事例３　「整数」の理解を深め、納得を促す指導の工夫

1　事例の概要

(1) 小学校、中学校、高等学校における「整数」の扱いについて

数の概念についての理解を深める学習については、小学校では、第４学年までに整数についての四則計算の意味や四則計算に関して成り立つ交換法則、結合法則、分配法則などを取り扱い、その定着と活用を図り、第５、６学年では、その四則計算に関して成り立つ性質について、小数や分数の計算でも成り立つことを調べ、理解を深めている。また、小学校では、自然数の性質について、偶数、奇数、約数、倍数、最大公約数、最小公倍数という観点から学習している。さらに、約数を調べる過程で､素数にも触れている。

新学習指導要領における整数に関する学習の流れ

小学校

第４学年まで
- ・整数の意味と表し方
- ・整数の加減乗除
- ・整数の四則計算の定着と活用
  （交換法則、結合法則、分配法則についての理解）

第５、６学年
- ・整数の性質（偶数と奇数、約数と倍数、最大公約数、最小公倍数、素数）
- ・小数や分数の四則計算の定着と活用
  （交換法則、結合法則、分配法則についての理解）

⇩

中学校

第１学年
- ・数の拡張（正の数・負の数）
- ・文字を用いた式

第２学年
- ・文字を用いた式で表したり読み取ったりすること

第３学年
- ・数の拡張（平方根、有理数・無理数）
- ・素因数分解

⇩

高等学校

数学Ⅰ
- ・数と集合（実数）

数学Ⅱ
- ・二項定理
- ・数の拡張（複素数）

数学Ａ
- ・整数の性質（約数と倍数、ユークリッドの互除法、整数の性質と応用）

中学校では、小学校で学んだ数について、より数学的な視点から見直し、自然数、整数、有理数、無理数と数の範囲を拡張し、数を統一的に見られるようにして数についての理解を深める。第１、２学年では、文字を用いた式の学習を通して、数量の関係や法則などを文字を用いた式で表すこと、さらに、その関係を説明する能力、式の意味を読み取る能力の育成も図られている。特に、整数の性質に関しては、整数を表す文字 m, n を用いて、偶数、奇数や倍数を表したり、その式の意味を考えたりする学習が行われている。また、第３学年では、自然数を素因数分解することを取り扱い、素数でない数は、その約数であるいくつかの素数の積で表すことができ、その表し方はただ一通りに決まることを学習する。

高等学校では、今回の改訂で、数学Ａにおいて「整数の性質」として扱うことになった。ここでは､「整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする」ことを目標に、約数と倍数、ユークリッドの互除法、整数の性質の活用について学習する。指導に当たっては、整数に関するいろいろな性質を生徒に見いださせ、それが成り立つ理由を考えさせて説明させるなどの活動に重点を置くこととしている。

現行の学習指導要領のもとでは､「数」についての学習は、具体的にものの個数を数えたり、順序を表したりすることから始まり、四則計算の規則とその性質を計算する中で実感し、さらに、他の学習内容とかかわりながら、自然数から整数、有理数、無理数、実数、複素数へと数の範囲

を拡張し、理解を深めてきた。しかし、その学習は、高等学校においてまとまりとして触れることがなかったので、曖昧な理解にとどまることが多く、発展的な学習としての整数を扱う問題を苦手としている生徒が多かったと考えられる。今回の改訂において、数学Ａに整数に関する学習が単元として扱われることにより、「数」について、小学校以来学習してきたことを、高校生の視点から見直し、体系化することで、理解を深めさせ、数学のおもしろさを実感させる契機になると考えられる。

(2) 実践への取組

今回の取組では、整数の性質に関する基本的な考え方を高校生の視点から見直し、現行の学習指導要領で示されている学習内容をもとにして１つの単元として取り上げ、整数についての理解を深め、その性質を事象の考察に活用できるようにすることを目標とした。

事例では、「整数解、自然数解を持つ方程式」の解法を考察することを通して、整数の基本的な性質の理解を深め、その学習内容を用いて、既習事項である「二項定理（場合の数）」、「反復試行の確率（確率）」を整数の視点から教材化し、互いに関連させながら扱えるようにした。教材は、生徒が理解しにくい内容から選び、さらに、１つ１つの問題を解決することで、次の問題へのアプローチになるように設定した。そのことで、整数についての理解が深まるとともに、それぞれの学習内容の納得へとつながると考えた。授業では、ワークシートを活用するとともに、グループ学習、個人演習、一斉授業等の学習形態を適宜取り入れることで、考える視点を豊かにするなど、思考の深まりを促すことを目指した。

整数の性質の理解を深め、関心を高めるための指導の流れ

整数の性質〈１～３時間目〉
・整数解、自然数解をもつ方程式
（不定方程式の整数解）

場合の数への活用１〈４時間目〉
・二項定理による式の展開
・多項定理による式の展開

場合の数への活用２〈５時間目〉
・重複組合せの考え方
・重複組合せの応用

確率への活用〈６～７時間目〉
・反復試行の確率の考え方
・反復試行の確率の応用

２　指導計画

(1) 全体計画

①　単元の目標

整数の性質に関する基本的な考え方の理解を深め、その性質を事象の考察に活用することができる。

② 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
A1 整数の性質を考察する楽しさを感じている。 A2 二項定理や多項定理の有用性を理解し、考え方を具体的な事象に活用しようとする。 A3 重複組合せの考え方を具体的な事象に活用しようとする。 A4 反復試行の確率の考え方を具体的な事象に活用しようとする。	B1 条件に当てはまる整数をもれなく重複なく数えるなど、整数の性質を活用して考察することができる。 B2 方程式が整数解をもつとき、因数分解や解の公式などを用いて考察することができる。 B3 全ての整数について考察するのではなく、条件を満たす範囲内で考察することができる。	C1 問題場面を的確に理解し、文字を用いて立式することができる。 C2 重複組合せを式や図などで表現することができる。	D1 整数を素因数に分解することの有効性を理解している。 D2 二項定理、多項定理について理解している。 D3 重複組合せについて理解している。 D4 反復試行について理解している。

③ 単元の指導計画

時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準
1時間目	【整数の性質①】 整数の性質の理解 ○因数分解を用いた不定方程式の解法 ○根号が整数となる条件 ○整数のとりうる値の範囲 学習プリント1	○文字を用いた考察と、値を代入することのよさや大切さに気付かせる。 ○整数のとりうる値の範囲を考察させる際に、因数分解、約数、倍数の考え方が有効であることを実感させる。	B1, B2, D1
2,3時間目 **（実践例）**	【整数の性質②】 整数の性質の理解 ○一次不定方程式の整数解 ワークシート2-1～2-6	○グループ学習による考察、考察の結果の発表、発表者への質問によって、理解を促す。 ○整数のとりうる値を考える際に、範囲の絞り込みの考え方が十分活用できるようにさせる。	A1, B3, C1
4時間目	【場合の数への応用①】 ○二項定理、多項定理による式の展開 ワークシート3-1～3-3	○類推によって、二項定理の一般化を促す。 ○必要な項の係数のみを求めればよいことに気付かせ、題意の明確化を図る。	A2, D2
5時間目	【場合の数への応用②】 ○重複組合せの考え方 ○重複組合せの応用 ワークシート4-1～4-3	○様々な問題場面が重複組合せの考えを用いて考察できることに気付かせる。	A3, C2, D3

6,7 時間目	【確率への応用】 ○反復試行の確率の考え方 ○反復試行の確率の応用 ワークシート 5-1～5-3	○なるべく文字を用いて考察させることにより、表現力を向上させる。 ○ランダムウォークでは、動きの範囲や周期性にも着目できるようにする。	A4, C1, D4

③　学習プリント、ワークシート

ア）学習プリント１

学習プリント１　Theme【整数】

１年＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１－１　(1)　$4x^2+10x-y^2-y+6$ を因数分解せよ。

hint【x についての２次式と考え、$-(y^2+y-6)$ を因数分解した上で全体を因数分解】

(2)　$4x^2+10x-y^2-y=0$ を満たす整数$(x,\ y)$をすべて求めよ。

hint【(1)を利用して、(2)の両辺に 6 を加えて因数分解

6 は$(\pm1)\times(\pm6)$, $(\pm6)\times(\pm1)$, $(\pm2)\times(\pm3)$, $(\pm3)\times(\pm2)$】

１－２　(1)　$xy=3x-2y+12$ が成り立つような自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。

hint【$xy-3x+2y-6=6$ と変形して、左辺を因数分解】

(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}$ が成り立つような自然数の組をすべて求めよ。ただし $x \geqq y$ とする。

hint【両辺に $6xy$ をかけて、(1)と同様に解く】

１－３　(1)　$\sqrt{384-12n}$ が整数となるような自然数 n の値をすべて求めよ。

hint【$384-12n=12(32-n)$ として、右辺が(整数)^2 となるように n を決定】

(2)　$\sqrt{n^2+99}$ が整数となるような自然数の値をすべて求めよ。

hint【(1)と同様の解法では n の値の範囲を特定できない。$m=\sqrt{\ }$ とし、両辺を 2 乗】

１－４　(1)　２次方程式 $x^2+ax+a^2+2a=0$ が実数解をもつような整数 a の値を求めよ。

hint【判別式を利用しての値の範囲を限定】

(2)　２次方程式 $x^2+ax+a^2+2a=0$ が整数解をもつような整数 a の値を求めよ。

hint【(1)を利用して、具体的に a の値を代入して整数解をもつ方程式を作る】

１－５　大小２個のさいころを投げたとき，大きいさいころの出た目の数を m，小さいさいころの出た目の数を n として，２次関数 $f(x)=x^2+2mx+n$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつ整数 m，n を求めよ。

hint【判別式を利用して、実数解をもつ条件を求め、整数 m，n の値を代入して特定】

(2)　方程式 $f(x)=0$ が整数解をもつ整数 m，n を求めよ。

hint【(1)の結果を参考に、解の公式を利用して、整数 m，n の値を代入して特定】

１－６　ある商品が、小の箱に３個、大の箱に８個入っている。この店では箱を空けてばらにして１つずつ売ることができないという。したがって、個数によっては注文に応じることができないときがある。このとき次の問に答えよ。

(1)　20 個以下で注文に応じられない個数を全てあげよ。

hint【小の箱を m 個、大の箱を n 個として式を立て、値を代入】

(2)　店主はある個数以上の注文であれば常に注文に応じることができると言っているが、それは本当か。正しい場合にはその個数と理由を述べよ。正しくない場合でも、その理由を述べよ。

hint【Let's try without hints!】

イ）ワークシート２－１～２－６

整数問題学習ワークシート　２－１　　　　　１年＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(1)　$2x+3y=20$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。		(2)　$x+2y+4z=10$ を満たす自然数(x,y,z)の組をすべて求めよ。	
解答	大切と思うところ	解答	大切と思うところ

問題を解くためのポイントは？

問題を解くためのポイントは？

内容はよく分かりましたか。１～５の数字を記入してください。　→　(1)《　　》　(2)《　　》

１よく分かった　２少し分かった　３どちらともいえない　４あまり分からなかった　５分からなかった

※　同様に、以下の問題でワークシート２－２～２－６を作成した。

２－２　(1)　$4x+3y=55$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。
　　　　(2)　$4x-3y=55$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。
２－３　(1)　$4x=9y$ を満たす整数$(x,\ y)$の組を、整数 k を用いて表せ。
　　　　(2)　$4x-9y=50$ を満たす整数解の１つは$(8,\ -2)$である。このことを用いて、方程式を満たす整数$(x,\ y)$の組を、整数 k を用いて表せ。
２－４　(1)　２－３の(2)の方法を用いて、$2x+3y=17$ を満たす整数(x,y)の組を、整数 k を用いて表せ。
　　　　(2)　２つの方程式 $x+y+z=10$，$4x+2y+z=25$ を満たす整数(x,y,z)の組をすべて求めよ。
２－５　(1)　$x,\ y$ は自然数とし、$x<y$ とする。$2x+3y=40$ を満たす整数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。
　　　　(2)　$x,\ y,\ z$ は自然数とし、$x<y<z$ とする。$x+y+z=8$ を満たす整数$(x,\ y,\ z)$の組をすべて求めよ。
２－６　２人でじゃんけんをして、勝った場合は階段を２段登り、あいこの場合は１段登り、負けた場合は１段下がることにする。全部で 20 回じゃんけんを行ったとき、ちょうど 20 段目まで登ったという。このときのじゃんけんに勝った回数を求めよ。

ウ）ワークシート３－１～３－３、４－１～４－３、５－１～５－２で扱った問題

３－１　(1)　$(2a+3b)^5$ の展開式における a^3b^2，b^5 の係数を求めよ。
　　　　(2)　$(2a+3b)^5$ の展開式におけるすべての項を求めよ。また、それらの項の特徴を述べよ。
　　　　(3)　$(a+b)^n$ の展開式を作ろう。
３－２　(1)　$(a+2b+3c)^5$ の展開式における a^2bc^2，a^4c の係数を求めよ。
　　　　(2)　$(a+2b+3c)^5$ の展開式におけるすべての項を求めよ。また、それらの項の特徴を述べよ。
　　　　(3)　$(a+b+c)^n$ の展開式を作ろう。
３－３　(1)　$(3x-2)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。
　　　　(2)　$\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。
　　　　(3)　$(x^2+2x+3)^4$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。

４－１　なしと桃が沢山ある。これらから合計 12 個の果物を組み合わせてかごに詰める。
(1)　含まれない果物があってもよいとするとき、詰め方は何通りあるか。
(2)　どの果物も最低 1 個は詰めるとするとき、詰め方は何通りあるか。

４－２　なしと桃とりんごが沢山ある。これらから合計 12 個の果物を組み合わせてかごに詰める。
(1)　含まれない果物があってもよいとするとき、詰め方は何通りあるか。
(2)　どの果物も最低 1 個は詰めるとするとき、詰め方は何通りあるか。

４－３　りんご 9 個を 3 人に分ける。
(1)　受け取らない人がいてもよいものとするとき、何通りの分け方があるか。
(2)　受け取らない人がいてはいけないとするとき、何通りの分け方があるか。
(3)　誰もが最低 2 個は受け取るとするとき、何通りの分け方があるか。

５－１　(1)　A，B の２人でじゃんけんを 4 回行う。A が 3 回勝つ確率を求めよ。
(2)　動点 P が正五角形 ABCDE の頂点 A から出発して周上を動くものとする。さいころを投げて 1,2,3,4 ならば左回りに 2 動き、5,6 が出れば左回りに 1 動くとする。3 回投げて点 P が A に到達する確率を求めよ。
(3)　数直線の原点に 1 つの粒子がある。単位時間内に粒子が右へ 1 目盛動く確率は $\frac{2}{3}$，左へ 1 目盛動く確率は $\frac{1}{3}$ である。5 単位時間後での粒子の位置の座標を X とするとき，次の確率を求めよ。
①X=5　②X=3　③X=0

５－２　(1)　２人でじゃんけんをして、勝った場合は階段を２段登り、あいこの場合は１段登り、負けた場合は１段下がることにする。全部で６回じゃんけんを行ったとき、ちょうど８段目まで登る確率を求めよ。
(2)　数直線の原点に 1 つの粒子がある。単位時間内に粒子が右へ 1 目盛動く確率は $\frac{1}{2}$、そこに止まっている確率は $\frac{1}{3}$、左へ 1 目盛動く確率は $\frac{1}{6}$ である。5 単位時間後での粒子の位置の座標を X とするとき，次の確率を求めよ。
①X=5　②X=3　③X=0
(3)　動点 P が正五角形 ABCDE の頂点 A から出発して周上を動くものとする。さいころを投げて偶数ならば左回りに 1 動き、奇数ならば右回りに 1 動くとする。
①3 回投げて点 P が E に到達する確率を求めよ。
②4 回投げて点 P が B に到達する確率を求めよ。
③9 回投げて点 P が A に到達する確率を求めよ。

(2) 2, 3 時間目　【整数の性質②】の学習計画

①　１時間目【整数の性質①】の学習内容

「学習プリント１」を事前に配付し、課題とした。取り組んだ結果を提出させた後、代表生徒の解答を印刷して生徒に配付した。

授業では次の点を中心に展開した。

・因数分解を用いた不定方程式の解法（問題１－１、１－２）
・根号が整数となる条件（問題１－３）
・不等式を用いた整数のとりうる値の範囲の考察（問題１－４～１－６）

② 2, 3 時間目の目標と指導計画

ア）目標

整数の性質に関する基本的な考え方を理解できるようにさせるとともに、簡単な一次不定方程式が解けるようにさせる。

イ）指導計画

指導内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） ・前時の復習	・前時の学習内容の確認をする。	
（展開） ・一次不定方程式の解法の理解	・一次不定方程式の解法を考えよう。 (1)ワークシート2-1〜2-3 ①2-1(1)，2-1(1)，2-3(1)の解法の理解 ②2-1(2)，2-1(2)，2-3(2)の解決 ○グループ学習による解法の検討 ○グループの代表による発表 ○質疑 (2) ワークシート2-4〜2-6 ①2-4(1)，2-5(1)の解法の理解 ②2-4(2)，2-5(2)，2-6の解決 ○グループ学習による解法の検討 ○グループの代表による発表 ○質疑	・グループ学習ではグループごとに1問ずつ割り当てる。 ・グループ内のすべての生徒が意見を出し合い、議論を深めるよう促す。 ・2-2(2)について、気付きにくいときは 2-3(2)を参考にするよう助言する。 ・2-6 について、気付きにくいときは「勝ち」「あいこ」「負け」の回数をx,y,zとおいて立式するよう助言する。 ・発表に対して、積極的に質問させるなどして、議論を深めるようにさせる。
（まとめ） ・学習事項のまとめ	・整数問題の解法のポイントをまとめる。	・それぞれの解法のポイントを生徒自身の言葉で表現させる。

3　2、3 時間目の授業記録

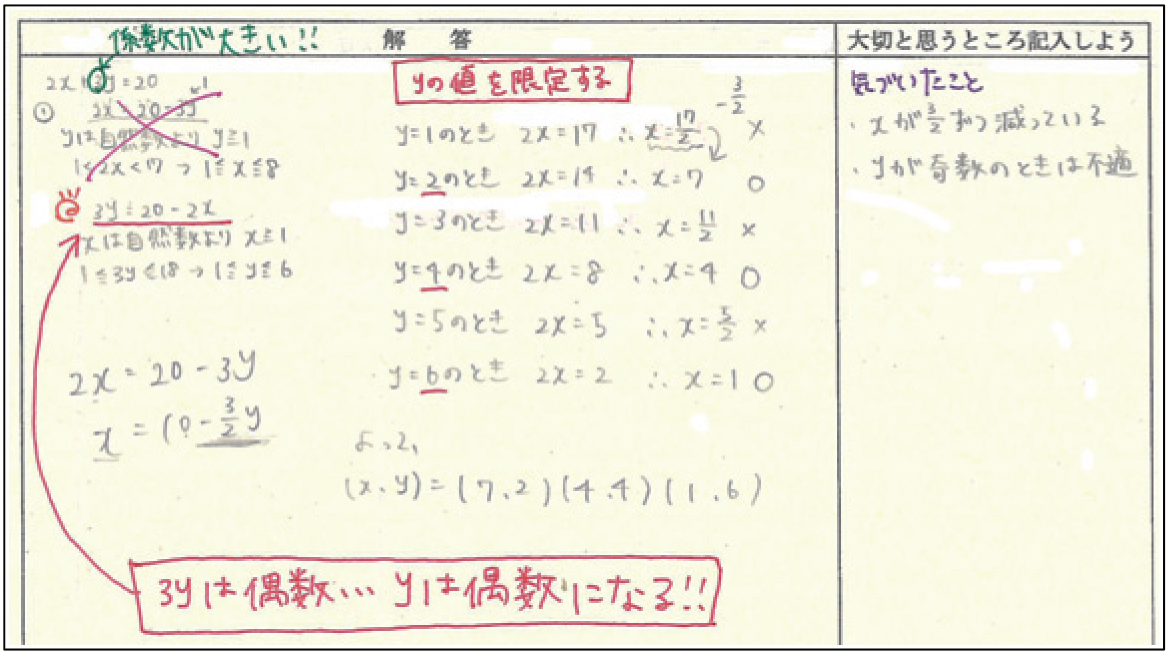
前時の学習内容の確認後、ワークシート２－１～２－３を配付し、２－１(1)、２－２(1)、２－３(1)の検討から始めた。

○２－１(1)　 $2x+3y=20$ を満たす自然数（x，y）の組をすべて求めよ。

x または y の範囲を絞り込むために、どのようにすればよいか発問をしたところ、与えられた式の変形から、「$2x=20-3y$ であるから $1\leqq y\leqq 6$ である」という生徒からの発言があった。$3y=20-2x$ から $1\leqq x\leqq 8$ であることを補足することにより、係数が大きい y の範囲を絞り込む方が効果的であることに気付かせた。その後、$y=1,2,\cdots,6$ のそれぞれの値について、x の値を求め、条件に適するかどうか検討した。

また、$y=1,2,\cdots,6$ のそれぞれの値に対する x の値を見て気付くことは何か、発問したところ、「x が $\frac{3}{2}$ ずつ減っている」「y が奇数の時は不適になる」という発言があった。それぞれ理由を尋ねたところ、「$x=-\frac{3}{2}y+10$ だから x は $\frac{3}{2}$ ずつ減る」、「$2x+3y=20$ で、2x と 20 が偶数だから、y は偶数でなければならない」といった意見が出され、１次関数の知識や、偶数・奇数の性質を確認することができた。与えられた式から「y は偶数である」ことを生徒から引き出すことができ、気付くことができなかった生徒も納得したようだ。

［２－１(1)の生徒の解答の例］



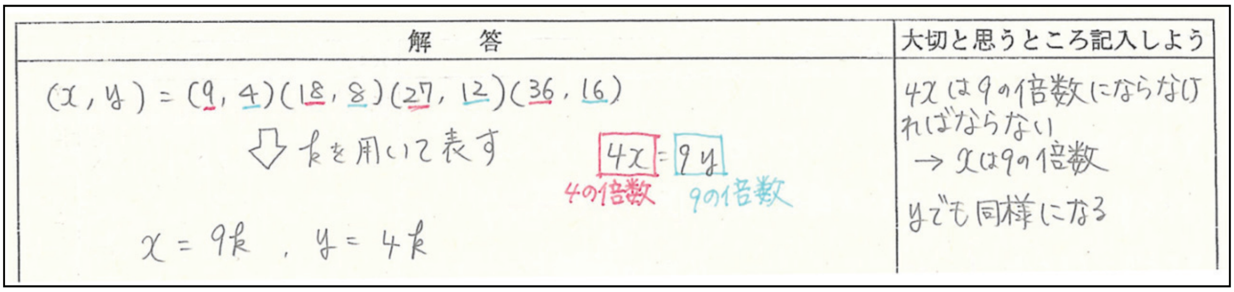
○２－２(1)　$4x+3y=55$ を満たす自然数$(x,\ y)$の組をすべて求めよ。

生徒たちは２－１(1)と同じように解決することができる問題であることに気付き、係数の大きい x の範囲を絞り込んだ後、x のそれぞれの値に対する y の値を求め、条件に適するか検討していた。

○２－３(1)　$4x=9y$ を満たす整数$(x,\ y)$の組を、整数 k を用いて表せ。

まず、この方程式を満たす整数$(x,\ y)$の組の例は何か、発問した。生徒からは、すぐに(9，4)と返ってきた。他の解はなかなか気付かなかったが、辛抱強く待ち、(18，8)、(27，12)などの解に気付いた生徒が現れ、他の生徒も納得していた。そして、このことで、与えられた方程式の解が無限にあること、x は９の倍数で y は４の倍数であることを納得することができた。９の倍数は $9k$、４の倍数は $4k$ と表現できることを確認し、解答を導くことができた。

［２－３(1)の生徒の解答の例］



次に、２－１(2)、２－２(2)、２－３(2)をグループで考えるよう指示した。グループごとに問題を指定し、５分程度、個人で問題に取り組ませた後、グループで解法を検討させた。

以下は、グループでの話し合いの様子の一部である。

○２－１(2)　$x+2y+4z=10$ を満たす自然数(x，y，z)の組をすべて求めよ。

［２－１⑵を話し合ったグループの様子］

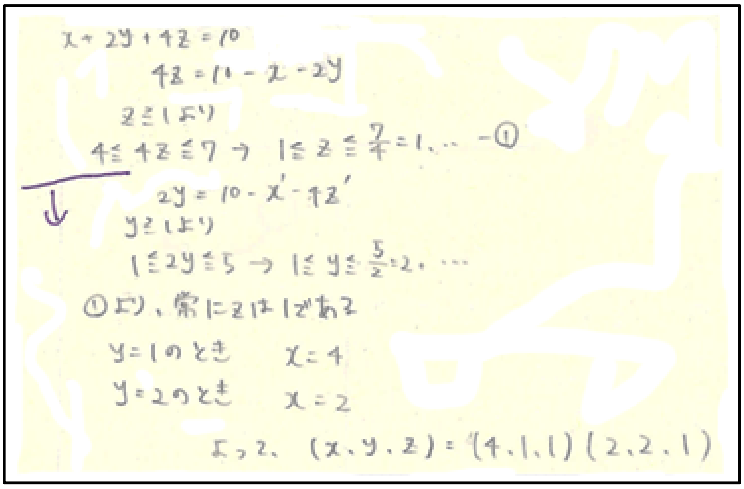
生徒Ａ：３つも文字があるのに、式は１つしかな～い！
生徒Ｂ：でも、（２－１の）(1)と形は同じだから、同じように解けるよね。
生徒Ｃ：とりあえず、係数の一番大きい z から絞り込んでいくんだね。

$4z=10-x-2y$ だから、$4z \leqq 7$、$1 \leqq z \leqq \frac{7}{4}$ だから……、z は 1 だけなのか！

生徒Ａ：ほんとだ～
生徒Ｂ：z が 1 だから、方程式に代入すると $x+2y=6$ 。あとは(1)と同じだね。

このグループは教師の助言なしに、解にたどり着くことができた。右は、このグループの生徒の解答である。

［２－１⑵を話し合ったグループの解答］



○２－２(2)　$4x-3y=55$ を満たす自然数(x，y)の組をすべて求めよ。

［２－２⑵を話し合ったグループの様子］

生徒Ｄ：（２－２の）(1)と同じようにして、$4x=3y+55$ だから …… y は奇数だな。
$y=1$ のとき、$4x=58$ だからだめで、
$y=3$ のとき、$4x=64$ だから $x=16$ で、
$y=5$ のとき、$4x=70$ だからだめで、
$y=7$ のとき、$4x=76$ だから $x=19$ で、……
これだめだ。これ、ず～っと続く。
生徒Ｅ：どうするんだこれ?
教　師：どうした？
生徒Ｄ：さっきは $55-3y$ だったから範囲が決まったけど、今度は足し算だから範囲が決まらないので、解がいっぱい出てきてしまうんです。
教　師：なるほど。範囲が限定できないから、$y=1,3,5$ と永遠と続いてしまうわけだね。さて、その場合、どうする？
生徒Ｄ：諦める…
教　師：諦める！？
生徒Ｅ：文字で表せばいいんじゃない。
教　師：何を？

生徒Ｆ：そうか、２－３(1)みたいに x、y を k で表せばいいんだ！
教　師：よく気が付きましたね！２－３(2)がヒントになるから、まずそっちを考えてみてください。

このグループは、まず方程式の形から y が奇数であることに気付いたが、その後、解が無数に存在することに困ってしまった。そこで、困ってしまった原因に気付かせ、方程式の解は無数にあり、それを文字を用いて表すことに気付かせた。

○２－３(2)　$4x-9y=50$ を満たす整数解の１つは(8，−2)である。このことを用いて、方程式を満たす整数$(x,\ y)$の組を、k を用いて表せ。

［２－３⑵を話し合ったグループの様子］

生徒Ｇ：（２－３の）(1)みたいに４の倍数と９の倍数を使えばいいんだろうけど……
生徒Ｈ：$4x=9y+50$ だから、y は偶数だね。
生徒Ｉ：でも、偶数全部が答えっていう訳じゃないよね。y が４だと、x は整数にならないし。
生徒Ｊ：問題文の「(8，−2)が整数解の１つ」っていうのは、たぶんヒントだと思うんだけど。
生徒Ｋ：とりあえず、式に代入してみるか。4×8−9×(−2)=50。確かに 32 と 18 を足せば 50 だけど……
教　師：そうだね。32 と 18 を足せば 50 になりますね。32 と 18 を足せば 50 になることを上手く使えないかな。
生徒Ｌ：そうか、32 と 18 は、それぞれ４の倍数と９の倍数だから、50 を 32 と 18 と考えて、$4x$ と $9y$ のところに振り分けてあげれば、カッコでくくれるよ。
教　師：なるほど。いい感じだね。
生徒Ｍ：あ、そうか！ $4x-32=9y+18$ だから $4(x-8)=9(y+2)$ になって、（２－３の）(1)と同じ形だ！
生徒Ｎ：だから $x-8=9k$ 、$y+2=4k$ になるから $x=9k+8$ 、$y=4k-2$ だ！

このグループはなかなか解決の糸口が見えてこなかった。そこで、２－３(1)の形に気付くように、得られた数値を上手に使わせるように助言をした。しかし、生徒が自ら解決できたと思えるように助言を与えすぎないことが重要である。

［２－３⑵を話し合ったグループの解答］

$4x-9y=50$

$4x=9y+50$ ← 2.3.1と似たような式にする

◎50を4の倍数と9の倍数に分ける

ex) 32, 18

$4x=9y+32+18$

$4x-32=9y+18$　　4の倍数と9の倍数でまとめる！

$\boxed{4(x-8)=9(y+2)}$

$x-8=X$　$y+2=Y$ として

Xは9の倍数 Yは4の倍数 となるはずだから

$x-8=9k$　　$y+2=4k$　　(kは整数)

$x=9k+8$　　$y=4k-2$

$4(9k+8-8)=9(4k-2+2)$

$36k=36k$　　$(x,y)=(9k+8,\ 4k-2)$

グループである程度解答を導き出せた段階で、その解法を代表生徒に発表させた。生徒たちは、代表生徒の説明を熱心に聞いていた。

２－３(2)で、代表生徒が「50 を、例えば 32 と 18 のように、4 の倍数と 9 の倍数に分ける。次に式を 4 の倍数と 9 の倍数でまとめて、２－３(1)を使うと $x = 9k + 8$， $y = 4k - 2$ という答えが出る」と説明したところ、次のような質問が生徒から出た。

「50 を 4 の倍数と 9 の倍数に分ける方法は 32 と 18 以外にも、例えば–4 と 54 がある。このとき、答えの形（$x = 9k - 1$， $y = 4k - 6$）が違う」

代表生徒は対応に窮していたので、教師の方で、答えの見た目は違うが本質的には同じ答えであり、どちらの答えも正しいことを補足した。

その後、ワークシート２－４～２－６を配付した。２－４(1)、２－５(1)を全員で検討し、残りの問題については、同じようにグループで解法を検討させ、代表生徒に発表させた。

ワークシート２－１～２－３と同様に、生徒たちはこれまでの学習を振り返りながら、問題に熱心に取り組み、発表していた。

４　授業後の検証

授業後、振り返りシートを用いた意識の調査と、ワークシート２－１～２－６の各設問の理解度に関して調査を行った。結果は以下のとおりである。

［振り返りシートの結果（実施人数 39 人)］

１　整数の性質について理解することができましたか。

理解できた	ほぼ理解できた	あまり理解できなかった	理解できなかった
27 (69.2%)	12(30.8%)	0(0%)	0(0%)

２　今回学んだ整数の問題を解けるようになったと思いますか。

そう思う	ややそう思う	あまりそう思わない	そう思わない
5(12.8%)	33(84.6%)	1(2.6%)	0(0%)

３　今回グループに分けて考察しましたが、考えは深まりましたか。

深まった	少し深まった	あまり深まらなかった	深まらなかった
17(43.6%)	21(53.8%)	1(2.6%)	0(0%)

４　今回グループに分けて考察しましたが、今後も取り入れて欲しいですか。

多く取り入れて欲しい	少し取り入れて欲しい	あまり取り入れて欲しくない	取り入れて欲しくない
16(41.0%)	21(53.8%)	2(5.1%)	0(0%)

［各設問の理解度に関する調査結果（実施人数 36 人)］

		よく分かった	だいたい分かった	どちらともいえない	あまり分からなかった	分からなかった
２－１	(1)	33(91.7%)	3(8.3%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	33(91.7%)	3(8.3%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－２	(1)	31(86.1%)	5(13.9%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	20(55.6%)	13(36.1%)	2(5.6%)	1(2.8%)	0(0%)
２－３	(1)	30(88.3%)	6(16.7%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	30(88.3%)	6(16.7%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－４	(1)	28(77.8%)	8(22.2%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	26(72.2%)	10(27.8%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－５	(1)	22(61.1%)	12(33.3%)	2(5.6%)	0(0%)	0(0%)
	(2)	22(61.1%)	14(38.9%)	0(0%)	0(0%)	0(0%)
２－６		23(63.9%)	8(22.2%)	3(8.3%)	0(0%)	0(0%)

整数の性質についての理解は、全ての生徒が「理解できた、ほぼ理解できた」と回答した。様々な問題に取り組みながら、倍数や約数について改めて考える場面を設定したので、多くの生徒が整数の性質についての理解が深まったと考えられる。また、それは、グループでの取組についての回答からもうかがえるように、一人で考えるだけではなく、グループで話し合うことで、様々な角度から問題の解法を検討できたことも理解を深めることに役立っていた。

「整数の問題を解けるようになったと思いますか」という質問に対しては、「ややそう思う」と回答した生徒が８割を超えたものの、「そう思う」と回答した生徒は１割程度にとどまった。各設問の理解度からも、問題が難しくなるにつれて、理解度が下がってくることから、まだまだ自信を持って取り組むことができないということが感じられる。

授業後の振り返りシートには、授業の感想を自由記述として記入させた。その記述内容は、次のとおりであった。

今日の授業の感想を述べてください。（主な意見のみ）

＜考え方が身に付いた＞

・これをやって、考える力がついてきたと思う。
・初めて見たときは、どう考えたらいいのか分からない問題が多かったが、今までの考え方を使って解けることが分かった。

＜整数の範囲について＞

・値の範囲の求め方がよくわかり、値が限定できるようになったので、少し得意になったと思った。
・整数の問題で学んだ値の範囲の限定の仕方は今まで苦手だったが、授業でどうしてその範囲に限定できるのかの理由がよく分かった。

＜解けるようになった＞

・普段やらないような問題や少し難しい問題を解くことができてとてもよかった。
・授業を受ける前は、どうやって解けばいいか分からなくて、ペンが動かなかったけど、授業が進むにしたがって、だんだんと分かるようになってきた。

＜まだまだ心配＞

・問題文からの式の立て方をもう少し詳しく知りたい。
・整数の問題の解法はよく分かったが、もう一度一人で解けるか心配。

＜グループでの学習について＞

・いつもと違ってクラスの友達が説明したり、話し合ったりするのがよかった。
・（発表者に）分からないところを聞いたり、その解説を聞いたりしたら分かるようになった。
・グループでは自分には思いつかない考えで解いている人がいたので、とても参考になった。
・自分一人ではできない問題があったけど、グループ活動にすることで解決できた。

授業後の感想を見ると、「考える力がついてきたと思う」、「少し得意になったと思った」、「少し難しい問題を解くことができてとてもよかった」などの記述からは、数学に対してじっくりと向き合う姿勢が身に付きつつあることが分かる。また、グループ学習についても、「分からないところを聞いたり、その解説を聞いたりしたら分かるようになった」、「グループで自分には思いつかない考えで解いている人がいたので、とても参考になった」などの記述から、グループ学習のよさや考えることの楽しさを味わえたようである。

一方、「整数の問題の解法はよく分かったが、もう一度一人で解けるかは心配」とあるように、整数に関する理解や納得が十分でなかったことをうかがわせる回答もあった。しかし、グループでの話し合いの場面での様子を見ると、それぞれの生徒が気付いたことを共有することで理解を深め

たり、友人の一言で納得したりする場面が多々見られた。問題を解くことについての理解と納得は十分ではなかったが､整数の問題の解法の考え方については､多くの生徒は納得できたと思われる。

本授業後に、「二項定理、多項定理による式の展開」、「重複組合せ」、「反復試行の確率」について、同じようにワークシートを用いて、グループ学習を取り入れた授業を行った。授業後に振り返りシートによる意識調査と、問題の理解度の確認を実施した。生徒からは、「改めて学び直すことで意味がよく分かった」、「整数の性質が分かっていたので、前の授業の時よりも納得することが多かった」、「やっぱり、グループでの勉強は学ぶことが多い」といった意見が多く、また、理解度もそれぞれの単元の学習時よりも高かった。

５　実践を振り返って

今回の取組は、生徒が不慣れである整数を扱う問題を低学年の学習場面から取り入れ、整数に関する基本的な性質の理解と基礎的な考察の進め方の理解を図り、納得しながら問題に取り組むことができることを目指した。特に、これまで事前に学習場面を設定しないままに不定方程式を用いて考察していた「場合の数・確率」の学習内容の理解を促すために、素地的な知識としての整数に関する問題を丁寧に指導していこうとするものであった。

授業が進むにつれ、生徒は式を見て「この式から x は偶数」「この条件から y は 3 の倍数でなければならない」などと考えることができるようになり、式の見方が豊かになり、今回の取組によって、生徒は整数の基本的な性質の理解が深まった。

これまでの授業において整数を扱った問題を学習する場面が少なかったため、生徒一人で考察を進めていくことが難しいのではないかと考え、今回グループ学習を取り入れた。試行錯誤を繰り返しながら､他者の意見に耳を傾けるなど､全ての生徒が課題の解決に積極的に取り組み､考えを「練りあう」場面を設定することができた。

振り返りシートで「グループ学習によって考えが深まった」と回答している生徒が多いことや、代表生徒による解法の発表時に、発表者に対して生徒が疑問点を積極的に質問している様子から、グループ学習の目的は達成できたと考える。また、振り返りシートで「他者の意見を取り入れながら考えを進めていく」ことに対して高い評価を示し、今後もグループ学習を取り入れて欲しいなどの意見が 95%と大変多かったことから、今後も適宜取り入れ、生徒の理解を深めるとともに、数学の授業における言語活動の充実を図りたいと考える。

これまで整数に関する問題を通常の授業場面でまとまった形で扱う機会が極めて少なかった。しかし、今回の取組を通して、低学年の段階から整数に関する基本的な問題を扱い、十分に理解させることが可能であることが分かった。また、振り返りシートに「考えていて楽しかった」「面白かった」とあるように、整数問題は生徒にとって論理的に考えることのおもしろさを味わわせることのできる素材であることが確認できた。新学習指導要領「数学Ａ」の「整数の性質」の学習に大いに期待をもつことができた。