解決のための思考力・判断力・表現力の育成に努めていくことが求められます。

栃木県総合教育センターでは、基礎・基本の確実な定着を図る教科指導の在り方について研究するとともに、その成果を普及することで生徒の学力の向上に資することを目的に、平成17年度から「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」を行ってきました。今年度は、昨年度に引き続き、「今回の学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえるとともに、各種調査の結果から指摘されている課題の解決を図るための教科指導の在り方を探る」ことに重点を置き、国語科、地理歴史科、数学科、理科、外国語科（英語）の各教科で調査研究に取り組みました。本冊子はその成果をまとめたものであり、教科指導を充実させる一助として、御活用いただければ幸いです。

最後に、調査研究を進めるにあたり、御協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

平成23年３月

栃木県総合教育センター所長

瓦　井　千　尋

目　　　次

※本資料は、栃木県総合教育センターのホームページ「とちぎ学びの杜」内、「調査研究」と「教材研究のひろば」のコーナーにも掲載しています。
「とちぎ学びの杜」 http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/

はじめに

1　調査研究の背景

平成21年３月に告示された学習指導要領の改訂においては、「OECD生徒の学習到達度調査（PISA調査)」など各種の調査から明らかにされた、次のような課題が反映されている。

①思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題、知識・技能を活用する問題において、無答率が高いという課題が見られる。
②読解力に関しては成績分布の分散が拡大し、成績中位層が減り、低位層が増加している。
③家庭での学習時間の減少など、学習意欲、学習習慣・生活習慣に課題が見られる。
④自分への自信の欠如や自らの将来への不安、体力の低下といった課題が見られる。

特に、教科の指導においては、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得させること、知識及び技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等を育成することが重視されている。その実現のためには、「習得・活用・探究」のバランスを取った学習活動の展開が重要であり、高等学校学習指導要領解説の総則では、次のように述べられている。

＜高等学校学習指導要領解説総則　第１章　総説　第２節　改訂の基本方針（抜粋）＞
②知識・技能の習得と思考力・判断力・表現力等の育成のバランスを重視すること。
　確かな学力を育成するためには，基礎的・基本的な知識・技能を確実に習得させること，これらを活用して課題を解決するために必要な思考力，判断力，表現力その他の能力をはぐくむことの双方が重要であり，これらのバランスを重視する必要がある。
　このため，各教科において基礎的・基本的な知識・技能の習得を重視するとともに，観察・実験やレポートの作成，論述など知識・技能の活用を図る学習活動を充実すること，さらに総合的な学習の時間を中心として行われる，教科等の枠を超えた横断的・総合的な課題について各教科等で習得した知識・技能を相互に関連付けながら解決するといった探究活動の質的な充実を図ることなどにより思考力・判断力・表現力等を育成することとしている。
　また，これらの学習を通じて，その基盤となるのは言語に関する能力であり，国語科のみならず，各教科等においてその育成を重視している。さらに，学習意欲を向上させ，主体的に学習に取り組む態度を養うとともに，家庭との連携を図りながら，学習習慣を確立することを重視している。

これらのことを踏まえつつ、各種調査の結果から指摘されている課題の解決を図るための教科指導の在り方を探る調査研究に取り組んだ。

※本冊子においては、平成 11 年３月に告示された学習指導要領を「現行の学習指導要領」、平成 21 年３月に告示された学習指導要領を「新学習指導要領」として記す。

２　数学科における指導の工夫

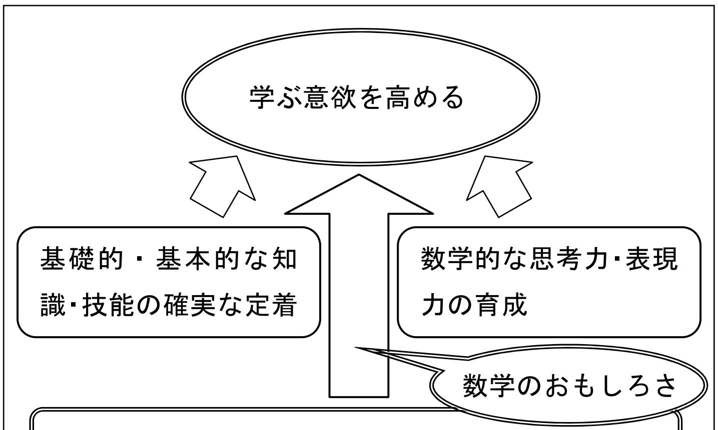
数学の学ぶ意欲を高める指導の工夫
～理解と納得、そして、おもしろさを実感できる授業を目指して～

新学習指導要領は、数学科については、平成24年度の入学生から年次進行により先行して実施される。

今回の学習指導要領は、平成20年１月の中央教育審議会答申「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」で示された数学科の改善の基本方針を受けて改訂された。その改善の基本方針の最初には次のように示されている。

> **算数科、数学科については、その課題を踏まえ、小・中・高等学校を通じて、発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする。**

これは、学校教育法に示されている「基礎的な知識及び技能を習得させるとともに、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくみ、主体的に学習に取り組む態度を養うこと」に小学校算数科、中学校・高等学校数学科として対応していくことを意図したものである。ここで示されている課題とは、教育課程実施状況調査や国際的な学力調査の結果から導かれた課題、例えば「事柄や場面を数学的に解釈すること、数学的な見方や考え方を生かして問題を解決すること、自分の考えを数学的に表現することなどに課題が見られた」、「ＰＩＳＡ調査では、数学で学ぶ内容に興味があると回答した生徒の割合が国際平均値より低く、数学の学習に対する不安を感じると回答した生徒の割合が国際平均値より高かった」などのことである。



この改善の基本方針では、小・中・高等学校を通じて、「基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着」と「数学的な思考力・表現力の育成」をもとに、「学ぶ意欲を高める」ことに数学科として取り組んでいかなければならないと示されている。その際、重要なことは、学習内容を理解させ、学んだことを納得させ、そして、おもしろいと感じさせることである。

授業後に生徒は反復練習に取り組み、定着を図る。しかし、生徒によっては、単に解法を覚えるだけにとどまり、なぜそのように解くのか、なぜそのように考えるのかといった納得が得られないままで学習が終わってしまうことがある。そこで、今回の調査研究では、授業の際に、単に知識や技能を伝えるだけではなく、学習内容を理解させ、納得させることができるよう、教材と授業展開の工夫に取り組んだ。学習内容の理解と納得によって、より定着が図られるとともに、数学のおもしろさを実感することができる。これらのことが、数学的な思考力・表現力を育成し、ひいては、数学を学ぶ意欲を高めることにつながっていく。

また、生徒の「数学の学習に対する意識」と「学習内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」に

ついて、質問紙による調査を実施した。その調査結果をもとに、指導のポイント、工夫のポイントを明確にし、生徒が苦手と感じていると思われる「絶対値」、「鈍角の三角比」、「整数」についての指導の工夫・改善に取り組んだ。

本書で示す各事例における授業の目標、教材、授業展開、時間等は、実践者である研究協力委員の学校の実態に合わせて設定したものである。各事例の中から、それぞれの指導の趣旨を読み取り、各学校で活用していただきたい。

各事例の内容は、次のとおりである。

事例１　**「絶対値」の理解を深め、納得を促す指導の工夫**

生徒に「絶対値に関するアンケート」を行ったところ、70%近くの生徒は絶対値を含む式の値を求め、絶対値を含む方程式・不等式を解くことができると回答する一方で、90%以上の生徒は「絶対値の定義や式の意味」を理解できていないと回答した。生徒は、定義や式の意味を理解せずに、また納得せずに、パターンにあてはめて問題を解決しているに過ぎないことがわかる。そこで、絶対値の定義や式の意味を数直線上に表現させたり、言葉で表現させたりすることで、絶対値に関する理解を深め、解法が納得できるような授業の展開を試みた。

事例２　**「鈍角の三角比」の理解を深め、納得を促す指導の工夫**

直角三角形を用いて定義する鋭角の三角比から、座標を用いて定義する鈍角の三角比へ拡張することは、生徒の理解と納得が十分には得られない場面である。したがって、生徒は定義を覚え、問題の解法を覚えることに終始してしまう。そこで、直角三角形を用いた定義から座標を用いた定義へ、自然な思考の流れとして感じ、さらに、鈍角の三角比の定義の理解と納得が得られるような授業展開を目指した。

事例３　**「整数」の理解を深め、納得を促す指導の工夫**

新学習指導要領では、数学Ａで整数についての単元が新設される。整数については、小学校、中学校の学習を通して、計算のしくみや性質について学習する。そこで、今回の取組では、整数の性質に関する基本的な考え方を高校生の視点から見直し、教材化した。「整数解、自然数解を持つ方程式」の解法を考察することを通して、整数の基本的な性質の理解を深め、その学習内容を用いて、既習事項である「二項定理（場合の数）」、「反復試行の確率（確率）」を整数の視点から扱うなど、互いに関連させながら１つの単元として扱った。授業では、ワークシートを活用するとともに、グループ学習、個人演習、一斉授業等の学習形態を適宜取り入れることで、学習内容に対する理解と納得を深めるとともに、生徒の思考の深化を促すことを目指した。

〈研究協力委員〉

栃木県立宇都宮女子高等学校	教　諭	江　連　雅　子
栃木県立壬生高等学校	教　諭	半　田　高　史
栃木県立矢板東高等学校	教　諭	松　本　秀　則

〈研究委員〉

栃木県総合教育センター	研　修　部	副主幹	植　木　　　淳
栃木県総合教育センター	研究調査部	指導主事	寺　崎　義　人

数学に関する調査と指導の工夫

１　「数学の学習に対する意識」と「学習内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」についての調査

生徒の数学の学習に対する意識と、生徒が感じている学習内容ごとの理解度、納得度、おもしろさについて、質問紙による調査を実施した。調査の対象は、研究協力委員が勤務する学校の第１学年の生徒、第２学年の生徒である。

(1) 調査の実施について

①　対象・実施時期等

対　　象

調査内容	対　　象
「数学の学習に対する意識」（アンケート１）	研究協力委員が勤務する学校の第１学年の生徒 168 名
「数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」（アンケート２）	研究協力委員が勤務する学校の第２学年の生徒 184 名

実施時期：平成 22 年６月

時　　間：おおむね 15 分程度

②　質問紙について

２種類の質問紙「数学の学習に対する意識」、「数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」を用意し、実施した。

「数学の学習に対する意識」は、第１学年の生徒 168 名に対して実施した。また、「数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」については、数学Ⅰ、数学Ａの学習を終了した第２学年の生徒 184 名に対して実施した。

「数学の学習に対する意識」では、「数学」や「数学の学習」についての意識を４件法で調査した。「平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査（以下、教育課程実施状況調査）」の質問紙調査でも、同様の調査が実施されているので、全国レベルの調査結果と本調査の結果とを比較できるようにした。ただし、教育課程実施状況調査では高校３年生を対象としているのに対し、本調査では高校１年生を対象としていることに注意する必要がある。

さらに、数学の得意、不得意についての意識、不得意と回答した生徒については不得意である原因を尋ね、不得意であると感じている生徒の意識を調査した。また、数学が分かるようになるために必要なこと、数学の授業の進め方にについて望むことを調査し、生徒の「数学」や「数学の授業」についての意識の把握に努めた。

「数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」については、数学Ⅰ、数学Ａの各内容に対する「理解度」、「納得度」、「おもしろさ」について調査した。教育課程実施状況調査の質問紙調査においては、数学Ⅰの内容ごとの「理解度」、「好感度」、「有用性の意識」が調査された。そこでは、「理解度」を「分かった・分からなかった」、「好感度」を「好きだった・

きらいだった」、「有用性の意識」を「ふだんの生活や社会生活の中で役立つと思った・思わなかった」として調査が実施された。本調査では、「理解度」は教育課程実施状況調査と同様に、また、「好感度」に対しては「おもしろさ」を「おもしろかった・おもしろくなかった」として調査した。さらに、「有用性の意識」については、高等学校数学科の学習内容が普段の生活や社会生活の中で直接的に役立つと生徒が感じられる場面が少ないと考えたことから、「納得度」と置き換え、「納得できた・納得できなかった」として調査することとした。

教育課程実施状況調査
理解度 分かった・分からなかった
好感度 好きだった・きらいだった
有用性の意識 ふだんの生活や社会生活の中で役立つと思った・思わなかった

本調査
理解度 分かった・分からなかった
おもしろさ おもしろかった・おもしろくなかった
納得度 納得できた・納得できなかった

また、今回の調査では、生徒によって、学習した内容を忘れていることも考えられるので、調査実施時に、それぞれの学習内容について簡単に振り返らせながら、記入させた。

(2) 調査結果

① 「数学の学習に対する意識」（アンケート１）について（回答者 168 名）

ア)「数学」や「数学の学習」についての意識

下表の「今回」は今回の調査結果、「高」は教育課程実施状況調査の結果、「中」、「小」は、平成 22 年度全国学力・学習状況調査における質問紙調査の中学校３年生、小学校６年生の結果である。今回の調査結果は、小数第２位を四捨五入しているため、合計が 100%にならない質問事項がある。教育課程実施状況調査は、４つの選択肢以外に「分からない」、「その他」、無回答があるため、合計が 100%にならない質問事項がある。

選択肢		そう思う	どちらかといえばそう思う	どちらかといえばそう思わない	そう思わない
1　数学の勉強が好きだ。	**今回**	26.5%	38.0%	22.9%	12.7%
	高	15.1%	23.8%	17.9%	39.5%
	中	27.3%	26.7%	24.6%	21.1%
	小	35.6%	28.4%	20.7%	15.1%
2　数学の勉強は大切だ。	**今回**	49.4%	37.5%	10.1%	3.0%
	高	21.2%	37.8%	18.4%	16.8%
	中	44.9%	34.5%	13.7%	6.4%
	小	71.1%	21.0%	5.3%	2.3%
3　数学の授業は楽しい。	**今回**	25.0%	46.4%	22.0%	6.5%
4　数学の勉強をすれば、私のふだんの生活や社会生活の中で役立つ。	**今回**	22.6%	45.2%	23.8%	8.3%
	高	10.1%	27.8%	24.8%	29.1%
	中	33.4%	34.2%	13.7%	6.4%
	小	65.3%	23.8%	7.7%	2.9%
5　ふだんの生活や社会生活の中で役立つよう、数学の勉強をしたい。	**今回**	27.4%	42.9%	21.4%	8.3%
	高	10.4%	23.9%	25.2%	33.4%

全国の高校生（教育課程実施状況調査の結果）と比較すると、今回調査した本県の高等学校第１学年の生徒からは、すべての項目について、肯定的な回答を得た。これは、各学校において、生徒の実態に応じた授業が展開され、生徒の数学への意識を高めていることに要因があると考えられる。教育課程実施状況調査の質問項目にはなかった「数学の授業は楽しい」という質問項目について、「そう思う」「どちらかといえばそう思う」と回答した生徒が７割を超えていることからも、その様子がうかがえる。

全国の小学生、中学生と比較すると、今回調査した本県の高等学校第１学年の生徒は、「算数・数学の勉強が大切だと思う」、「社会に出たときに役に立つと思う」とする回答が少ない。新学習指導要領の改善の基本方針の１つに「数学を学ぶことの意義を実感させる」ことが挙げられていることも考慮し、実感を伴って理解させること、学習の広がりや深まりなどを感じさせることが今後重要となってくる。

イ）数学の得意、不得意について

選択肢	得意	どちらかといえば得意	どちらかといえば苦手	苦手
６　数学は得意ですか、苦手ですか。	9.5%	34.5%	26.2%	29.8%

「どちらかといえば苦手」「苦手」と回答した生徒の苦手である理由（複数回答可）

選択肢	回答率
①とにかく興味がないから	16.0%
②解けても楽しいと感じないから	2.1%
③授業中は分かるが、テストになると解けないから	54.3%
④説明を聞いても一回で理解できないから	43.6%
⑤授業が早くて理解できないから	26.6%
⑥定理や公式を覚えられないから	19.1%
⑦問題を見たとき、どう解いていいのか思いつかないから	62.8%
⑧真似をすれば解けるが、その意味が分からないから	31.9%
⑨いろんな記号が出てきて混乱してしまうから	22.3%
⑩解くのに時間がかかって面倒だから	14.9%
⑪計算が苦手でよく間違うから	25.5%
⑫その他	10.6%

（回答者 94 名）

数学を得意と回答した生徒（「得意」、「どちらかといえば得意」と回答した生徒）は、44.0%であった。数学の勉強が好き（64.5%）で、数学の授業は楽しい（71.4%）と感じている生徒の中には、「それでも、数学は苦手である」と感じている生徒がいることが分かる。

また、苦手と感じている理由としては、「問題を見たとき、どう解いていいのか思いつかないから」、「授業中は分かるが、テストになると解けないから」、「説明を聞いても一回で理解できないから」という回答が多かった。生徒にとっては、問題が解けないこと、説明が理解できないことが、数学を苦手と感じる要因になっている。

ウ）数学が分かるようになるための方策について

数学が分かるようになるために必要なことはどのようなことだと思いますか。（複数回答可）

選択肢	回答率
①授業をしっかり聞くこと	82.1%
②家で予習・復習をすること	72.6%
③教科書に書かれている定理や公式をしっかり覚えること	56.5%
④練習問題をたくさん解くこと	79.8%
⑤先生がおもしろい授業をしてくれること	32.1%
⑥塾に行く	3.6%
⑦数学に関する本を読むこと	2.4%
⑧数学の才能があること	13.1%
⑨その他	3.0%

数学の授業の進め方について望むことはどのようなことですか。（複数回答可）

選択肢	回答率
①できるだけ例題を用いて、解き方を教えてほしい。	66.1%
②別解はいらない。できるだけ効率的な解法を１つ教えてほしい。	23.8%
③なるべく多くの練習問題を出してほしい。	51.2%
④小テストを何回も行って、実力がつくようにしてほしい。	31.5%
⑤理解を確認しながら進めてほしい。	45.2%
⑥前に習ったことも、もう一度解説してほしい。	35.7%
⑦質問があったとき、時間がかかっても納得するまで説明してほしい。	30.4%
⑧作ったり、数えたり、測ったり、グラフを描いたりするなど、作業を取り入れてほしい。	10.1%
⑨その他	4.2%

数学が分かるようになるためには、「授業をしっかり聞くこと」、「練習問題をたくさん解くこと」、「家で予習・復習をすること」に回答が集まった。生徒自身は、授業を中心として、家での予習・復習が重要であることを認識している。一方で、「数学に関する本を読むこと」と回答した生徒は 2.4%と少なく、授業で扱われる問題を理解し、解くことが数学の学習であると認識しているようである。

また、このことは、「数学の授業の進め方について望むこと」にも表れている。「できるだけ例題を用いて、解き方を教えてほしい」、「なるべく多くの練習問題を出してほしい」と回答した生徒が半数を超えた。

② 「数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの理解度、納得度、おもしろさ」（アンケート２）について

（回答者 184 名）

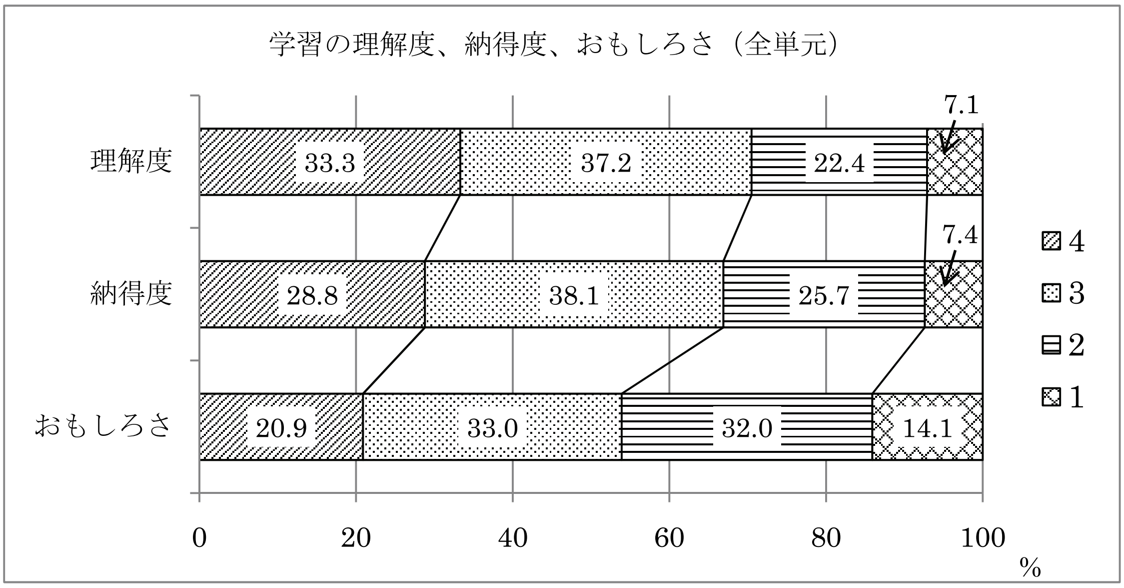
数学Ⅰ、数学Ａの内容ごとに、次の質問項目について４件法で回答させた。

質問事項	回答例			
	4	3	2	1
問題の解き方は分かりましたか。（**理解度**）	分かった	どちらかといえば分かった	どちらかといえば分からなかった	分からなかった
学習した内容は納得できましたか。（**納得度**）	納得できた	どちらかといえば納得できた	どちらかといえば納得できなかった	納得できなかった
学習した内容はおもしろかったですか。（**おもしろさ**）	おもしろかった	どちらかといえばおもしろかった	どちらかといえばおもしろくなかった	おもしろくなかった

次の表は、アンケートの回答状況を全単元についてまとめたものである。数字は、回答の割合を百分率で表したものである。また、グラフは、理解度、納得度、おもしろさについてそれぞれの回答状況を表したものである。

	問題の解き方は分かりましたか。				学習した内容は納得できましたか。				学習した内容はおもしろかったですか。			
	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1
全単元	33.3	37.2	22.4	7.1	28.8	38.1	25.7	7.4	20.9	33.0	32.0	14.1

（数字は％　回答者 184 名）



理解度、納得度を比較すると、「４」または「３」と回答する割合については、納得度がやや下回る結果となった。また、おもしろさについては、理解度、納得度と比較すると、「４」または「３」と回答する割合については大きく下回る結果となった。問題の解き方が分かり、学習内容に納得はできても、その学習内容をおもしろいと感じられない生徒がいることが分かる。

次の表は、アンケートの回答状況を単元ごとにまとめたものである。数字は、回答の割合を百分率で表したものである。

	問題の解き方は分かりましたか。				学習した内容は納得できましたか。				学習した内容はおもしろかったですか。			
	4	3	2	1	4	3	2	1	4	3	2	1
方程式と不等式	61.5	30.7	7.2	0.5	56.7	34.0	8.7	0.7	30.0	39.5	23.8	6.7
二次関数	36.3	38.7	18.8	6.3	30.8	39.0	25.0	5.2	22.5	34.4	31.9	11.2
図形と計量	29.3	39.3	24.5	6.8	24.2	42.5	25.8	7.5	19.0	33.4	31.8	15.8
集合と論理	23.7	33.3	30.8	12.1	19.2	33.9	33.9	13.0	16.5	27.5	35.3	20.7
場合の数と確率	28.2	40.1	23.7	8.0	23.6	38.8	29.0	8.6	22.1	31.6	30.8	15.5
平面図形	16.3	39.5	33.5	10.7	14.7	38.2	35.9	11.2	12.0	29.3	42.4	16.3

（数字は％　回答者 184 名）

単元ごとに見ると、数学Ⅰの「方程式と不等式」では、理解度が「４　分かった」とする生徒が６割を超えるが、おもしろさが「４　おもしろかった」とする生徒はその半数にとどまり、他の単元と比較するとやや上回る程度であった。「方程式と不等式」では、解き方は分かり、納得もするが、おもしろさは感じないとする生徒が多い。

「方程式と不等式」では、理解度が「４　分かった」、「３　どちらかといえば分かった」とする生徒の割合と、納得度が「４　納得できた」、「３　どちらかといえば納得できた」とする生徒の割合がほぼ等しく、解法が分かれば、納得できる単元であることが分かる。同様に、「図形と計量」もその傾向が見られ、他の単元と比較すると、この２つの単元は、「理解」と「納得」が結び付きやすい単元であることが分かる。しかし、この２つの単元では、他の単元と比較すると、「納得度」と「おもしろさ」の差が大きい。納得しても、それが、おもしろさにつながっていない生徒がいることが分かる。

「二次関数」、「場合の数と確率」では、理解度と納得度に差があり、解法が分かっても、それが、納得に結び付かない生徒がいることが分かる。しかし、「場合の数と確率」では、他の単元と比較すると、「理解度」、「納得度」と「おもしろさ」の差が小さく、理解し、納得すれば、それがおもしろさにつながっていくことが分かる。

数学Ａの「集合と論理」、「平面図形」では、他の単元と比較すると、問題の解き方が分かった、学習内容が納得できた、学習した内容がおもしろかったと回答する生徒が少なく、生徒にとって、「解き方が分かりにくく、納得できず、おもしろさを感じられない」内容となっていることが分かる。特に、「集合と論理」では 20.7%、すなわち５人に１人の生徒が学習した内容はおもしろくなかったと、否定的な回答をしている。しかし、他の単元と比較すると、納得度とおもしろさの差が小さく、学習内容が納得できれば、おもしろいと感じる生徒が多いことが分かる。

次の表は、それぞれの学習内容について、「４」、「３」の回答を「解き方が分かった」、「納得できた」、「おもしろかった」として、その割合を百分率で表したものである。

数学Ⅰ、数学Ａの学習内容		解き方が分かった	納得できた	おもしろかった
方程式と不等式	整式の加法・減法・乗法(展開)、因数分解	95.7	94.6	71.7
	実数、平方根を含む式の計算	90.8	88.0	65.8
	一次不等式	91.8	90.2	71.7
	二次方程式	90.8	89.7	69.0
二次関数	二次関数のグラフ	76.6	71.7	56.4
	二次関数の最大・最小	76.6	72.8	57.6
	二次関数のグラフと x 軸の位置関係	69.6	64.1	52.5
	二次不等式	77.2	70.7	60.9
図形と計量	鋭角の三角比と三角比の相互関係	74.5	73.4	56.5
	鈍角の三角比	70.1	67.9	51.6
	正弦定理・余弦定理とその応用	75.5	72.8	62.0
	三角形の面積	71.7	71.2	56.0
	相似形の面積比・体積比及び球の表面積・体積	51.6	48.4	35.9
集合と論理	集合と要素の個数	77.7	71.2	55.4
	命題と条件	46.7	45.1	33.7
	論証（証明）	46.7	42.9	42.9
場合の数と確率	和の法則・積の法則	72.8	64.7	54.3
	順列・組合せ	77.7	71.2	64.1
	基本的な確率の考え方と計算	72.8	66.8	58.7
	独立な試行と確率	54.9	51.6	45.1
	期待値	63.0	57.6	46.2
平面図形	三角形の性質	59.8	56.0	44.6
	円の性質（円周角の定理、円に内接する四角形）	57.1	53.3	42.4
	円と直線（接線と弦のつくる角、方べきの定理）	50.5	49.5	37.0

（数字は％　回答者 184 名）

「方程式と不等式」では、すべての学習内容について解き方が分かったとする生徒が９割を超え、納得できたとする生徒も多い。しかし、「実数、平方根を含む式の計算」では、解き方が分かったとする割合と、おもしろかったとする生徒の割合の差が、すべての学習内容の中で一番大きかった。計算方法は分かるが、おもしろさは感じられないとする生徒が多いことが分かる。

「二次関数」では、４つの学習内容で解き方が分かり、納得できたとする生徒が７割を超えたが、「二次関数のグラフと x 軸の位置関係」だけが、７割を下回ってしまった。一方で、「二次不等式」は、生徒にとって分かりにくい学習内容であるといわれているが、理解度、おもしろさは、「二次関数」の中で最も高かった。

「図形と計量」では、４つの学習内容で解き方が分かり納得できたとする生徒が７割前後であった。三角比については、「鈍角の三角比」の理解度、納得度、おもしろさが「鋭角の三角比と三角比の定義」、「正弦定理・余弦定理とその応用」と比較して、やや低くなっている。鋭角の三角比は直角三角形という具体的な三角形を用いて定義し、正弦定理・余弦定理は図形の角度の大きさや辺の長さを求めるなど具体的な取組が主となる。一方、鈍角の三角比は座標を用いて定義するなど、抽象的に考えなければならない。ここに、他の内容と比較して、「鈍角の三角比」に関する理解度、納得度、おもしろさが低くなっている原因があると考えられる。

また、「相似形の面積比・体積比及び球の表面積・体積」は、理解度、納得度ともに５割前後と、他の内容と比較して低くなってしまった。現行の学習指導要領の改訂の際に中学校の学習内容から移行された内容であるが、今回の改訂で、再び、中学校の学習内容に戻ったものである。今後は、中学校の学習指導に期待したい。

「場合の数と確率」では、「独立な試行と確率」の理解度、納得度、おもしろさが低かった。「独立な試行の確率」では、反復試行の確率を扱う。特に、この反復試行の確率では、公式の意味も分からずに覚えるだけであったり、数直線上を動く点の確率を求める場合などは、その場合を漏れなく数え上げることができなかったりすることで、納得が得られず、おもしろさが感じられないのではないかと考えられる。

「場合の数と確率」は、具体的で身近な事象を教材として取り上げることができるので、数学が日常生活で役立つことを実感しやすい単元であり、生徒にとって分かりやすく、興味が持てる単元であると考えられている。しかし、今回の調査結果を見ると、独立な試行の確率や期待値では、納得できず、おもしろさを十分に味わえていないことが分かる。

「集合と論理」、「平面図形」では、ともに理解度、納得度、おもしろさが他の単元と比較して低かった。特に、「集合と論理」の「命題と条件」、「論証（証明）」では、解き方が分かったとする生徒が半数に満たなかった。しかし、「論証（証明）」では、「納得できた」とする生徒の割合と「おもしろかった」とする生徒の割合が同じであった。すなわち、解き方が分かり、納得できればおもしろいと感じることができると考えられる。

２　指導の工夫

５ページの表にあるように、本県の高校生は、「数学の勉強が好きだ」、「数学の勉強は大切だ」、「普段の生活や社会生活の中で役立つように、数学の勉強をしたい」等の質問に対して、肯定的な回答をしている割合が、全国の高校生の平均と比較して高い。これは、「数学の授業は楽しい」という質問に対する肯定的な回答をしている割合が高い（71.4％）という結果が示しているとおり、普段から生徒の実態に応じて、生徒の数学への意識を高めるような授業を行っていることの成果であると考えられる。

一方、数学が苦手と感じている生徒は多い。しかも、苦手である理由、分かるようになるための方策からは、「問題が解ける」ことが「数学」であると感じている生徒が多いことがうかがえる。苦手であり、問題が解けるようになりたいと感じている生徒は、解法を覚えることに専念してしまうことがある。「なぜそうなるのか」、「なぜそう解くのか」といった理解と納得の上で、問題の解決に

取り組むことができないので、苦手意識を克服することができずにいると考えられる。

そこで、今回の調査研究では、「問題の解法を覚え解決できるだけではなく、授業の中で学習内容を理解させ、納得させること」、さらに、理解と納得の上で「数学のおもしろさを実感できるようにさせること」を目指すことにした。問題の解法が分かるだけではなく、その解法を納得し、数学的なおもしろさを味わうことで、その後の反復練習によって学習内容の定着が図られ、そして、生徒の数学への苦手意識の克服にもつながっていく。

具体的な取組としては、ワークシートの工夫、手作りの教具の利用、学習内容の順序の再構築など、教材を工夫することで、「学習内容が視覚的にイメージできるようになること」、「学習内容のつながりを実感することができるようになること」を重視した。また、授業の中では、教師からの一方的な説明や問題演習で終わることなく、生徒が感じたこと、考えたことを表現する場面を設定することやグループの中で話し合うことで、主体的に学習に取り組ませることを目指した。

事例１	「絶対値」の理解を深め、納得を促す指導の工夫

1　事例の概要

絶対値の学習に関するアンケート（研究協力委員の学校の生徒 32 人）

	あてはまる	ややあてはまる	あまりあてはまらない	あてはまらない
絶対値を含む式の値を求めることができる。	**4(12.5%)**	**18(56.3%)**	8(25.0%)	2(6.3%)
絶対値を含む式の値の求め方は納得して理解できている。	2(6.3%)	6(18.8%)	**18(56.3%)**	**6(18.8%)**
絶対値の定義や式の意味を理解できている。	0(0%)	3(9.4%)	**21(65.6%)**	**8(25.0%)**
絶対値に関する学習は全体的に難しく、苦手である	**5(15.6%)**	**17(53.1%)**	7(21.9%)	3(9.4%)

日頃､｢絶対値は難しい｣､｢絶対値は苦手だ」という生徒の声を聞くことが多い。そこで、生徒に「絶対値の学習に関するアンケート」を行ったところ、70%近くの生徒は絶対値を含む式の値を求めることができると回答した一方、75%の生徒はその求め方を理解できていない、という結果が得られた。また、90%以上の生徒は絶対値の定義や式の意味が理解できていないことも分かった。さらに､｢絶対値の内容が理解できるようになるためには、どのようなことが必要か」という質問に対し、多くの生徒は「繰り返し問題を解いて、解法のパターンを覚える」と回答していた。

この結果から、生徒の絶対値に関する学習は、定義や式の意味を理解し、納得することより、パターンにあてはめて解く、ということを重要視していると考えられる。

そこで今回の取組では、絶対値の定義や式の意味から絶対値を含む方程式・不等式までの指導の中で、常に絶対値の定義を振り返りつつ、式の意味を考えながら方程式や不等式の解法を理解させることにより､｢絶対値」の理解を深め、納得を促す授業展開を考えた。

絶対値を含む式の意味を言葉で表現させたり、数直線上に表現させたりしながら絶対値の定義を確認させることで、式の意味をしっかり把握させ、その上で、絶対値を含む方程式について、定義を用いて容易に解ける問題から容易には解けない問題へと発展させ、その解法を考える中で場合分けによる解法を見いださせる。その際に、それぞれの解法のよさを考えさせることで、場合分けは絶対値を含む問題を解くための道具の１つであり､｢絶対値は場合分けがすべて」ではないことを認識させる。

2　指導計画

(1) 単元「絶対値」の学習計画

①　単元の目標

絶対値の意味を理解し、その定義をもとに、絶対値を含む式の計算をすることができる。また、式の見方を豊かにするとともに、絶対値を含む方程式・不等式の解法を考察し、解くことができるようにする。

② 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
$\boxed{\text{A1}}$ 絶対値に関心をもち、定義に基づいて計算しようとする。 $\boxed{\text{A2}}$ 目的に応じて絶対値を含む式の変形をしようとする意欲をもつ。	$\boxed{\text{B1}}$ 絶対値の考え方を理解できる。 $\boxed{\text{B2}}$ 絶対値を含む式の定義に着目したり、その性質に着目したりして、いろいろな式の見方ができる。	$\boxed{\text{C1}}$ 簡単な絶対値の計算することができる。 $\boxed{\text{C2}}$ 絶対値を含む方程式・不等式が解くことができる。	$\boxed{\text{D1}}$ 絶対値の定義や性質を理解している。 $\boxed{\text{D2}}$ 絶対値を含む方程式・不等式が表す意味を理解している。

③ 単元の指導計画

時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準
1時間目	絶対値の定義、性質 （ワークシート No1）	絶対値を含む式の意味を、定義を用いて表現させる。	$\boxed{\text{A1}}$, $\boxed{\text{B1}}$
2,3時間目 **（実践例）**	絶対値を含む方程式の解法 （ワークシート No2,3）	複数の解法を考えさせ、それぞれの解法のよさを表現させる。	$\boxed{\text{A2}}$, $\boxed{\text{B2}}$, $\boxed{\text{C1}}$, $\boxed{\text{C2}}$ $\boxed{\text{D1}}$, $\boxed{\text{D2}}$
4時間目	絶対値を含む不等式の解法 （ワークシート No4）		

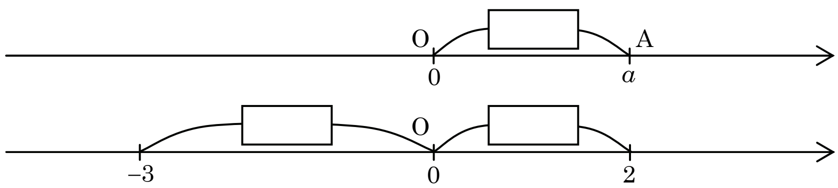
(2) 授業で使用したワークシート

絶対値ワークシート No1　　　　年　　組　　　番　氏名

〈絶対値の意味〉

数直線上で、実数 a に対応する点 A と原点 O との距離 OA を a の_________といい、

記号_______で表す。



問　絶対値の記号を用いずに表せ。また、その意味を言葉で書け。

$|-3| =$

$|2| =$

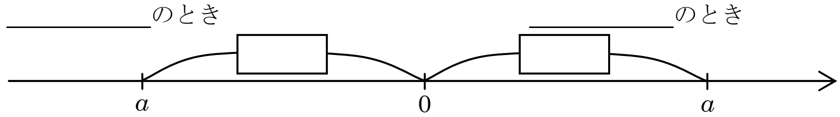
$|-3.5| =$

$\left|\dfrac{3}{5}\right| =$

〈絶対値の記号の一般化〉

$|a|$ …この式の意味は____

__________のとき　　　　__________のとき



$|a|$ を絶対値の記号を用いないで表すと

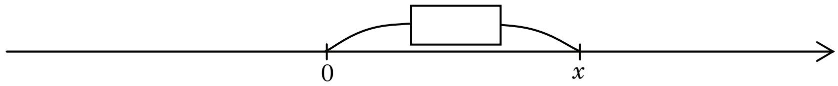
（a の値によって絶対値記号のはずし方が異なる　→　a の値による場合分けが必要）

絶対値ワークシート No2　　　　　　年　　組　　　番　氏名

〈絶対値を含む式の意味〉

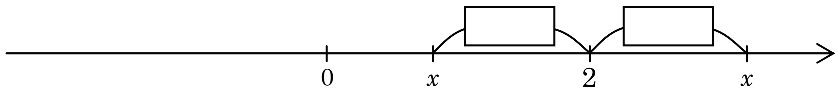
例　①$|x|$の意味を言葉で表現しよう。

実数 x に対応する点と________との________　⇒　________　からの　________



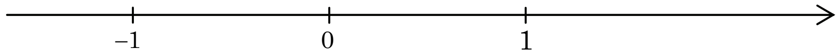
②$|x-2|$の意味を言葉で表現しよう。

実数________に対応する点からの__________



③$|x+1|$の意味を言葉で表現しよう。

実数________に対応する点からの__________



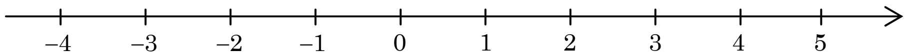
〈絶対値を含む方程式の解法〉

例　①方程式　$|x|=3$　を満たす x の値を求めよ。

・$|x|=3$ の意味を言葉で表してみよう。

____

・この方程式の意味を数直線上に表してみよう。



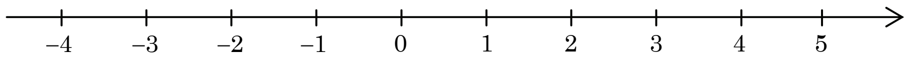
したがって、この方程式を満たす x の値は　$x=$______________

②方程式　$|x-2|=3$　を満たす x の値を求めよ。

・$|x-2|=3$ の意味を言葉で表してみよう。

____

・この方程式の意味を数直線上に表してみよう。



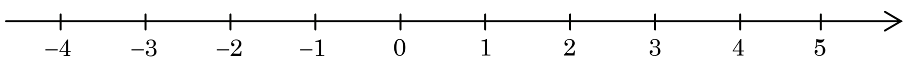
したがって、この方程式を満たす x の値は　$x=$______________

③方程式　$|x-2|=3x$　を満たす x の値を求めよ。

・$|x-2|=3x$ の意味を言葉で表してみよう。

____

・この方程式の意味を数直線上に表してみよう。



したがって、この方程式を満たす x の値は　$x=$______________

⇒　※　②と③の難しさの違いに着目してみよう！

［難しさの違いは何か］	［どうすれば解決できるか］

〈絶対値を含む方程式の「新たな解法」！〉

・絶対値を含む方程式が難しい理由は…

→どうすれば解決できるか？

$\boxed{\text{例}}$ ①方程式　$|x| = 3$　を満たす x の値を「新たな解法」を用いて求めよ。

$|x|$ は、（ⅰ）x≧____のとき________
（ⅱ）x＜____のとき________　となる。

（ⅰ）のとき

（ⅱ）のとき

（ⅰ）（ⅱ）より、この方程式を満たす x の値は　x=________________

②方程式　$|x-2| = 3$　を解け。

③方程式　$|x-2| = 3x$　を解け。

④方程式　$|x+2|+|x-3| = 7$　を解け。

・難しいのはなぜ？

→どうすれば解決できるか？

・方程式を解いてみよう！

ワークシート No2 と No3 の解法を比較し、それぞれのよさを考えよう。

No2 のよさ	No3 のよさ

絶対値ワークシート　No4　　　　　　　　　年　　組　　　番　氏名

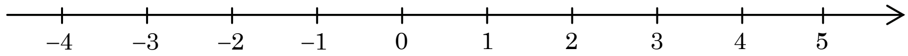
〈絶対値を含む不等式〉

$\boxed{例}$　①不等式　$|x| > 3$　を満たす x の範囲を求めよ。

・$|x| > 3$ の意味を言葉で表してみよう。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・この不等式を満たす x の値の範囲を数直線上に図示してみよう。



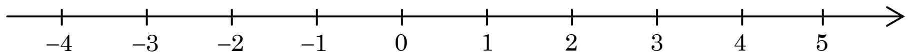
したがって、この不等式を満たす x の値の範囲は　x=＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

②方程式　$|x-2| < 3$　を満たす x の値の範囲を求めよ。

・$|x-2| < 3$ の意味を言葉で表してみよう。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・この不等式を満たす x の値の範囲を数直線上に図示してみよう。



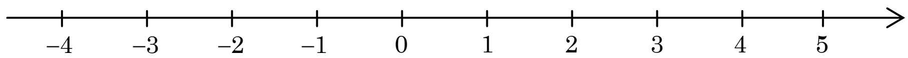
したがって、この不等式を満たす x の値の範囲は　x=＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

③方程式　$|x-2| < 3x$　を満たす x の値の範囲を求めよ。

・$|x-2| < 3x$ の意味を言葉で表してみよう。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・この不等式を満たす x の値の範囲を数直線上に図示してみよう。



・この不等式を満たす x の値の範囲を求めるためには、どうすればよいだろう？
方程式の解法を参考に解決してみよう！

(3) 2, 3時間目「絶対値を含む方程式の解法」の学習計画

① 目標

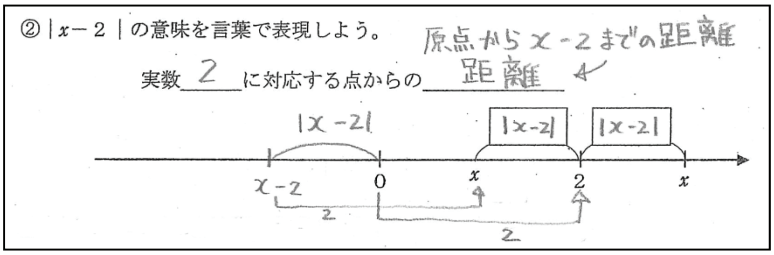
絶対値を含む方程式の解法のよさを考察することができるとともに、方程式を解くことができる。

② 指導計画

指導内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） ・絶対値を含む式の意味の確認	（ワークシート No2） $\boxed{|x|,\ |x-2|,\ |x+1| \text{ の意味を、言葉と数直線で表現してみよう。}}$	・絶対値は距離であることを確認する。 ・絶対値を含む式の意味を自分自身の言葉で表現させる。

（展開） ・定義を用いた絶対値を含む方程式の解法	①$\lvert x\rvert = 3$を満たすxの値を求めよ。 ②$\lvert x-2\rvert = 3$を満たすxの値を求めよ。 ○方程式の意味を言葉で表現する。 ○方程式の意味を数直線上に表現する。 ○方程式の解を求める。 ③$\lvert x-2\rvert = 3x$を満たすxの値を求めよ。 ○方程式の意味を言葉で表現する。 ○方程式の意味を数直線上で表現する。 ②と③の違いを考えてみよう。 ［発問：難しさの違いは何か。］ （予想される生徒の反応） ・右辺にxがあるかないか。 ・距離を使えるか使えないか。 ［発問：どうすれば解決できるか。］ （予想される生徒の反応） ・場合分けをする。	・「距離」という言葉を用いて表現させる。 ・言葉を数直線で表現させる。 ・数直線で表現することは難しいことを実感させる。 ・周囲の生徒と話し合わせることにより、場合分けの存在に気付かせる。
・場合分けを用いた絶対値を含む方程式の解法	（ワークシート No3） 絶対値を含む方程式の「新たな解法」を考えてみよう。 ［発問：絶対値を含む方程式が難しいのはなぜか。］ （予想される生徒の反応） ・絶対値をどのように計算していいか分からない。 ［発問：どうすれば解決できるか。］ ・場合分けをする。 次の方程式を、場合分けを用いて解け。 ①$\lvert x\rvert = 3$　②$\lvert x-2\rvert = 3$　③$\lvert x-2\rvert = 3x$ ○①、②、③の解法を確認する。 ○③の図形的意味を確認する。 ④方程式$\lvert x+2\rvert + \lvert x-3\rvert = 7$を解け。 ［発問：この方程式が難しいのはなぜか。］ （予想される生徒の反応） ・絶対値記号が２つあって、どう計算していいか分からない。 ［発問：どうすれば解決できるか。］ ・場合分けをする。 ・距離で考える。 ○方程式④の図形的意味を確認する。	・ワークシート No2 で得られた結果を利用させる。 ・①、②はワークシートNo2で得られた解答と一致することを確認する。 ・③は距離が見えづらいので、場合分けが有効であることを実感させるとともに、距離を用いた解法も提示し、式の図形的意味を考えさせる。 ・「距離で考える」という意見が出なければ、教師側から距離による解法を提示し、式の図形的意味を考えさせる。
（まとめ） ・解法の比較	ワークシート No2，No3 で学んだ解法の比較をし、それぞれのよさを考えよう。	・それぞれの解法のよさを生徒自身の言葉で表現させる。 ・どちらか一方の解法がよい、という結論は出さない。

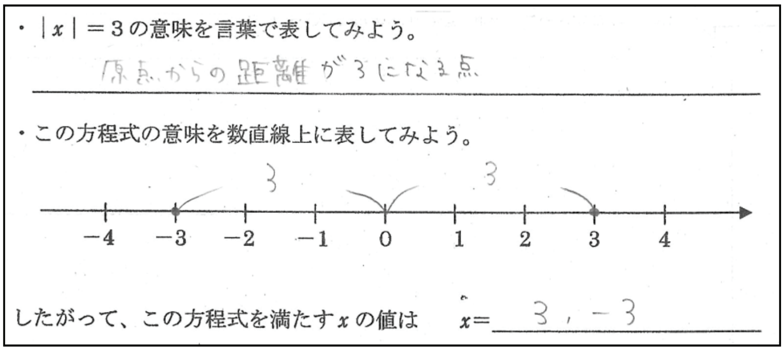
3　授業記録



ワークシート No2 を配付し、$|x|$，$|x-2|$，$|x+1|$ の意味を言葉と数直線で記入させた。

$|x-2|$ の意味について生徒に発問したところ、生徒は「原点から $x-2$ までの距離」と答えた。

そこで、数直線上に点 $x-2$ をとらせ、原点と点 $x-2$ を正の方向に 2 だけ移動させることにより、$|x-2|$ は 2 から x までの距離であることを理解させた。

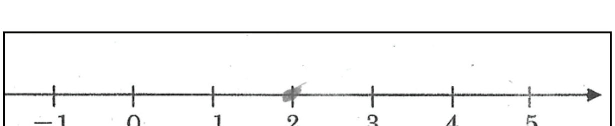


次に、方程式 $|x|=3\cdots$① に取り組ませた。まず、方程式①の意味を言葉で表現させたところ、生徒によって書き方の差異はあるものの、概ね右のような表現をしていた。その後、方程式①の意味を数直線上に表し、方程式の解を求めさせたところ、ほとんどの生徒が迷いなく書けていた。式を言葉で表すことによって、その方程式の意味を読み取ることができ、方程式を容易に解くことができたようである。

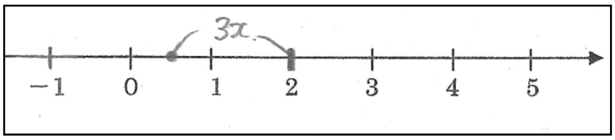
また、方程式 $|x-2|=3\cdots$② について、①と同様な手順で取り組ませたところ、ほとんどの生徒が迷いなく解いていた。

続いて、方程式 $|x-2|=3x\cdots$③ について、①と同様な手順で取り組ませた。以下は生徒とのやりとりの一部である。

教　師：③の意味を言葉で表すと、どうなりますか？
生徒Ａ：2 からの距離が $3x$ になるところです。
教　師：なるほど。先ほどの②と同様に考えると、Ａさんのようなことになりますね。他の表し方を考えた人はいますか？
生　徒：……
教　師：では、今Ａさんが言ってくれたことを数直線上に表してみましょう。周りの人たちと相談してもかまいません。
生徒Ｂ：とりあえず、2 のところに印をつけて…（右図）
？？C、かけないよね？



生徒Ｃ：そうなんだよ。どうかいていいか分からないんだ。
生徒Ｄ：私はこうかいてみたけど（右図）。



生徒Ｂ：距離が $3x$ っていうのはおかしくない？
生徒Ｃ：x によって距離が変わっちゃうし、それに x がマイナスだと距離じゃないし。

生徒Ｄ：……
生徒Ｃ：右辺に x があると、今までみたいにはいかないみたいだね。
教　師：数直線で考えようとすると、なかなか難しいようですね。どうして難しいのでしょうか？②は数直線に表すことができて、③は数直線に表しにくいとすると、どこに違いがあるのでしょうか。その違いを考え、どうすれば、解決できるか、ワークシートに書いてみましょう。

②と③の違いが、右辺に x を含むか、含まないかであることはすぐに気付いた。そこで、その違いが、なぜ、数直線に表すことを困難にしているか考えさせた。そこでは、「距離を表す数字に分からない文字 x が含まれているから、距離を示すことができない。」という意見が出された。そこで、では、どうすれば解決できるかを考えさせた。なかなかアイディアは浮かばなかったようであったので、「数直線（図形的意味）にとらわれず、絶対値の定義に戻って考える」ことを助言した。多くの生徒は忘れていたが、ある生徒から「場合分け」をすることが提案され、他の生徒も思い出したようである。

この後、ワークシート No3 を配付し、「絶対値を含む方程式が難しい理由」「どうすれば解決できるか」について、先ほどの議論を基に生徒自身の言葉で記入させた。難しい理由としては、

- 絶対値の記号があるから
- 数直線で表すことができるときとできないときがあるから

といった理由が挙げられた。
また、その解決策としては、

- 数直線に表す
- 絶対値記号を、場合分けをしてはずす

といった方法が挙げられた。

理由と解決策を発表させ、質問を受けた後に３つの方程式 $|x| = 3$ …①、$|x-2| = 3$ …②、$|x-2| = 3x$ …③ を、場合分けを用いた解法で取り組ませた。
①はワークシートの穴埋め、②は黒板で生徒とやりとりをしながら取り組ませ、得られた解答がワークシート No2 と一致することを確認した。

［方程式③の生徒の解答］

(i) $x \geqq 2$ のとき
$x-2=3x$
$-2x=2$
$x=-1$
これは $x \geqq 2$ をみたさない

(ii) $x<2$
$-(x-2)=3x$
$-x+2=3x$
$-4x=-2$
$x=\frac{1}{2}$
これは $x<2$ をみたす

③は時間をとって自由に取り組ませた。①、②の直後だったこともあり、生徒は比較的スムーズに解決することができた。x≧2 のとき、③は条件に適さない解が出てくることを、見落としている生徒が何人かいたため、補足をした。

また、③については、数直線上に表せないことから、定義を用いて解くことの可能性についての議論はなされなかった。そこで、場合分けを用いた解法を確認した後に、次のような定義を用いた解法について紹介し、方程式の図形的意味について確認させた。

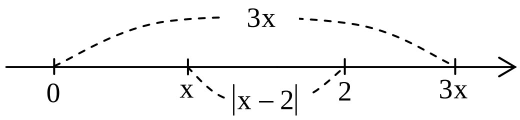
［方程式③の定義を用いた解答］

$|x-2| \geqq 0$ であるから、$x \geqq 0$ である。

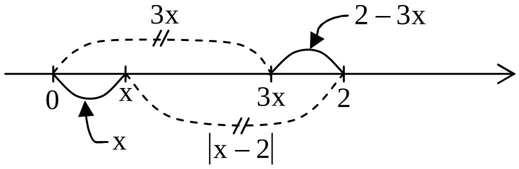
$|x-2|$ は数直線上で 2 から x までの距離、3x は数直線上で原点から 3x までの距離であるから、数直線上で 3x が 2 の右側にあるときには、$|x-2| = 3x$ を満たさない。

3x が 2 の左側にあるとき、右図より $x = 2-3x$ が成り立つから、$x = \dfrac{1}{2}$

［3x が 2 の右側にあるとき］



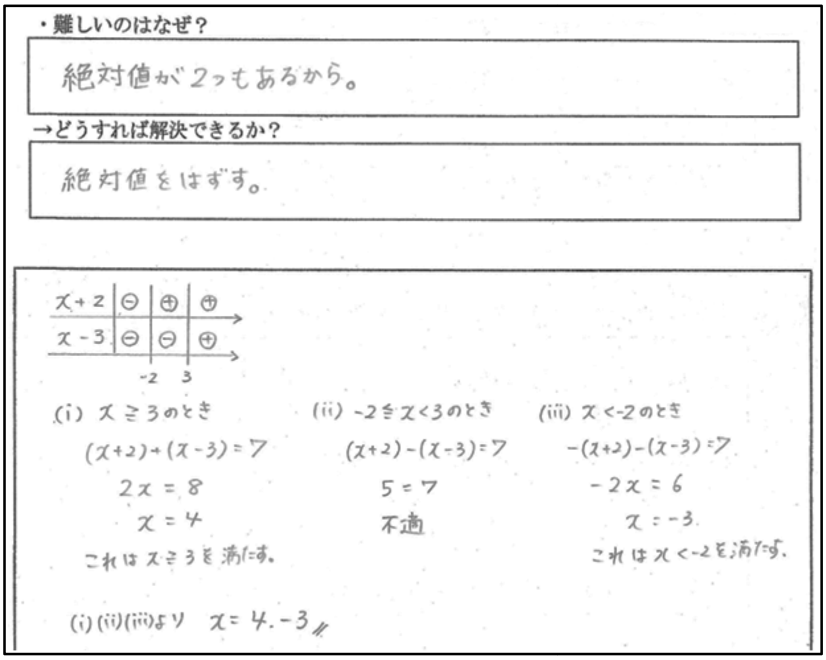
［3x が 2 の左側にあるとき］



続いて、方程式 $|x+2|+|x-3| = 7$ …④ に取り組ませた。

絶対値記号が２つあるため、生徒は若干とまどっていたが、先ほどと同様に「方程式④が難しい理由」「どうすれば解決できるか」を考えさせてから、問題に取り組ませた。生徒とのやりとりの中で、場合分けを用いればよいことがすぐに出てきたので、２つの絶対値をはずす手順に注意させながら、解答を導かせた。

［方程式④の生徒の解答］



・難しいのはなぜ？

絶対値が2つもあるから。

→どうすれば解決できるか？

絶対値をはずす。

$x+2$	⊖	⊕	⊕
$x-3$	⊖	⊖	⊕
		−2	3

(i) $x \geqq 3$ のとき

$(x+2)+(x-3)=7$

$2x = 8$

$x = 4$

これは $x \geqq 3$ を満たす。

(ii) $-2 \leqq x < 3$ のとき

$(x+2)-(x-3)=7$

$5 = 7$

不適

(iii) $x < -2$ のとき

$-(x+2)-(x-3)=7$

$-2x = 6$

$x = -3$

これは $x < -2$ を満たす。

(i)(ii)(iii)より $x = 4, -3$

また、定義を用いた解法について生徒に問いかけたところ、$|x+2|+|x-3|$ が数直線上で−2 から x までの距離と、3 から x までの距離の和であることまでは答えられたが、それを数直線上に表現することはできなかった。そこで以下のような解法に触れ、定義を用いても解けることを理解させた。

［方程式④の定義を用いた解答］

$|x+2|+|x-3|$ は、数直線上で x から−2 までの距離と、x から 3 までの距離の和である。

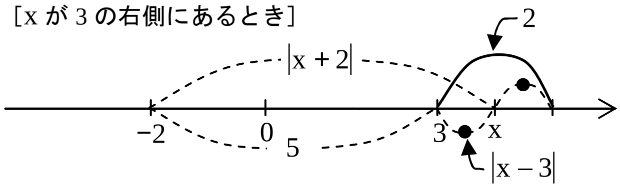
−2 から 3 までの距離は 5 であるから、④が成り立つとき、x は−2 と 3 の間にはない。

x が 3 の右側にあるとき、右図より 3 から x までの距離は 1 であるから $x = 4$

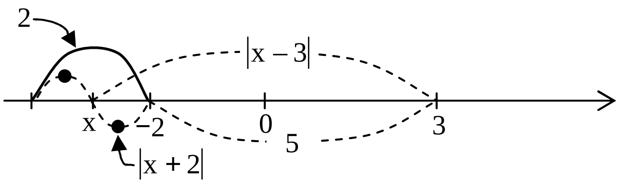
x が−2 の左側にあるとき、右図より、−2 から x までの距離は 1 であるから $x = -3$

ゆえに　$x = -3，4$

［x が 3 の右側にあるとき］



［x が−2 の左側にあるとき］



授業の終わりに、定義を用いた解法（ワークシート No2）のよさと、場合分けを用いた解法（ワークシート No3）のよさを記入させた。

定義を用いることのよさは「計算量が少なくてすむ」「場合分けの計算方法を知らなくても図をかけば解ける」、場合分けを用いることのよさは「同じ解き方でできる」「数直線で考えるのは難しいときもある」などと書いていた。それぞれの解法のよさを実感できていたようである。

「定義を用いることのよさ」の記入例

計算の仕方を覚えてなくても
数直線だけですぐに出来る。
計算をしないで数直線で
簡単に答えられるから。
・わかりやすい
・ケアレスミスが減る。

「場合分けを用いることのよさ」の記入例

同じ解き方でできるから.
場合分けをしないと逆にめんどくさくなるから
わざわざ答え方をかえなくてすむから。
いちいち数直線で書くのがめんどくさいし、
場合わけの方が正確にできるから

4　授業後の検証

(1) 小テストの結果から

不等式まで指導した後、絶対値を含む方程式・不等式の小テストを実施した。テスト問題と集計結果は以下のとおりである。

［小テストの結果（実施人数 31 人）］

問題	定義		場合分け	
	正解	不正解	正解	不正解
①　$\lvert x+3\rvert=2$	8(25.8%)	1(3.2%)	21(67.7%)	1(3.2%)
②　$\lvert x+2\rvert+\lvert x-3\rvert=9$	0(0%)	0(0%)	30(96.8%)	1(3.2%)
③　$\lvert x-4\rvert<1$	13(41.9%)	1(3.2%)	15(48.4%)	2(6.5%)
④　$\lvert x+1\rvert+\lvert x-2\rvert>5$	0(0%)	0(0%)	29(93.5%)	2(6.5%)

４題全体での正答率は 93.5%と高く、学習内容の理解度は良好な結果といえる。

解法の選択では、場合分けによる方法で解いた生徒は①が 71%、③が 55%であり、依然として場合分けによる解法を好んでいる結果であった。しかし、定義による方法で解いた生徒がそれぞれ 29%、45%いたことは、大きな成果であったと言える。以前であれば、ほぼ全ての生徒が場合分けによる方法で解いていたが、少なくともこれらの生徒は絶対値の意味や絶対値を含む方程式の意味を理解し、納得することができていたようである。また、小テスト終了後に、場合分けによる方法で解いていた生徒に聞き取り調査をしたところ、「何となく意味は分かるけど、やっぱり、１つのパターンで問題を解いたほうが楽。」と回答する生徒がいた。その生徒に、絶対値を含む方程式の意味を確認したところ、数直線上に表すことができ、解も求めることができた。絶対値の意味を理解はしているが、それでもやはり、「１つのパターンで解く」ことにこだわる生徒の意識を変えることが、これからは重要となる。

(2) 振り返りシートの結果から

振り返りシートの集計結果は次のとおりである。

［振り返りシートの集計結果（実施人数 31 人）］

質問項目	あてはまる	ややあてはまる	あまりあてはまらない	あてはまらない
①「絶対値の意味」が理解できた。	18(58.1%)	13(41.9%)	0(0%)	0(0%)
②「絶対値を含む式の意味」が理解できた。	12(38.7%)	19(61.3%)	0(0%)	0(0%)
③式の意味を「言葉で表現して確認する」ことは、理解を深めることに役立つ。	11(35.5%)	17(54.8%)	3(9.7%)	0(0%)
④式の意味を「数直線上に表して確認する」ことは、理解を深めるのに役立つ。	16(51.6%)	14(45.2%)	1(3.2%)	0(0%)
⑤絶対値を含む方程式・不等式の「定義を用いた解法」が理解できた。	9(29.0%)	18(58.1%)	4(12.9%)	0(0%)
⑥絶対値を含む方程式・不等式の「場合分けをする解法」が理解できた。	13(41.9%)	18(58.1%)	0(0%)	0(0%)
⑦「定義を用いた方法」と「場合分けをする解法」のそれぞれのよさが理解できた。	16(51.6%)	13(41.9%)	2(6.5%)	0(0%)

⑧今日の授業を通して分かったことを書いてください。（主な記述）

＜問題の意味を理解し、解決に役立った＞

・絶対値の意味が分かったから、問題をただ解くだけよりも、理解しながら問題がとけた。
・いつもは意味が理解できず、やり方だけを覚えていたけど、今日の授業は意味も理解できたし、やり方もよく分かった。
・今までは解き方だけを覚えて解いていたけど、言葉で意味を理解することで、定義と場合分けのそれぞれのよさが理解できた。
・定義と場合分けのそれぞれのいい所が理解できた。定義、場合分けの区別が分かった。

＜解法の意味が分かった＞

・場合分けをする意味が分かった。なぜ場合分けをするのか、考え方を変えることができた。
・意味から考え、絵をかいて問題を解くと分かりやすかったことです。

＜その他＞

・絶対値記号をとにかくはずせば、難しい問題でないことが分かった。
・２つの方法があったが、自分は場合分けが一番やりやすいことが分かった。

事前のアンケート結果では、絶対値の意味、解き方の意味を理解し、納得している生徒は少なかったが、振り返りシートのアンケート結果を見ると、大きく改善していることが分かる。①、②、⑤、⑥の結果を見ると、絶対値の意味、方程式・不等式の解法については、定義を用いた解法を除いて、全ての生徒が、「理解できた」、「ほぼ理解できた」と回答した。定義を用いた解法については、$|x-2|=3x$ 、$|x+2|+|x-3|=7$ についても扱ったためか、４名の生徒が「あまり理解できなかった」と回答した。これらの式の扱いについては、式の見方を豊かにするために扱ったが、その結果、理解の妨げになってしまったのではないかと考えられる。

また、③、④の結果を見ると、全ての生徒が、言葉で表現し確認すること、数直線上に表して確認することが理解を深めることに役立つと回答した。これは、理解がさらに深まり、納得している状況を示していると考えられる。それは、自由記述の記述内容を見ても読み取れる。「絶対値の意味が分かったから、問題をただ解くだけよりも、理解しながら問題がとけた。」、「いつもは意味が理解できず、やり方だけを覚えていたけど、今日の授業は意味も理解できたし、やり方もよく分かった。」という回答からは、解法を覚えるのではなく、解法を理解し、納得し、解決するこ

とができた生徒の内面が示されている。

さらに、自由記述で、「今までは解き方だけを覚えて解いていたけど、言葉で意味を理解することで、定義と場合分けのそれぞれのよさが理解できた」、「定義と場合分けのそれぞれのいい所が理解できた。定義、場合分けの区別が分かった」と記述した生徒は、理解し、納得した上で、解法のよさを味わうことで、数学のおもしろさを実感していることがうかがえる。問題を解けるだけではなく、様々な解法のよさを味わうことができる感性を磨くことが、数学のおもしろさを実感するためには、必要なことだと感じた。

一方で、「絶対値記号をとにかくはずせば、難しい問題でないことが分かった」、「２つの方法があったが、自分は場合分けが一番やりやすいことが分かった」と回答する生徒もいた。また、小テストでも、全ての問題を場合分けして解いている生徒もいた。これらの生徒については、あきらめることなく、継続して、学習内容が納得できるように、おもしろさを実感できるように工夫をしていくことが大切である。

５　実践を振り返って

今回の取組では、定義や式の意味を理解し、納得させることに重点を置き、折に触れて絶対値の定義を振り返りつつ、式の意味を言葉や数直線で確認させることで理解と納得を深めさせる展開とした。また、２つの方程式の違いを考えさせたり、２通りの解法のよさを考えさせたりする場面では、生徒たち同士で意見交換を行わせた。これにより、絶対値の定義や式の意味について授業中に「分かった！」「簡単だ！」と発言したり、うなずいたりするなど、納得した表情を浮かべる生徒が普段の授業より多かった。

また、$|x-2|=3x$ や $|x+2|+|x-3|=7$ など、普段は定義との関係を考察しない問題について、数直線上での式の意味を表現させた。このことにより、戸惑いを感じてしまった生徒もいたが、多くの生徒にとって、式には意味があることを実感させることができ、その結果、式の見方をより豊かにさせることができたと考えられる。

一方的に定理や解法を説明し、生徒たちがただ受け身的に問題を繰り返し解きながら解法を身に付けていくだけの学習では、学習内容を理解させ、納得させ、そして、おもしろさを実感させることはできない。生徒たちに考えさせながら定義や式の意味の理解を深め、納得させていくことが重要である。そして、納得することで、数学のよさを味わうことができ、数学を学ぶおもしろさを実感することにつながっていき、さらに、反復練習による定着も容易になる。

生徒に数学の学習内容を理解させ、納得させ、おもしろさを実感させるためには、以下のことに留意することが重要である。

- 授業の場面で、生徒に「何を考えさせるのか」、「どのように考えさせるのか」を明確にすること
- 教材を精選し、授業の中で生徒が考える場面、そして、その考えを述べる場面を適切に設定すること

今回の取組だけでは、納得まで至らず、おもしろさを感じられない生徒も存在した。数時間の取組では、全ての生徒が納得し、おもしろさを感じられるとは限らない。あらゆる分野の学習において、理解させ、納得させ、その上で、おもしろさを実感させることができる授業を展開していくことが重要となる。

事例２　「鈍角の三角比」の理解を深め、納得を促す指導の工夫

１　事例の概要

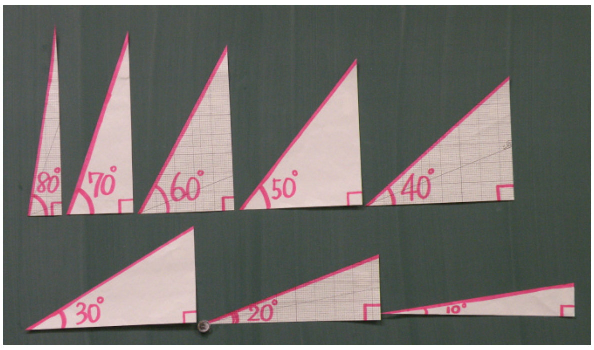
研究協力委員が勤務する学校の第２学年の生徒を対象に、数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの「理解度」、「納得度」、「おもしろさ」について調査したところ、三角比の内容について右の表のような結果が得られた。

「図形と計量」の学習内容	解き方が分かった	納得できた	おもしろかった
鋭角の三角比と三角比の相互関係	74.5	73.4	56.5
鈍角の三角比	**70.1**	**67.9**	**51.6**
正弦定理・余弦定理とその応用	75.5	72.8	62.0
三角形の面積	71.7	71.2	56.0

（数字は％、回答者 184 名）

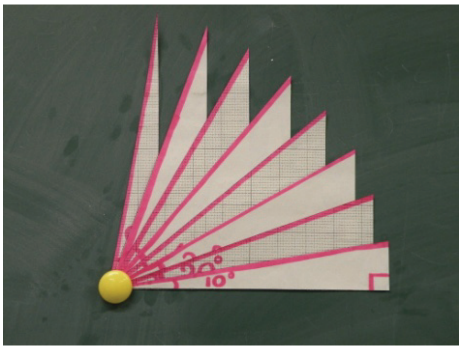
これによると、「鈍角の三角比」は他の内容に比べて「理解度」、「納得度」、「おもしろさ」とも低い数値を示している。この理由として、教科書では、鋭角の三角比は直角三角形を用いて定義をするが、鈍角の三角比は直角三角形から離れて座標を用いて定義をするという、具体的な定義から抽象的な定義に拡張され、その結び付きが理解できず、納得できないということがあげられる。そして、そのことによって三角比に対する関心も薄れ、意味が分からずにその定義を覚え、解法を覚えていたに過ぎず、それがおもしろさにもつながらなかったのではないかと考えられる。

そこで今回の取組では、数学Ⅱで三角関数を学習することを念頭におきつつ、鋭角の三角比を定義した後に、教具を用いて鈍角の三角比や 360°までの三角関数の定義へと自然に拡張することで、理解と納得を深め、さらにおもしろさを実感できるような授業展開の工夫に取り組んだ。



直角三角形による鋭角の三角比の定義

一般化



座標（円）による鈍角の三角比の定義

２　指導計画

(1)　単元「三角比」の学習計画

①　単元の目標

直角三角形における三角比の意味、それを鈍角まで拡張する意義及び三角比の基本的な性質について理解し、角の大きさを用いた計量の考えの有用性を認識できるようにする。

② 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
A1 直角三角形の辺の比と角との間の関係に関心を持つ。 A2 鈍角の三角比に関心を持ち、座標平面を利用することの意味を考えようとする。 A3 三角比の相互関係に関心を持ち、図や表を用いて調べようとする。	B1 図形の相似の考え方を用いて、直角三角形の辺の比を角との関係でとらえることができる。 B2 鋭角の三角比を､座標を用いて鈍角に拡張することについて考察することができる。 B3 三角比の相互関係について考察することができる。	C1 直角三角形や座標平面を用いて、三角比の値を求めることができる。 C2 １つの三角比の値が与えられているとき、他の三角比の値を求めることができる。 C3 座標平面を用いて､三角方程式・不等式を解くことができる。	D1 三角比の意味を理解している。 D2 鋭角の三角比を鈍角の三角比に拡張する意義を理解している。 D3 90°－θの三角比とθの三角比の関係を理解している。 D4 三角比の相互関係について、基礎的な知識を身に付けている。

③ 単元の指導計画

時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準
1 時間目	○鋭角の三角比の定義	相似な直角三角形は、三角形の大きさにかかわらず比の値が等しいことから、三角比の定義ができることに気付かせる。	A1, B1, C1
2 時間目 **（実践例）**	○円を用いた三角比の定義	角を連続的に変化させることにより、円の存在に気付かせる。	A2, B2
3，4 時間目	○180°－θの三角比 ○360°－θの三角比 ○90°－θの三角比	単位円の中で、点の対称性からその性質に気付かせる。	C1, C2, D1, D2 D3
5 時間目	○三角比の相互関係	単位円を用いてその性質に気付かせる。また、三角比は互いに関連していることを理解させる。	A3, B3
6 時間目	○三角方程式 ○三角不等式	単位円を用いて、方程式・不等式の解を視覚的に明らかにしながら解決を図る。	C3

(2) 2 時間目　「円を用いた三角比の定義」の学習計画

① 目標

鋭角の三角比を座標を用いて鈍角に拡張することの意味を考察することができる。

② 指導計画

指導内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） ・前時の学習内容の確認	30°，45°，60°の三角比の値を求めよ。	・ワークシートに記入させる。 ・前時の学習内容を確認しながら答え合わせをする。

（展開）
・鈍角の三角比の考え方の理解

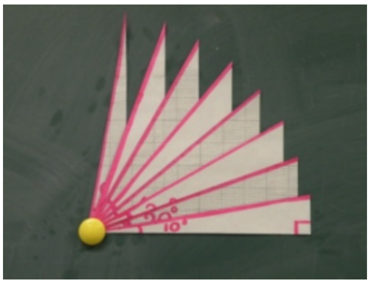
> 直角三角形の辺と角の比から三角比を考えた。しかし、角度には、鋭角だけではなく 90°以上の角も存在する。しかし、90°以上の角を持つ直角三角形は存在しない。したがって、直角三角形の辺の長さを利用して三角比の値は求められない。
> では、90°以上の角でも三角比の値が求められるように、別の方法で定義し直せないだろうか。

［質問１］・sin30°と sin45°の大小は？

発問	予想される生徒の反応
これらの大小はどうやって比べるか。	分母をそろえる
分母をそろえるということは、どの部分の長さをそろえたということか。	斜辺
斜辺の長さを変えてしまっても大丈夫か。	三角比は大きさに関係ない

・前時に学習した内容を思い出させながら、考えさせる。
・三角比の値の意味を図形的にとらえさせる

［提示］斜辺を揃えた 10°ごとの直角三角形を見ていこう。

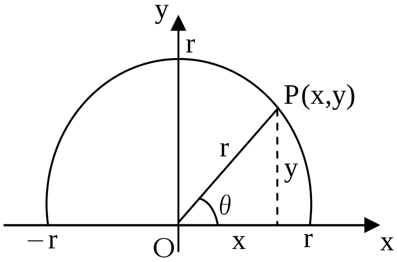


・各三角形の底辺を揃えて重ねて貼る。また、各三角形の頂点が集まるところを磁石で押さえることで、磁石が中心で、点Ｐが円周上にあるように見せる。

［質問２］斜辺を揃えたことで、どんなことが分かるか？
【予想される生徒の反応】
・Ｐが円を描く
・sin は高さの比較，cos は底辺の比較
・x 座標は小さくなり、y 座標は大きくなる

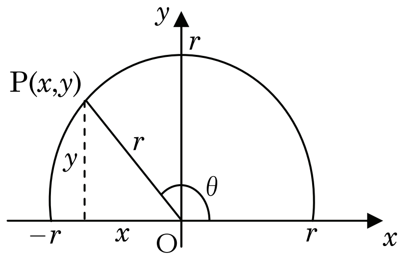
・質問２のあとは、友人と話し合わせ、多様な考えが出るようにする。
・気付かないときは、「点Ｐはどんな線を描くか」という発問を追加する。

［提示］点Ｐが移動すると角 θ も変化するから、円を使って三角比を表してみよう。
(1)　θ が鋭角のとき



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

・どこに直角三角形が出来るのかを意識させる。
・半径と、点 P の x,y 座標で三角比が求められることを意識させる。
・角は反時計回りに大きくなることを確認する。

	(2)　θ が鈍角のとき 	・点 P の位置で角 θ もただ１つ定まるので、鋭角と同じように鈍角の三角比が定義できることを、120°の三角比を例にして示す。 ・座標で考えているので、底辺部分は負の数であることを強調する。 ・鋭角の場合と同様、どこに直角三角形が出来るのかを意識させる。
・主要な角の三角比を求める	0°～180°の主要な角の三角比を求めよう。 ［課題１］30°，45°，60°の三角比を求める。 ［課題２］120°の三角比を求める。 ［課題３］135°，150°の三角比を求める。 ［課題４］0°，90°，180°の三角比を求める。	・半径 r の円に、3 つの直角三角形を色分けしてかく。 ・60°の直角三角形と対称であることを理解させる。 ・座標で考えるので、底辺の長さに相当する値が負であることに注意させる。 ・120°の場合と同様に求めさせる。 ・分母が 0 の場合は考えないことを確認し、tan90°の値はないことを理解させる。
（まとめ） ・本時のまとめ	次のことを確認する。 「１つの円の周上の点Ｐの座標を考えれば、いろいろな角度の三角比を表すことが出来る!!」 ［課題］0°～180°の三角比を求めるテスト	・主要な角の三角比はすべて覚えるのではなく、鋭角の場合の求め方を覚えておいて、鈍角は x 座標に気をつければよいことを理解させる。 ・隣の生徒同士で問題を出し合う。

③　教材

○　ワークシート

○　30°，45°，60°の三角比の表

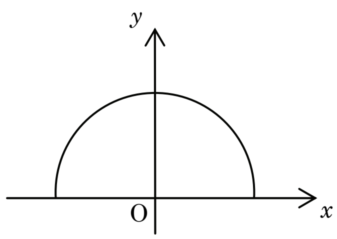
	30°	45°	60°
直角三角形			
$\sin\theta$			
$\cos\theta$			
$\tan\theta$			

○　座標を用いた三角比の定義

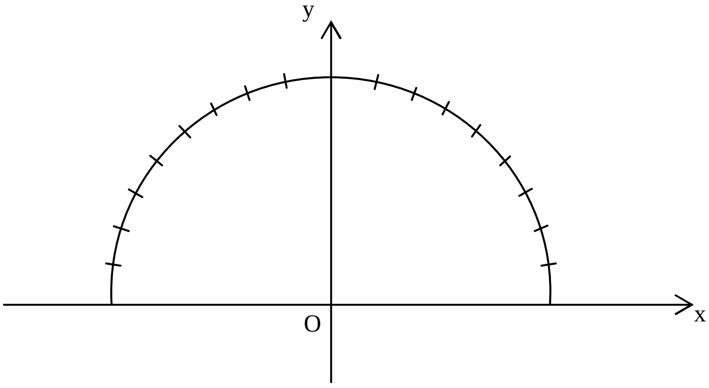
半径 r の円周上の点 P(x, y)をとる。

OP と x 軸の正の方向とのなす角 θ について

$\sin\theta =$　　　，$\cos\theta =$　　　，$\tan\theta =$

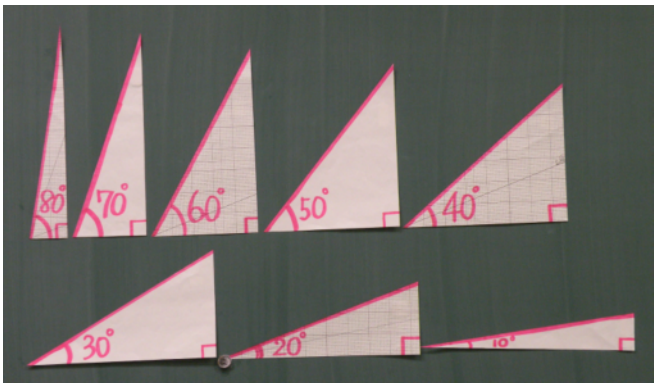


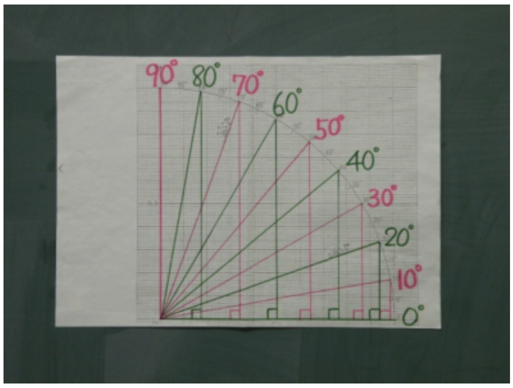
○　$0° \leqq \theta \leqq 180°$の三角比の表



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

○　教具





３　授業記録

ワークシートを配付し、2 分程度で「30°，45°，60°の三角比の表」に取り組ませた。
その後、全体で確認しながら答え合わせをしたところ、ほぼ全員が正しい値を求めていた。

次に、三角比と円との関係を見いださせる準備を行った。以下は、そのときの生徒とのやりとりである。

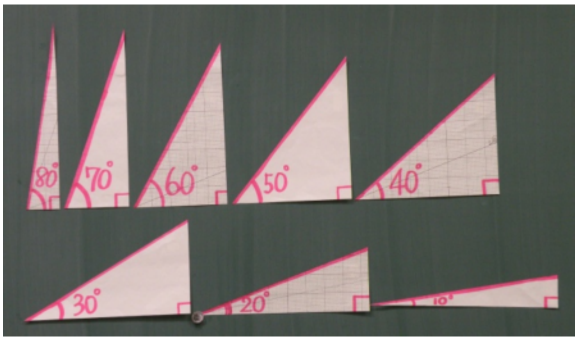
教　師：今、30°と 45°と 60°の直角三角形をかいて、三角比を求めてもらいました。ここで質問です。sin30°と sin45°とでは、どちらの値が大きいですか？
生徒Ａ：sin45°です。
教　師：それはどうしてですか？
生徒Ｂ：sin45°の値を有理化すると $\frac{\sqrt{2}}{2}$ だから、それぞれの分子を比べて、sin45°の方が大きいです。

教　師：そうですね。ところで、有理化をすると分母の値が$\sqrt{2}$から 2 に変わりますね。これは直角三角形のどこが変化した、と見ることができますか？
生徒Ｃ：斜辺です。
教　師：そうですね。ということは、斜辺の長さを$\sqrt{2}$から 2 に拡大させた、ということになりますけど、拡大させてしまっていいのですか？
生徒Ｄ：いいです。
教　師：いい！？　どうしてですか？
生徒Ｅ：sin は辺の比だからです。
教　師：そうですね。角の大きさが一緒であれば、三角形の大きさは関係ない、ということを前回勉強しましたね。
sin45°の値を有理化することによって、sin30°と sin45°と sin60°は分母が 2 という一定の値になりましたが、これは斜辺の長さを一定にしたと考えることができますね。

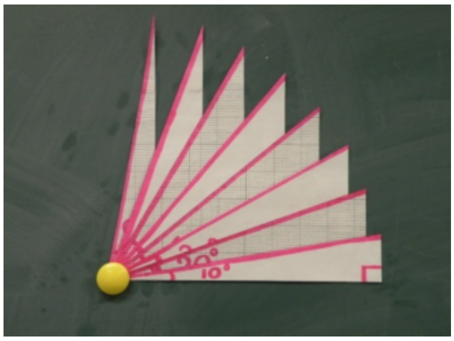
このようなやりとりにより、斜辺の長さが一定な直角三角形を考えてもよい、ということを確認した。ここでは、分母を同じ値にすることは、図形的には直角三角形の斜辺の長さを揃えたことを意味するという、図形的な解釈を意識させた。

次に、直角三角形から円や座標を見いだした。以下はそのときの生徒とのやりとりである。

教　師：ここに、今考えた 30°と 45°と 60°以外に、10°から 80°まで 10°ごとの直角三角形を用意しました。もちろん、斜辺の長さが同じ直角三角形です。（図１）。この直角三角形を 80°から順番に重ねて貼っていきます。頂点が重なっているところを磁石で押さえておきましょう。
皆さん、どうですか？（図２）



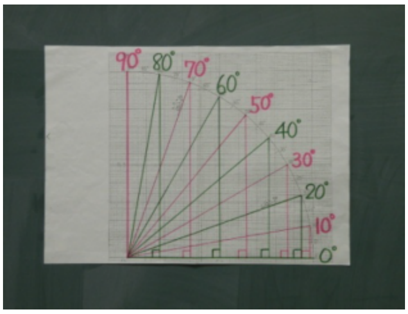
［図１］



［図２］

生徒Ｆ：すごいきれい…
教　師：この図を見て気付いたことを近くの人たちと話し合ってみてください。
（生徒たちの話し合い）
教　師：では、気付いたこととか、思ったことを発表してみてください。
生徒Ｇ：磁石を中心とすると、頂点が円を描いています。
教　師：確かにそう見えますね。でも、本当に円になっているのかな？
生　徒：……
教　師：円というのはどんな図形ですか？
生徒Ｇ：中心があって、半径があって、丸い形。

教　師：確かにそうですね。丸い形だね。しかし、それを数学的に言うと、１点からの距離が等しい点の集まりということができます。その１点のことを「中心」といいます。等しい距離を「半径」といいます。
さて、頂点は円を描いていますか？
生徒Ｈ：円になっています！
教　師：なぜ？
生徒Ｉ：直角三角形の斜辺の長さが全て同じだから、それが半径になっています！
教　師：Ｉさんが言ったことですけど、この図（図３）を見てください。この図を見ると、貼り付けた直角三角形は、この図から切り取ったものだと分かりますね。なので、最初にＧさんが言ってくれたように、斜辺を半径とする円になりますね。斜辺の長さが同じ直角三角形を重ねることで、円が見えてきました。



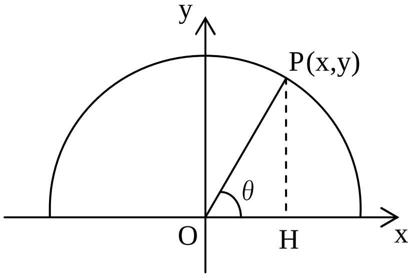
［図３］

教　師：他に気付いたことはありますか？
生徒Ｊ：角が大きくなると、高さが高くなっていきます。
生徒Ｋ：底辺は、角が大きくなると短くなります。
教　師：いいところに気付きましたね。高さは上下、つまり縦方向に動きます。底辺は左右、つまり横方向に動きます。角度の変化を縦方向と横方向の動きで表せるわけですね。
ところで、縦とか横の位置を表す方法って、これまでの学習では何を利用していましたっけ？
生徒Ｌ：座標…ですか？
教　師：そうです！座標を利用していましたね。

生徒から出てくる意見によっては、「頂点はどんな曲線を描いているか」という発問により、円を見いださせることを考えていたが、生徒たちは［**図２**］から円を見いだすことができていた。
また、角度の変化と底辺や高さの変化を結び付けて考えることができた生徒がいたので、それを取り上げることにより、三角比と座標との関係に気付かせることができた。

これらの意見を基に、以下のように三角比を座標で定義し直した。

教　師：皆さんから意見の出た「円」と「座標」を利用して三角比を考えてみましょう。プリントの「座標を用いた三角比の定義」のところを見てください。
さっき直角三角形を重ねたときに、磁石で押さえたところを原点にします。それと、底辺を x 軸上に置きますね。点 P の座標を(x，y)とします。
そうすると、いつも作っている直角三角形はこんな図（図４）になりますね。



［図４］

直角三角形の底辺と点 P はどんな関係にありますか？
生徒Ｍ：底辺は点 P の x 座標です。
教　師：そうですね。同じように、高さと点 P の関係は何でしょう？

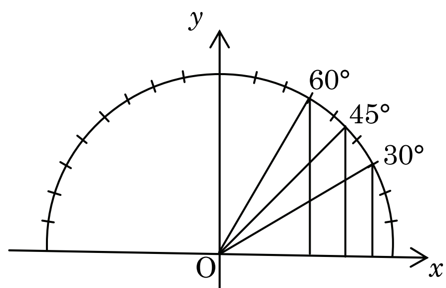
教　師：そうですね。斜辺、すなわち半径を r とすると、OP の長さは r になります。したがって、$\sin\theta$ は？

生徒O：$\dfrac{y}{r}$ です。

教　師：$\cos\theta$ と $\tan\theta$ は？

生徒P：$\cos\theta$ は $\dfrac{x}{r}$ で、$\tan\theta$ は $\dfrac{y}{x}$ です。

教　師：つまり、点 P の座標と円の半径を使って、三角比が表せそうですね。さて、授業の最初に、「90°以上の三角比の値を求められるようにしたい」と述べました。今定義したことを使うと、90°以上の三角比の値を求めることができるでしょうか。例えば、120°の三角比はどうでしょう。その前にまず、ワークシートに 30°、45°、60°の直角三角形をかいて、これらの三角比の値を求めてみましょう（図５）。できましたか？



［図５］

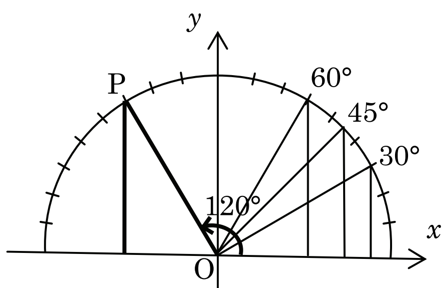
生徒Q：直角三角形のときと同じ値になりました。

教　師：そうですね。直角三角形で定義したときと同じ値になりましたか。全く別のことをしているわけではなく、直角三角形の辺の長さを座標に置きかえて定義し直しただけなので、これらの角の三角比は、当然、同じ値になりますね。したがって、今回の定義は、今までのことも使えると言うことです。そして、この定義であれば、120°の三角比の値を求められそうではないですか?

ところで、角を大きくすると、点 P は円周上をどの方向に動きますか？

生徒Q：左回りです。

教　師：そうですね。反時計回りともいいます。では、角を大きくしていって、120°になったときの点 P の位置をワークシートにかいてみてください。すると、点 P は第２象限にきますね。黒板の図（図６）のようになりましたか？



［図６］

生徒Ｒ：あとは点 P の座標が分かればいいんだ！

教　師：そうですね。θ が鈍角だと、今までみたいに直角三角形はかけないけれど、直角三角形の底辺や高さを、点 P の x 座標や y 座標と考えれば、鈍角でも三角比を定義できるのです。しかも、定義の仕方は鋭角の場合と一緒です。

その後、120°は 60°と y 軸に関して対称であることを利用して、120°の三角比を求めた。120°のときは点 P の x 座標が負であることを見落とした生徒もいたが、補足説明をすることによりすぐに理解でき、135°、150°の三角比も求めることができた。

さらに、点 P の座標を考えることにより、0°、90°、180°の三角比を求めることができた。

4　アンケートによる授業評価

授業後に、理解度及び授業の感想を記入させた。実施人数は 2 クラス 66 名である。

○　理解度「鈍角の三角比の定義が分かりましたか」

理解度	よく分かった	だいたい分かった	少し分からない	分からない
人数(割合)	29(43.9%)	32(48.5%)	5(7.6%)	0(0%)

○　授業の主な感想

座標を使うと鋭角も鈍角も考え方が同じなのが驚きだった。0°, 90°, 180°はないものをあるものとするので、難しかった。

鋭角も鈍角も同じように求められるのが予想外でした。x軸が負になるのを注意したい。

座標をつかって三角比を表す方が図が頭に入って分かりやすい。

三角比を円を用いて考えることで分かりやすくなることがよく分かりました。鋭角と鈍角での規則を利用することですばやく計算できることも分かりました。

斜辺の長さを固定して円の上で三角比の定義を考えるのは、なるほどと思った。鈍角のときは鋭角のときの三角形をひっくり返して使えることが分かった。

円にのっけて考えていくなんて画期的だと思いました

三角比と円が密接な関係だったことに驚いた。180°よりも大きくなるとどうなるのか知りたいと思った。

図形の世界にマイナスの符号が出てくるとは思わなかったので驚いた。

θ>180°になったらどうなるのか疑問に思った。

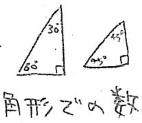
9割以上の生徒が「よく分かった、分かった」としていることから、生徒たちは座標による三角比の定義を自然なものとして受け入れていると考えられる。しかも、授業の感想からは、「鋭角の場合と鈍角の場合は同じ考え方であることが分かった」、「斜辺の長さを固定して円の上で三角比の定義を考えるのは、なるほどと思った」と記述しているように、納得をして定義を受け入れていることが分かる。また、「円を用いることで、三角比が分かりやすくなる」「円を用いる考え方がおもしろかった」、「図形の世界に負の数が出てくるところがおもしろい」という記述が多く見られ、数学のおもしろさにも触れることができたようである。さらに、本時は 180°までの三角比の求め方についての授業だったが、「θ＞180°になったらどうなるのか疑問に思った。」という記述のように、180°より大きい角の三角比に興味を持つ生徒も見られるなど、数学の学習に対する意欲も喚起することができた。

また、単元終了後、「三角比を円を用いて定義することについて、どう思うか」について記入させたところ、以下のような回答が見られた

・　「三角比に対する見方が広がった」と記述した例

「三角」比というので三角形の話かと思っていたら

見方を変えることによってどんどん幅が広がっていくのがすごいと思った。

今回は  の三角形を利用しての数値しかみてないけど、

他の三角形での数値や規則性についても興味をもった。

30°，45°，60°の三角形のつながり的なものを発見できた感じがして，
より三角比を理解することができたと思った。一つ一つの三角形を別々に
教えてもらうよりも，このようにつながりがあって，sin，cos の大きさの関係もわかっ
て，いいと思った。

・　「三角比の値や性質が分かりやすくなった」と記述した例

一つ一つ丸覚えするのではなくて，鋭角の三角形を覚えて
後は，＋，－だけ気をつけておけばよいというのは，覚えやす
いと思います。
また，図を書くことで同じ三角形を見つけるのが楽でした。
一つ一つを頭の中で考えるのは難しいけど，頭の中で図を
描いて考えようとすれば，何度もやるうちにできるようになる
と思います。

座標の上で教わったので，（cosθ，sinθ）の符号の関係が
わかりやすかった。円を描かずに「斜辺ぶんの高さ」というよ
うにやっていたらこんがらがっていたと思う。

公式の意味が，式を見ただけだとさっぱり分からなかったけど，
円を使って考えるとスムーズに考えることができた。

・　「他の学習内容との結び付きが分かった」と記述した例

円を用いると，三角比のとり方が分かりやすかったです。
座標への符号のつき方が２次関数の「x軸につい
て対称なグラフ」「y軸について対称なグラフ」など
と同じで，面白いと思いました。

sin(180°−θ) = sinθ が等しくなることや
90°までの三角比の表で360°まで分かることが
すごいと思いました。
2次関数のときに習った第1象限などの考え方が
生きました。

「三角比の定義に円を導入することで、三角比に対する見方が広がった」「円周上に図示をすることによって、三角比の値や性質が分かりやすくなった」「座標平面で三角比を考えることによって、２次関数との関連も見えてきて、過去に学んだことが生かされた」などの回答があり、鈍角の三角比の定義を学ぶことによって、生徒たちは数学の奥深さを感じ、数学のおもしろさが実感できたようである。また、１つ１つの直角三角形がつながることで、関数としての考え方の一端を感じるこ

とができたようである。これは、三角比（数学Ⅰ）と三角関数（数学Ⅱ）をつなげる教材としても、有効であることが分かった。

5　実践を振り返って

鋭角の三角比の定義では直角三角形を用いるのに対し、鈍角の三角比は唐突に半円が登場し、座標を用いることに生徒は違和感を覚えていたはずである。中学校までの学習では、図形は多角形や円、立体であり、それを座標を用いて解析することはない。鈍角の三角比の定義は、初めて図形を座標平面上で解析する場面でもある。その違和感を少しでも解消し、納得させることが、おもしろさを味わわせることにもつながる。そして、数学Ⅱの「三角関数」、「図形と方程式」の学習への橋渡しともなる。

今回の取組では、斜辺の長さが等しい直角三角形をいくつか用いて、１つ１つの図形をつなげ、図形の変化を連続的にとらえることによって、頂点の軌跡が円であることを生徒は容易に理解することができた。同時に、角度の変化に伴う底辺や高さの動きも把握できたので、その気付きを生かすことによって、座標平面を見いだすことができ、自然に鈍角の三角比の定義を理解し、納得することができた。これらのことが、見方を変えることのおもしろさ、他の学習内容との結び付きといった数学のおもしろさを実感させることにつながった。単元終了後の生徒の感想から、「見方を変えることによって、どんどん幅が広がっていくのがすごいと思った」、「円を用いると、三角比の取り方が分かりやすかった。座標への符号のつき方が２次関数の『x 軸について対称なグラフ』など同じで、おもしろいと思った。」といったものが得られたことからも分かる。

生徒の理解と納得を得るためには、教科書に書かれていることを分かりやすく説明するだけでは足りない場面がある。生徒の気付きとそれを生かすことが理解と納得を得るためには重要である。生徒の気付きを得るためには、仕掛けが必要であり、今回は教具を用いた。抽象的な内容であるからこそ、具体的なものをつなぎ合わせることで、気付きを得、理解と納得に結び付けることができた。そして、理解と納得から、数学のおもしろさを実感させることができた。

しかし、実際に鈍角の三角比の値を求める段階では、「$\cos\theta$ や $\tan\theta$ は負の数である」ということに戸惑いを感じている生徒も見られた。今後、他の学習の場面でも、今回と同じように、生徒の気付きを生かし、理解と納得を深めさせることで、学習内容のつながりを実感させ、数学のおもしろさに気付かせていく必要がある。

事例３　「整数」の理解を深め、納得を促す指導の工夫

1　事例の概要

(1) 小学校、中学校、高等学校における「整数」の扱いについて

数の概念についての理解を深める学習については、小学校では、第４学年までに整数についての四則計算の意味や四則計算に関して成り立つ交換法則、結合法則、分配法則などを取り扱い、その定着と活用を図り、第５、６学年では、その四則計算に関して成り立つ性質について、小数や分数の計算でも成り立つことを調べ、理解を深めている。また、小学校では、自然数の性質について、偶数、奇数、約数、倍数、最大公約数、最小公倍数という観点から学習している。さらに、約数を調べる過程で、素数にも触れている。

新学習指導要領における整数に関する学習の流れ

小学校

第４学年まで
- 整数の意味と表し方
- 整数の加減乗除
- 整数の四則計算の定着と活用
  （交換法則、結合法則、分配法則についての理解）

第５、６学年
- 整数の性質（偶数と奇数、約数と倍数、最大公約数、最小公倍数、素数）
- 小数や分数の四則計算の定着と活用
  （交換法則、結合法則、分配法則についての理解）

↓

中学校

第１学年
- 数の拡張（正の数・負の数）
- 文字を用いた式

第２学年
- 文字を用いた式で表したり読み取ったりすること

第３学年
- 数の拡張（平方根、有理数・無理数）
- 素因数分解

↓

高等学校

数学Ⅰ
- 数と集合（実数）

数学Ⅱ
- 二項定理
- 数の拡張（複素数）

数学Ａ
- 整数の性質（約数と倍数、ユークリッドの互除法、整数の性質と応用）

中学校では、小学校で学んだ数について、より数学的な視点から見直し、自然数、整数、有理数、無理数と数の範囲を拡張し、数を統一的に見られるようにして数についての理解を深める。第１、２学年では、文字を用いた式の学習を通して、数量の関係や法則などを文字を用いた式で表すこと、さらに、その関係を説明する能力、式の意味を読み取る能力の育成も図られている。特に、整数の性質に関しては、整数を表す文字 m，n を用いて、偶数、奇数や倍数を表したり、その式の意味を考えたりする学習が行われている。また、第３学年では、自然数を素因数分解することを取り扱い、素数でない数は、その約数であるいくつかの素数の積で表すことができ、その表し方はただ一通りに決まることを学習する。

高等学校では、今回の改訂で、数学Ａにおいて「整数の性質」として扱うことになった。ここでは、「整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする」ことを目標に、約数と倍数、ユークリッドの互除法、整数の性質の活用について学習する。指導に当たっては、整数に関するいろいろな性質を生徒に見いださせ、それが成り立つ理由を考えさせて説明させるなどの活動に重点を置くこととしている。

現行の学習指導要領のもとでは、「数」についての学習は、具体的にものの個数を数えたり、順序を表したりすることから始まり、四則計算の規則とその性質を計算する中で実感し、さらに、他の学習内容とかかわりながら、自然数から整数、有理数、無理数、実数、複素数へと数の範囲

を拡張し、理解を深めてきた。しかし、その学習は、高等学校においてまとまりとして触れることがなかったので、曖昧な理解にとどまることが多く、発展的な学習としての整数を扱う問題を苦手としている生徒が多かったと考えられる。今回の改訂において、数学Aに整数に関する学習が単元として扱われることにより、「数」について、小学校以来学習してきたことを、高校生の視点から見直し、体系化することで、理解を深めさせ、数学のおもしろさを実感させる契機になると考えられる。

(2) 実践への取組

今回の取組では、整数の性質に関する基本的な考え方を高校生の視点から見直し、現行の学習指導要領で示されている学習内容をもとにして１つの単元として取り上げ、整数についての理解を深め、その性質を事象の考察に活用できるようにすることを目標とした。

事例では、「整数解、自然数解を持つ方程式」の解法を考察することを通して、整数の基本的な性質の理解を深め、その学習内容を用いて、既習事項である「二項定理（場合の数）」、「反復試行の確率（確率）」を整数の視点から教材化し、互いに関連させながら扱えるようにした。教材は、生徒が理解しにくい内容から選び、さらに、１つ１つの問題を解決することで、次の問題へのアプローチになるように設定した。そのことで、整数についての理解が深まるとともに、それぞれの学習内容の納得へとつながると考えた。授業では、ワークシートを活用するとともに、グループ学習、個人演習、一斉授業等の学習形態を適宜取り入れることで、考える視点を豊かにするなど、思考の深まりを促すことを目指した。

整数の性質の理解を深め、関心を高めるための指導の流れ

整数の性質〈１～３時間目〉
・整数解、自然数解をもつ方程式
（不定方程式の整数解）

場合の数への活用１〈４時間目〉
・二項定理による式の展開
・多項定理による式の展開

場合の数への活用２〈５時間目〉
・重複組合せの考え方
・重複組合せの応用

確率への活用〈６～７時間目〉
・反復試行の確率の考え方
・反復試行の確率の応用

2　指導計画

(1) 全体計画

① 単元の目標

整数の性質に関する基本的な考え方の理解を深め、その性質を事象の考察に活用することができる。

② 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
A1 整数の性質を考察する楽しさを感じている。 A2 二項定理や多項定理の有用性を理解し、考え方を具体的な事象に活用しようとする。 A3 重複組合せの考え方を具体的な事象に活用しようとする。 A4 反復試行の確率の考え方を具体的な事象に活用しようとする。	B1 条件に当てはまる整数をもれなく重複なく数えるなど、整数の性質を活用して考察することができる。 B2 方程式が整数解をもつとき、因数分解や解の公式などを用いて考察することができる。 B3 全ての整数について考察するのではなく、条件を満たす範囲内で考察することができる。	C1 問題場面を的確に理解し、文字を用いて立式することができる。 C2 重複組合せを式や図などで表現することができる。	D1 整数を素因数に分解することの有効性を理解している。 D2 二項定理、多項定理について理解している。 D3 重複組合せについて理解している。 D4 反復試行について理解している。

③ 単元の指導計画

時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準
1時間目	【整数の性質①】 整数の性質の理解 ○因数分解を用いた不定方程式の解法 ○根号が整数となる条件 ○整数のとりうる値の範囲 学習プリント1	○文字を用いた考察と、値を代入することのよさや大切さに気付かせる。 ○整数のとりうる値の範囲を考察させる際に、因数分解、約数、倍数の考え方が有効であることを実感させる。	B1, B2, D1
2,3時間目 **（実践例）**	【整数の性質②】 整数の性質の理解 ○一次不定方程式の整数解 ワークシート 2-1～2-6	○グループ学習による考察、考察の結果の発表、発表者への質問によって、理解を促す。 ○整数のとりうる値を考える際に、範囲の絞り込みの考え方が十分活用できるようにさせる。	A1, B3, C1
4時間目	【場合の数への応用①】 ○二項定理、多項定理による式の展開 ワークシート 3-1～3-3	○類推によって、二項定理の一般化を促す。 ○必要な項の係数のみを求めればよいことに気付かせ、題意の明確化を図る。	A2, D2
5時間目	【場合の数への応用②】 ○重複組合せの考え方 ○重複組合せの応用 ワークシート 4-1～4-3	○様々な問題場面が重複組合せの考えを用いて考察できることに気付かせる。	A3, C2, D3

6,7 時間目	【確率への応用】 ○反復試行の確率の考え方 ○反復試行の確率の応用 ワークシート 5-1～5-3	○なるべく文字を用いて考察させることにより、表現力を向上させる。 ○ランダムウォークでは、動きの範囲や周期性にも着目できるようにする。	A4, C1, D4

③　学習プリント、ワークシート

ア）学習プリント１

学習プリント１　Theme【整数】

１年____組______番　氏名________________________

１－１　(1)　$4x^2+10x-y^2-y+6$ を因数分解せよ。

hint【x についての２次式と考え、$-(y^2+y-6)$ を因数分解した上で全体を因数分解】

(2)　$4x^2+10x-y^2-y=0$ を満たす整数$(x,\ y)$をすべて求めよ。

hint【(1)を利用して、(2)の両辺に 6 を加えて因数分解

6 は$(\pm1)\times(\pm6)$，$(\pm6)\times(\pm1)$，$(\pm2)\times(\pm3)$，$(\pm3)\times(\pm2)$】

１－２　(1)　$xy=3x-2y+12$ が成り立つような自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。

hint【$xy-3x+2y-6=6$ と変形して、左辺を因数分解】

(2)　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ が成り立つような自然数の組をすべて求めよ。ただし $x≧y$ とする。

hint【両辺に $6xy$ をかけて、(1)と同様に解く】

１－３　(1)　$\sqrt{384-12n}$ が整数となるような自然数 n の値をすべて求めよ。

hint【$384-12n=12(32-n)$ として、右辺が(整数)^2 となるように n を決定】

(2)　$\sqrt{n^2+99}$ が整数となるような自然数の値をすべて求めよ。

hint【(1)と同様の解法では n の値の範囲を特定できない。$m=\sqrt{\ }$とし、両辺を２乗】

１－４　(1)　２次方程式 $x^2+ax+a^2+2a=0$ が実数解をもつような整数 a の値を求めよ。

hint【判別式を利用しての値の範囲を限定】

(2)　２次方程式 $x^2+ax+a^2+2a=0$ が整数解をもつような整数 a の値を求めよ。

hint【(1)を利用して、具体的に a の値を代入して整数解をもつ方程式を作る】

１－５　大小２個のさいころを投げたとき，大きいさいころの出た目の数を m，小さいさいころの出た目の数を n として，２次関数 $f(x)=x^2+2mx+n$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつ整数 m，n を求めよ。

hint【判別式を利用して、実数解をもつ条件を求め、整数 m，n の値を代入して特定】

(2)　方程式 $f(x)=0$ が整数解をもつ整数 m，n を求めよ。

hint【(1)の結果を参考に、解の公式を利用して、整数 m，n の値を代入して特定】

１－６　ある商品が、小の箱に３個、大の箱に８個入っている。この店では箱を空けてばらにして１つずつ売ることができないという。したがって、個数によっては注文に応じることができないときがある。このとき次の問に答えよ。

(1)　20 個以下で注文に応じられない個数を全てあげよ。

hint【小の箱を m 個、大の箱を n 個として式を立て、値を代入】

(2)　店主はある個数以上の注文であれば常に注文に応じることができると言っているが、それは本当か。正しい場合にはその個数と理由を述べよ。正しくない場合でも、その理由を述べよ。

hint【Let's try without hints!】

イ）ワークシート２－１～２－６

整数問題学習ワークシート　２－１　　　　　　１年＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(1)　$2x+3y=20$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。		(2)　$x+2y+4z=10$ を満たす自然数(x,y,z)の組をすべて求めよ。	
解答	大切と思うところ	解答	大切と思うところ

問題を解くためのポイントは？	問題を解くためのポイントは？

内容はよく分かりましたか。１～５の数字を記入してください。　→　(1)《　　》　(2)《　　》

１よく分かった　２少し分かった　３どちらともいえない　４あまり分からなかった　５分からなかった

※　同様に、以下の問題でワークシート２－２～２－６を作成した。

２－２　(1)　$4x+3y=55$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。
　　　　(2)　$4x-3y=55$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。
２－３　(1)　$4x=9y$ を満たす整数$(x,\ y)$の組を、整数 k を用いて表せ。
　　　　(2)　$4x-9y=50$ を満たす整数解の１つは$(8,\ -2)$である。このことを用いて、方程式を満たす整数$(x,\ y)$の組を、整数 k を用いて表せ。
２－４　(1)　２－３の(2)の方法を用いて、$2x+3y=17$ を満たす整数(x,y)の組を、整数 k を用いて表せ。
　　　　(2)　２つの方程式 $x+y+z=10$，$4x+2y+z=25$ を満たす整数(x,y,z)の組をすべて求めよ。
２－５　(1)　$x,\ y$ は自然数とし、$x<y$ とする。$2x+3y=40$ を満たす整数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。
　　　　(2)　$x,\ y,\ z$ は自然数とし、$x<y<z$ とする。$x+y+z=8$ を満たす整数$(x,\ y,\ z)$の組をすべて求めよ。
２－６　２人でじゃんけんをして、勝った場合は階段を２段登り、あいこの場合は１段登り、負けた場合は１段下がることにする。全部で 20 回じゃんけんを行ったとき、ちょうど 20 段目まで登ったという。このときのじゃんけんに勝った回数を求めよ。

ウ）ワークシート３－１～３－３、４－１～４－３、５－１～５－２で扱った問題

３－１　(1)　$(2a+3b)^5$ の展開式における a^3b^2，b^5 の係数を求めよ。
　　　　(2)　$(2a+3b)^5$ の展開式におけるすべての項を求めよ。また、それらの項の特徴を述べよ。
　　　　(3)　$(a+b)^n$ の展開式を作ろう。
３－２　(1)　$(a+2b+3c)^5$ の展開式における a^2bc^2，a^4c の係数を求めよ。
　　　　(2)　$(a+2b+3c)^5$ の展開式におけるすべての項を求めよ。また、それらの項の特徴を述べよ。
　　　　(3)　$(a+b+c)^n$ の展開式を作ろう。
３－３　(1)　$(3x-2)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。
　　　　(2)　$\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。
　　　　(3)　$(x^2+2x+3)^4$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。

４－１　なしと桃が沢山ある。これらから合計 12 個の果物を組み合わせてかごに詰める。
(1)　含まれない果物があってもよいとするとき、詰め方は何通りあるか。
(2)　どの果物も最低 1 個は詰めるとするとき、詰め方は何通りあるか。

４－２　なしと桃とりんごが沢山ある。これらから合計 12 個の果物を組み合わせてかごに詰める。
(1)　含まれない果物があってもよいとするとき、詰め方は何通りあるか。
(2)　どの果物も最低 1 個は詰めるとするとき、詰め方は何通りあるか。

４－３　りんご 9 個を 3 人に分ける。
(1)　受け取らない人がいてもよいものとするとき、何通りの分け方があるか。
(2)　受け取らない人がいてはいけないとするとき、何通りの分け方があるか。
(3)　誰もが最低 2 個は受け取るとするとき、何通りの分け方があるか。

５－１　(1)　A，B の２人でじゃんけんを 4 回行う。A が 3 回勝つ確率を求めよ。
(2)　動点 P が正五角形 ABCDE の頂点 A から出発して周上を動くものとする。さいころを投げて 1,2,3,4 ならば左回りに 2 動き、5,6 が出れば左回りに 1 動くとする。3 回投げて点 P が A に到達する確率を求めよ。
(3)　数直線の原点に 1 つの粒子がある。単位時間内に粒子が右へ 1 目盛動く確率は $\frac{2}{3}$，左へ 1 目盛動く確率は $\frac{1}{3}$ である。5 単位時間後での粒子の位置の座標を X とするとき，次の確率を求めよ。
①X=5　②X=3　③X=0

５－２　(1)　２人でじゃんけんをして、勝った場合は階段を２段登り、あいこの場合は１段登り、負けた場合は１段下がることにする。全部で６回じゃんけんを行ったとき、ちょうど８段目まで登る確率を求めよ。
(2)　数直線の原点に 1 つの粒子がある。単位時間内に粒子が右へ 1 目盛動く確率は $\frac{1}{2}$、そこに止まっている確率は $\frac{1}{3}$、左へ 1 目盛動く確率は $\frac{1}{6}$ である。5 単位時間後での粒子の位置の座標を X とするとき，次の確率を求めよ。
①X=5　②X=3　③X=0
(3)　動点 P が正五角形 ABCDE の頂点 A から出発して周上を動くものとする。さいころを投げて偶数ならば左回りに 1 動き、奇数ならば右回りに 1 動くとする。
①3 回投げて点 P が E に到達する確率を求めよ。
②4 回投げて点 P が B に到達する確率を求めよ。
③9 回投げて点 P が A に到達する確率を求めよ。

(2) 2，3 時間目　【整数の性質②】の学習計画

①　１時間目【整数の性質①】の学習内容

「学習プリント１」を事前に配付し、課題とした。取り組んだ結果を提出させた後、代表生徒の解答を印刷して生徒に配付した。

授業では次の点を中心に展開した。

・因数分解を用いた不定方程式の解法（問題１－１、１－２）
・根号が整数となる条件（問題１－３）
・不等式を用いた整数のとりうる値の範囲の考察（問題１－４～１－６）

② 2, 3 時間目の目標と指導計画

ア）目標

整数の性質に関する基本的な考え方を理解できるようにさせるとともに、簡単な一次不定方程式が解けるようにさせる。

イ）指導計画

指導内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） ・前時の復習	・前時の学習内容の確認をする。	
（展開） ・一次不定方程式の解法の理解	・一次不定方程式の解法を考えよう。 (1)ワークシート2-1～2-3 ①2-1(1)，2-1(1)，2-3(1)の解法の理解 ②2-1(2)，2-1(2)，2-3(2)の解決 ○グループ学習による解法の検討 ○グループの代表による発表 ○質疑 (2) ワークシート2-4～2-6 ①2-4(1)，2-5(1)の解法の理解 ②2-4(2)，2-5(2)，2-6の解決 ○グループ学習による解法の検討 ○グループの代表による発表 ○質疑	・グループ学習ではグループごとに１問ずつ割り当てる。 ・グループ内のすべての生徒が意見を出し合い、議論を深めるよう促す。 ・2-2(2)について、気付きにくいときは 2-3(2)を参考にするよう助言する。 ・2-6 について、気付きにくいときは「勝ち」「あいこ」「負け」の回数をx,y,z とおいて立式するよう助言する。 ・発表に対して、積極的に質問させるなどして、議論を深めるようにさせる。
（まとめ） ・学習事項のまとめ	・整数問題の解法のポイントをまとめる。	・それぞれの解法のポイントを生徒自身の言葉で表現させる。

３　2、3 時間目の授業記録

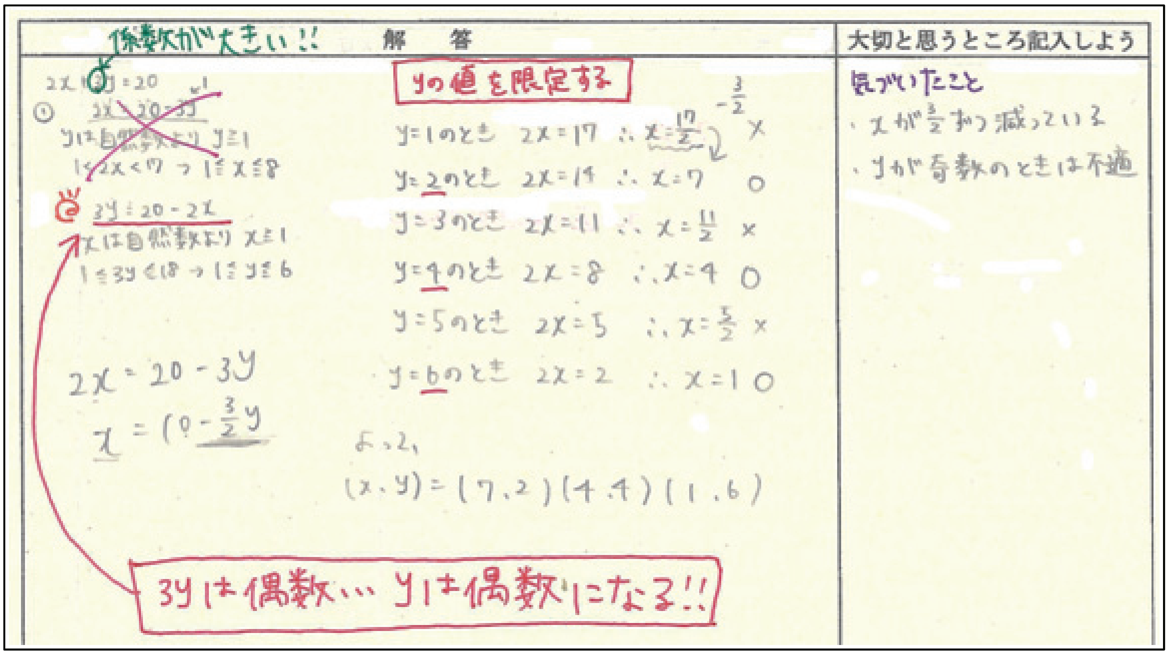
前時の学習内容の確認後、ワークシート２－１～２－３を配付し、２－１(1)、２－２(1)、２－３(1)の検討から始めた。

○２－１(1)　 $2x+3y=20$ を満たす自然数（x, y）の組をすべて求めよ。

x または y の範囲を絞り込むために、どのようにすればよいか発問をしたところ、与えられた式の変形から、「$2x=20-3y$ であるから $1\leqq y\leqq 6$ である」という生徒からの発言があった。$3y=20-2x$ から $1\leqq x\leqq 8$ であることを補足することにより、係数が大きい y の範囲を絞り込む方が効果的であることに気付かせた。その後、$y=1,2,\cdots,6$ のそれぞれの値について、x の値を求め、条件に適するかどうか検討した。

また、$y=1,2,\cdots,6$ のそれぞれの値に対する x の値を見て気付くことは何か、発問したところ、「x が $\frac{3}{2}$ ずつ減っている」「y が奇数の時は不適になる」という発言があった。それぞれ理由を尋ねたところ、「$x=-\frac{3}{2}y+10$ だから x は $\frac{3}{2}$ ずつ減る」、「$2x+3y=20$ で、2x と 20 が偶数だから、y は偶数でなければならない」といった意見が出され、１次関数の知識や、偶数・奇数の性質を確認することができた。与えられた式から「y は偶数である」ことを生徒から引き出すことができ、気付くことができなかった生徒も納得したようだ。

［２－１(1)の生徒の解答の例］



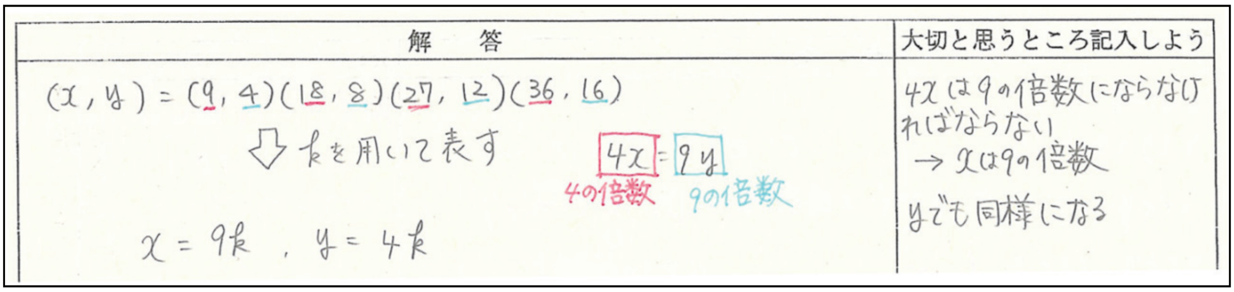
○２－２(1)　$4x+3y=55$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。

生徒たちは２－１(1)と同じように解決することができる問題であることに気付き、係数の大きい x の範囲を絞り込んだ後、x のそれぞれの値に対する y の値を求め、条件に適するか検討していた。

○２－３(1)　$4x=9y$ を満たす整数$(x,\ y)$の組を、整数 k を用いて表せ。

まず、この方程式を満たす整数$(x,\ y)$の組の例は何か、発問した。生徒からは、すぐに(9, 4)と返ってきた。他の解はなかなか気付かなかったが、辛抱強く待ち、(18, 8)、(27, 12)などの解に気付いた生徒が現れ、他の生徒も納得していた。そして、このことで、与えられた方程式の解が無限にあること、x は９の倍数で y は４の倍数であることを納得することができた。９の倍数は $9k$、４の倍数は $4k$ と表現できることを確認し、解答を導くことができた。

［２－３(1)の生徒の解答の例］



次に、２－１(2)、２－２(2)、２－３(2)をグループで考えるよう指示した。グループごとに問題を指定し、５分程度、個人で問題に取り組ませた後、グループで解法を検討させた。

以下は、グループでの話し合いの様子の一部である。

○２－１(2)　$x+2y+4z=10$ を満たす自然数(x，y，z)の組をすべて求めよ。

［２－１⑵を話し合ったグループの様子］

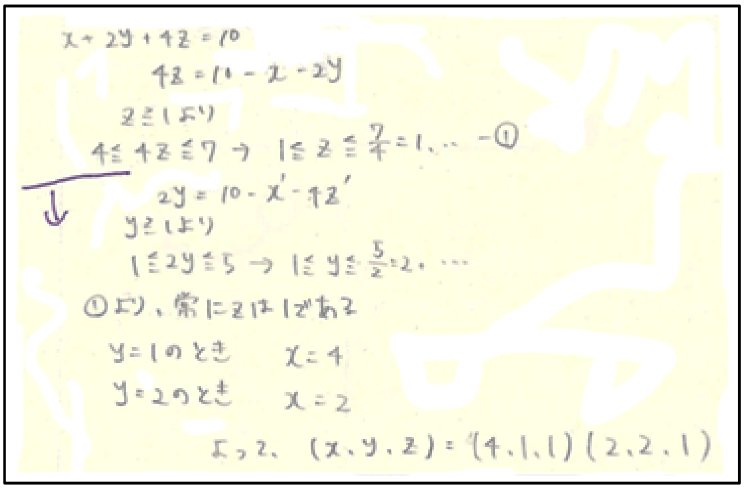
生徒Ａ：３つも文字があるのに、式は１つしかな～い！
生徒Ｂ：でも、（２－１の）(1)と形は同じだから、同じように解けるよね。
生徒Ｃ：とりあえず、係数の一番大きいｚから絞り込んでいくんだね。

$4z=10-x-2y$ だから、$4z \leqq 7$、$1 \leqq z \leqq \dfrac{7}{4}$ だから……、z は 1 だけなのか！

生徒Ａ：ほんとだ～
生徒Ｂ：z が 1 だから、方程式に代入すると $x+2y=6$ 。あとは(1)と同じだね。

このグループは教師の助言なしに、解にたどり着くことができた。右は、このグループの生徒の解答である。

［２－１⑵を話し合ったグループの解答］


$x+2y+4z=10$
$4z=10-x-2y$
$z \geqq 1$より
$4 \leqq 4z \leqq 7 \rightarrow 1 \leqq z \leqq \frac{7}{4}=1.\cdots$ －①
$2y=10-x-4z$
$y \geqq 1$より
$1 \leqq 2y \leqq 5 \rightarrow 1 \leqq y \leqq \frac{5}{2}=2.\cdots$
①より、常にzは1である
$y=1$のとき　$x=4$
$y=2$のとき　$x=2$
よって、$(x,y,z)=(4,1,1)(2,2,1)$

○２－２(2)　$4x-3y=55$ を満たす自然数(x，y)の組をすべて求めよ。

［２－２⑵を話し合ったグループの様子］

生徒Ｄ：（２－２の）(1)と同じようにして、$4x=3y+55$ だから …… y は奇数だな。
　$y=1$ のとき、$4x=58$ だからだめで、
　$y=3$ のとき、$4x=64$ だから $x=16$ で、
　$y=5$ のとき、$4x=70$ だからだめで、
　$y=7$ のとき、$4x=76$ だから $x=19$ で、……
　これだめだ。これ、ず～っと続く。
生徒Ｅ：どうするんだこれ?
教　師：どうした？
生徒Ｄ：さっきは $55-3y$ だったから範囲が決まったけど、今度は足し算だから範囲が決まらないので、解がいっぱい出てきてしまうんです。
教　師：なるほど。範囲が限定できないから、$y=1,3,5$ と永遠と続いてしまうわけだね。さて、その場合、どうする？
生徒Ｄ：諦める…
教　師：諦める！？
生徒Ｅ：文字で表せばいいんじゃない。
教　師：何を？

生徒Ｆ：そうか、２－３(1)みたいに x、y を k で表せばいいんだ！
教　師：よく気が付きましたね！２－３(2)がヒントになるから、まずそっちを考えてみてください。

このグループは、まず方程式の形から y が奇数であることに気付いたが、その後、解が無数に存在することに困ってしまった。そこで、困ってしまった原因に気付かせ、方程式の解は無数にあり、それを文字を用いて表すことに気付かせた。

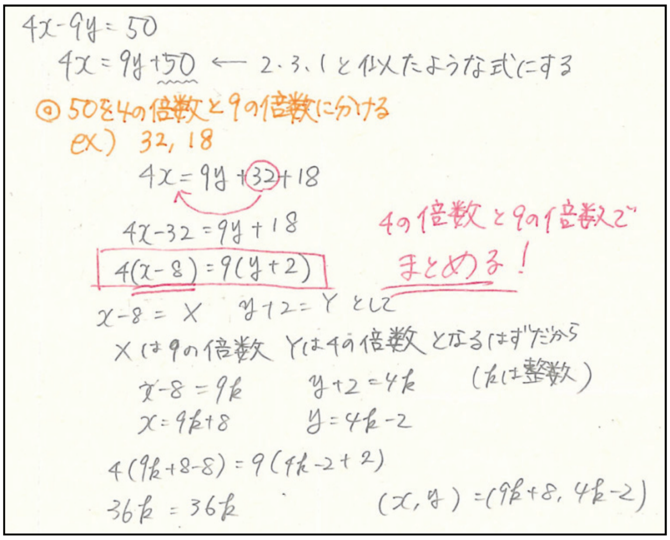
○２－３(2)　$4x-9y=50$ を満たす整数解の１つは$(8,\ -2)$である。このことを用いて、方程式を満たす整数$(x,\ y)$の組を、k を用いて表せ。

［２－３(2)を話し合ったグループの様子］

生徒Ｇ：（２－３の）(1)みたいに４の倍数と９の倍数を使えばいいんだろうけど……
生徒Ｈ：$4x=9y+50$ だから、y は偶数だね。
生徒Ｉ：でも、偶数全部が答えっていう訳じゃないよね。y が４だと、x は整数にならないし。
生徒Ｊ：問題文の「$(8,\ -2)$が整数解の１つ」っていうのは、たぶんヒントだと思うんだけど。
生徒Ｋ：とりあえず、式に代入してみるか。$4\times 8-9\times(-2)=50$。確かに 32 と 18 を足せば 50 だけど……
教　師：そうだね。32 と 18 を足せば 50 になりますね。32 と 18 を足せば 50 になることを上手く使えないかな。
生徒Ｌ：そうか、32 と 18 は、それぞれ４の倍数と９の倍数だから、50 を 32 と 18 と考えて、$4x$ と $9y$ のところに振り分けてあげれば、カッコでくくれるよ。
教　師：なるほど。いい感じだね。
生徒Ｍ：あ、そうか！ $4x-32=9y+18$ だから $4(x-8)=9(y+2)$ になって、（２－３の）(1)と同じ形だ！
生徒Ｎ：だから $x-8=9k$、$y+2=4k$ になるから $x=9k+8$、$y=4k-2$ だ！

このグループはなかなか解決の糸口が見えてこなかった。そこで、２－３(1)の形に気付くように、得られた数値を上手に使わせるように助言をした。しかし、生徒が自ら解決できたと思えるように助言を与えすぎないことが重要である。

［２－３(2)を話し合ったグループの解答］



グループである程度解答を導き出せた段階で、その解法を代表生徒に発表させた。生徒たちは、代表生徒の説明を熱心に聞いていた。

２－３(2)で、代表生徒が「50 を、例えば 32 と 18 のように、4 の倍数と 9 の倍数に分ける。次に式を 4 の倍数と 9 の倍数でまとめて、２－３(1)を使うと $x = 9k + 8$， $y = 4k - 2$ という答えが出る」と説明したところ、次のような質問が生徒から出た。

「50 を 4 の倍数と 9 の倍数に分ける方法は 32 と 18 以外にも、例えば–4 と 54 がある。このとき、答えの形（$x = 9k - 1$， $y = 4k - 6$）が違う」

代表生徒は対応に窮していたので、教師の方で、答えの見た目は違うが本質的には同じ答えであり、どちらの答えも正しいことを補足した。

その後、ワークシート２－４～２－６を配付した。２－４(1)、２－５(1)を全員で検討し、残りの問題については、同じようにグループで解法を検討させ、代表生徒に発表させた。

ワークシート２－１～２－３と同様に、生徒たちはこれまでの学習を振り返りながら、問題に熱心に取り組み、発表していた。

4　授業後の検証

授業後、振り返りシートを用いた意識の調査と、ワークシート２－１～２－６の各設問の理解度に関して調査を行った。結果は以下のとおりである。

［振り返りシートの結果（実施人数 39 人)］

１　整数の性質について理解することができましたか。

理解できた	ほぼ理解できた	あまり理解できなかった	理解できなかった
27 (69.2%)	12(30.8%)	0(0%)	0(0%)

２　今回学んだ整数の問題を解けるようになったと思いますか。

そう思う	ややそう思う	あまりそう思わない	そう思わない
5(12.8%)	33(84.6%)	1(2.6%)	0(0%)

３　今回グループに分けて考察しましたが、考えは深まりましたか。

深まった	少し深まった	あまり深まらなかった	深まらなかった
17(43.6%)	21(53.8%)	1(2.6%)	0(0%)

４　今回グループに分けて考察しましたが、今後も取り入れて欲しいですか。

多く取り入れて欲しい	少し取り入れて欲しい	あまり取り入れて欲しくない	取り入れて欲しくない
16(41.0%)	21(53.8%)	2(5.1%)	0(0%)

［各設問の理解度に関する調査結果（実施人数 36 人)］

		よく分かった	だいたい分かった	どちらともいえない	あまり分からなかった	分からなかった
２－１	(1)	33(91.7%)	3(8.3%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	33(91.7%)	3(8.3%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－２	(1)	31(86.1%)	5(13.9%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	20(55.6%)	13(36.1%)	2(5.6%)	1(2.8%)	0(0%)
２－３	(1)	30(88.3%)	6(16.7%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	30(88.3%)	6(16.7%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－４	(1)	28(77.8%)	8(22.2%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	26(72.2%)	10(27.8%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－５	(1)	22(61.1%)	12(33.3%)	2(5.6%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	22(61.1%)	14(38.9%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－６		23(63.9%)	8(22.2%)	3(8.3%)	0(0%)	0(0%)

整数の性質についての理解は、全ての生徒が「理解できた、ほぼ理解できた」と回答した。様々な問題に取り組みながら、倍数や約数について改めて考える場面を設定したので、多くの生徒が整数の性質についての理解が深まったと考えられる。また、それは、グループでの取組についての回答からもうかがえるように、一人で考えるだけではなく、グループで話し合うことで、様々な角度から問題の解法を検討できたことも理解を深めることに役立っていた。

「整数の問題を解けるようになったと思いますか」という質問に対しては、「ややそう思う」と回答した生徒が８割を超えたものの、「そう思う」と回答した生徒は１割程度にとどまった。各設問の理解度からも、問題が難しくなるにつれて、理解度が下がってくることから、まだまだ自信を持って取り組むことができないということが感じられる。

授業後の振り返りシートには、授業の感想を自由記述として記入させた。その記述内容は、次のとおりであった。

今日の授業の感想を述べてください。（主な意見のみ）

＜考え方が身に付いた＞

・これをやって、考える力がついてきたと思う。
・初めて見たときは、どう考えたらいいのか分からない問題が多かったが、今までの考え方を使って解けることが分かった。

＜整数の範囲について＞

・値の範囲の求め方がよくわかり、値が限定できるようになったので、少し得意になったと思った。
・整数の問題で学んだ値の範囲の限定の仕方は今まで苦手だったが、授業でどうしてその範囲に限定できるのかの理由がよく分かった。

＜解けるようになった＞

・普段やらないような問題や少し難しい問題を解くことができてとてもよかった。
・授業を受ける前は、どうやって解けばいいか分からなくて、ペンが動かなかったけど、授業が進むにしたがって、だんだんと分かるようになってきた。

＜まだまだ心配＞

・問題文からの式の立て方をもう少し詳しく知りたい。
・整数の問題の解法はよく分かったが、もう一度一人で解けるか心配。

＜グループでの学習について＞

・いつもと違ってクラスの友達が説明したり、話し合ったりするのがよかった。
・（発表者に）分からないところを聞いたり、その解説を聞いたりしたら分かるようになった。
・グループでは自分には思いつかない考えで解いている人がいたので、とても参考になった。
・自分一人ではできない問題があったけど、グループ活動にすることで解決できた。

授業後の感想を見ると、「考える力がついてきたと思う」、「少し得意になったと思った」、「少し難しい問題を解くことができてとてもよかった」などの記述からは、数学に対してじっくりと向き合う姿勢が身に付きつつあることが分かる。また、グループ学習についても、「分からないところを聞いたり、その解説を聞いたりしたら分かるようになった」、「グループで自分には思いつかない考えで解いている人がいたので、とても参考になった」などの記述から、グループ学習のよさや考えることの楽しさを味わえたようである。

一方、「整数の問題の解法はよく分かったが、もう一度一人で解けるかは心配」とあるように、整数に関する理解や納得が十分でなかったことをうかがわせる回答もあった。しかし、グループでの話し合いの場面での様子を見ると、それぞれの生徒が気付いたことを共有することで理解を深め

たり、友人の一言で納得したりする場面が多々見られた。問題を解くことについての理解と納得は十分ではなかったが、整数の問題の解法の考え方については、多くの生徒は納得できたと思われる。

本授業後に、「二項定理、多項定理による式の展開」、「重複組合せ」、「反復試行の確率」について、同じようにワークシートを用いて、グループ学習を取り入れた授業を行った。授業後に振り返りシートによる意識調査と、問題の理解度の確認を実施した。生徒からは、「改めて学び直すことで意味がよく分かった」、「整数の性質が分かっていたので、前の授業の時よりも納得することが多かった」、「やっぱり、グループでの勉強は学ぶことが多い」といった意見が多く、また、理解度もそれぞれの単元の学習時よりも高かった。

5　実践を振り返って

今回の取組は、生徒が不慣れである整数を扱う問題を低学年の学習場面から取り入れ、整数に関する基本的な性質の理解と基礎的な考察の進め方の理解を図り、納得しながら問題に取り組むことができることを目指した。特に、これまで事前に学習場面を設定しないままに不定方程式を用いて考察していた「場合の数・確率」の学習内容の理解を促すために、素地的な知識としての整数に関する問題を丁寧に指導していこうとするものであった。

授業が進むにつれ、生徒は式を見て「この式から x は偶数」「この条件から y は 3 の倍数でなければならない」などと考えることができるようになり、式の見方が豊かになり、今回の取組によって、生徒は整数の基本的な性質の理解が深まった。

これまでの授業において整数を扱った問題を学習する場面が少なかったため、生徒一人で考察を進めていくことが難しいのではないかと考え、今回グループ学習を取り入れた。試行錯誤を繰り返しながら、他者の意見に耳を傾けるなど、全ての生徒が課題の解決に積極的に取り組み、考えを「練りあう」場面を設定することができた。

振り返りシートで「グループ学習によって考えが深まった」と回答している生徒が多いことや、代表生徒による解法の発表時に、発表者に対して生徒が疑問点を積極的に質問している様子から、グループ学習の目的は達成できたと考える。また、振り返りシートで「他者の意見を取り入れながら考えを進めていく」ことに対して高い評価を示し、今後もグループ学習を取り入れて欲しいなどの意見が 95%と大変多かったことから、今後も適宜取り入れ、生徒の理解を深めるとともに、数学の授業における言語活動の充実を図りたいと考える。

これまで整数に関する問題を通常の授業場面でまとまった形で扱う機会が極めて少なかった。しかし、今回の取組を通して、低学年の段階から整数に関する基本的な問題を扱い、十分に理解させることが可能であることが分かった。また、振り返りシートに「考えていて楽しかった」「面白かった」とあるように、整数問題は生徒にとって論理的に考えることのおもしろさを味わわせることのできる素材であることが確認できた。新学習指導要領「数学Ａ」の「整数の性質」の学習に大いに期待をもつことができた。

おわりに

新学習指導要領では、「数学Ｉ」と「数学Ａ」に「課題学習」が位置付けられた。課題学習については、次のように示されている。

> 「数と式」、「図形と計量」、「二次関数」及び「データの分析」の内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できるようにする。

すなわち、数学の学習が単なる問題の解法の記憶にならないように、数学のよさや数学を学ぶ意義を認識させることに留意し、数学に対する関心と主体的に数学を学ぼうとする意欲を高めることが求められている。これを踏まえて、平成 24 年度から実施される課題学習の準備に取りかからなければならない。

また、これは課題学習についての目標であるが、数学科の授業の全ての場面で求められることでもある。目標を達成するためには、生徒が学習内容を理解し、納得するような授業を展開すること、その上で、数学のおもしろさ、数学を学ぶことのおもしろさを実感できるようにすることが大切である。

今回の生徒に対する質問紙による調査、事例の作成を通して得られた成果と課題から、数学科の授業を改善するための視点として、次の２点について、特に留意していかなければならないと感じた。

「数学を学ぶことを通して身に付ける力」を考えること

生徒が数学を学ぶことを通して身に付けなければならない力は何か。新学習指導要領に示された数学科の目標では、次の４点が示されている。

・数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深めること
・事象を数学的に考察し表現する能力を高めること
・創造性の基礎を培うこと
・数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度

これらは抽象的に表現されていることから、それぞれの学校の生徒の実態、目指す生徒の姿を踏まえて、具体的に考えることが重要である。教科書に示されていることを漠然と教えていくのではなく、「体系的な理解を深めること」とは、どのように理解をさせることなのか。「考察し表現する能力を高める」ことは、どのような授業によって高められるのか。「創造性の基礎」、「数学のよさ」とは何か。これらのことを機会を捉えて見つめ直すことが大切なことである。

教材・教具の工夫と授業の進め方の工夫

今回の取組では、「理解を深めること」として、生徒が授業の中で学習内容を理解すること、納得することを目指した。例えば、事例１では、「絶対値を含む式の問題⇒場合分けをすること」という生徒の意識を変えるため、絶対値を含む式の意味を常に考えさせた。事例２では、鈍角の三角比の定義を覚えるだけではなく、鋭角の三角比の定義と結び付きを深めながら、１つ１つの三角形をつなげることで、連続的に変化する量、すなわち、関数として捉えることができるようにした。事例３では、小学校以来学んできた整数を高校生の視点から取り上げ、既習事項と結び付けながら考えさせた。授業後の生徒のアンケートからは、理解が深まり、納得した様子が見られた。

これらの取組では、生徒の実態に即して、授業の目標を明確にし、ワークシートや手作りの教材を作成し、授業を進めた。また、進める際には、グループで話し合わせたり、生徒の気付きを生か

たりするなど、生徒が主役となって授業が進むよう工夫した。これらのことは、事例の授業にかかわらず、様々な授業の場面で行えることである。これらの事例が、工夫された特別な授業ではなく、普段の授業として行われることが数学科の目標を達成する第一歩になる。

＜参考文献＞

小学校学習指導要領解説算数編　平成 20 年 8 月　文部科学省

中学校学習指導要領解説数学編　平成 20 年 9 月　文部科学省

高等学校学習指導要領解説数学編理数編　平成 21 年 12 月　文部科学省

平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査　国立教育政策研究所

高等学校における教科指導の充実
数　学　科
数学の学ぶ意欲を高める指導の工夫
～理解と納得、そして、おもしろさを実感できる授業を目指して～

発　行　　平成23年3月
栃木県総合教育センター　研究調査部
〒320-0002　栃木県宇都宮市瓦谷町1070
TEL 028-665-7204　　FAX 028-665-7303
URL http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/