事例２	「鈍角の三角比」の理解を深め、納得を促す指導の工夫

1　事例の概要

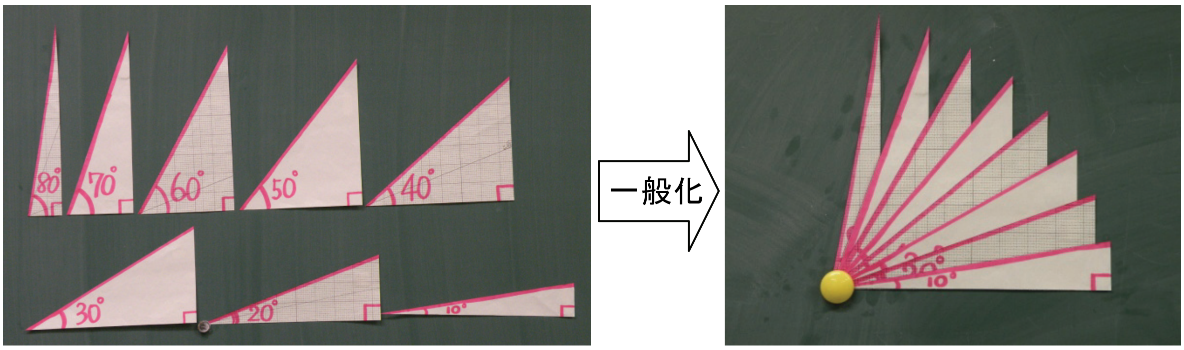
研究協力委員が勤務する学校の第２学年の生徒を対象に、数学Ⅰ・数学Ａの内容ごとの「理解度」、「納得度」、「おもしろさ」について調査したところ、三角比の内容について右の表のような結果が得られた。

「図形と計量」の学習内容	解き方が分かった	納得できた	おもしろかった
鋭角の三角比と三角比の相互関係	74.5	73.4	56.5
鈍角の三角比	**70.1**	**67.9**	**51.6**
正弦定理・余弦定理とその応用	75.5	72.8	62.0
三角形の面積	71.7	71.2	56.0

（数字は％、回答者 184 名）

これによると、「鈍角の三角比」は他の内容に比べて「理解度」、「納得度」、「おもしろさ」とも低い数値を示している。この理由として、教科書では、鋭角の三角比は直角三角形を用いて定義をするが、鈍角の三角比は直角三角形から離れて座標を用いて定義をするという、具体的な定義から抽象的な定義に拡張され、その結び付きが理解できず、納得できないということがあげられる。そして、そのことによって三角比に対する関心も薄れ、意味が分からずにその定義を覚え、解法を覚えていたに過ぎず、それがおもしろさにもつながらなかったのではないかと考えられる。

そこで今回の取組では、数学Ⅱで三角関数を学習することを念頭におきつつ、鋭角の三角比を定義した後に、教具を用いて鈍角の三角比や 360°までの三角関数の定義へと自然に拡張することで、理解と納得を深め、さらにおもしろさを実感できるような授業展開の工夫に取り組んだ。



直角三角形による鋭角の三角比の定義　　座標（円）による鈍角の三角比の定義

2　指導計画

(1)　単元「三角比」の学習計画

①　単元の目標

直角三角形における三角比の意味、それを鈍角まで拡張する意義及び三角比の基本的な性質について理解し、角の大きさを用いた計量の考えの有用性を認識できるようにする。

② 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
A1 直角三角形の辺の比と角との間の関係に関心を持つ。 A2 鈍角の三角比に関心を持ち、座標平面を利用することの意味を考えようとする。 A3 三角比の相互関係に関心を持ち、図や表を用いて調べようとする。	B1 図形の相似の考え方を用いて、直角三角形の辺の比を角との関係でとらえることができる。 B2 鋭角の三角比を､座標を用いて鈍角に拡張することについて考察することができる。 B3 三角比の相互関係について考察することができる。	C1 直角三角形や座標平面を用いて、三角比の値を求めることができる。 C2 １つの三角比の値が与えられているとき、他の三角比の値を求めることができる。 C3 座標平面を用いて､三角方程式・不等式を解くことができる。	D1 三角比の意味を理解している。 D2 鋭角の三角比を鈍角の三角比に拡張する意義を理解している。 D3 90°－θの三角比とθの三角比の関係を理解している。 D4 三角比の相互関係について、基礎的な知識を身に付けている。

③ 単元の指導計画

時間	学習内容	指導上の留意点	評価規準
1 時間目	○鋭角の三角比の定義	相似な直角三角形は、三角形の大きさにかかわらず比の値が等しいことから、三角比の定義ができることに気付かせる。	A1, B1, C1
2 時間目 **（実践例）**	○円を用いた三角比の定義	角を連続的に変化させることにより、円の存在に気付かせる。	A2, B2
3，4 時間目	○180°－θの三角比 ○360°－θの三角比 ○90°－θの三角比	単位円の中で、点の対称性からその性質に気付かせる。	C1, C2, D1, D2 D3
5 時間目	○三角比の相互関係	単位円を用いてその性質に気付かせる。また、三角比は互いに関連していることを理解させる。	A3, B3
6 時間目	○三角方程式 ○三角不等式	単位円を用いて、方程式・不等式の解を視覚的に明らかにしながら解決を図る。	C3

(2) 2 時間目　「円を用いた三角比の定義」の学習計画

① 目標

鋭角の三角比を座標を用いて鈍角に拡張することの意味を考察することができる。

② 指導計画

指導内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） ・前時の学習内容の確認	30°，45°，60°の三角比の値を求めよ。	・ワークシートに記入させる。 ・前時の学習内容を確認しながら答え合わせをする。

（展開）
・鈍角の三角比の考え方の理解

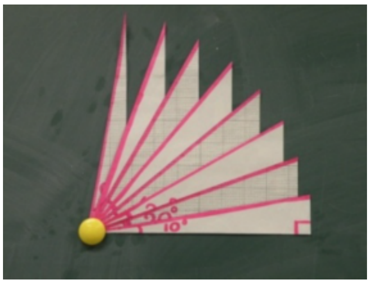
> 直角三角形の辺と角の比から三角比を考えた。しかし、角度には、鋭角だけではなく 90°以上の角も存在する。しかし、90°以上の角を持つ直角三角形は存在しない。したがって、直角三角形の辺の長さを利用して三角比の値は求められない。
> では、90°以上の角でも三角比の値が求められるように、別の方法で定義し直せないだろうか。

［質問１］・sin30°と sin45°の大小は？

発問	予想される生徒の反応
これらの大小はどうやって比べるか。	分母をそろえる
分母をそろえるということは、どの部分の長さをそろえたということか。	斜辺
斜辺の長さを変えてしまっても大丈夫か。	三角比は大きさに関係ない

・前時に学習した内容を思い出させながら、考えさせる。
・三角比の値の意味を図形的にとらえさせる

［提示］斜辺を揃えた 10°ごとの直角三角形を見ていこう。

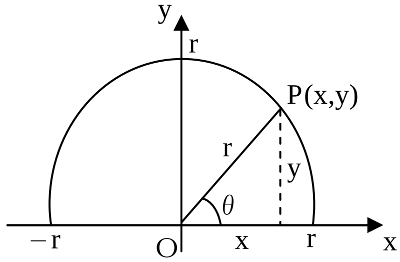


・各三角形の底辺を揃えて重ねて貼る。また、各三角形の頂点が集まるところを磁石で押さえることで、磁石が中心で、点Ｐが円周上にあるように見せる。

［質問２］斜辺を揃えたことで、どんなことが分かるか？
【予想される生徒の反応】
・Ｐが円を描く
・sin は高さの比較，cos は底辺の比較
・x 座標は小さくなり、y 座標は大きくなる

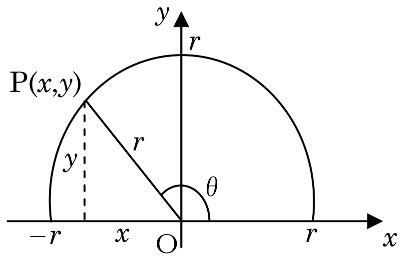
・質問２のあとは、友人と話し合わせ、多様な考えが出るようにする。
・気付かないときは、「点Ｐはどんな線を描くか」という発問を追加する。

［提示］点Ｐが移動すると角 θ も変化するから、円を使って三角比を表してみよう。
(1)　θ が鋭角のとき



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

・どこに直角三角形が出来るのかを意識させる。
・半径と、点 P の x,y 座標で三角比が求められることを意識させる。
・角は反時計回りに大きくなることを確認する。

	(2)　θ が鈍角のとき  	・点 P の位置で角 θ もただ１つ定まるので、鋭角と同じように鈍角の三角比が定義できることを、120°の三角比を例にして示す。 ・座標で考えているので、底辺部分は負の数であることを強調する。 ・鋭角の場合と同様、どこに直角三角形が出来るのかを意識させる。
・主要な角の三角比を求める	0°～180°の主要な角の三角比を求めよう。 ［課題１］30°，45°，60°の三角比を求める。 ［課題２］120°の三角比を求める。 ［課題３］135°，150°の三角比を求める。 ［課題４］0°，90°，180°の三角比を求める。	・半径 r の円に、3 つの直角三角形を色分けしてかく。 ・60°の直角三角形と対称であることを理解させる。 ・座標で考えるので、底辺の長さに相当する値が負であることに注意させる。 ・120°の場合と同様に求めさせる。 ・分母が 0 の場合は考えないことを確認し、tan90°の値はないことを理解させる。
（まとめ） ・本時のまとめ	次のことを確認する。 「１つの円の周上の点Ｐの座標を考えれば、いろいろな角度の三角比を表すことが出来る!!」 ［課題］0°～180°の三角比を求めるテスト	・主要な角の三角比はすべて覚えるのではなく、鋭角の場合の求め方を覚えておいて、鈍角は x 座標に気をつければよいことを理解させる。 ・隣の生徒同士で問題を出し合う。

③　教材

○　ワークシート

○　30°，45°，60°の三角比の表

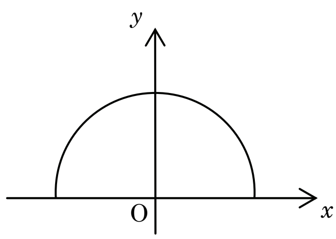
	30°	45°	60°
直角三角形			
sin θ			
cos θ			
tan θ			

○　座標を用いた三角比の定義

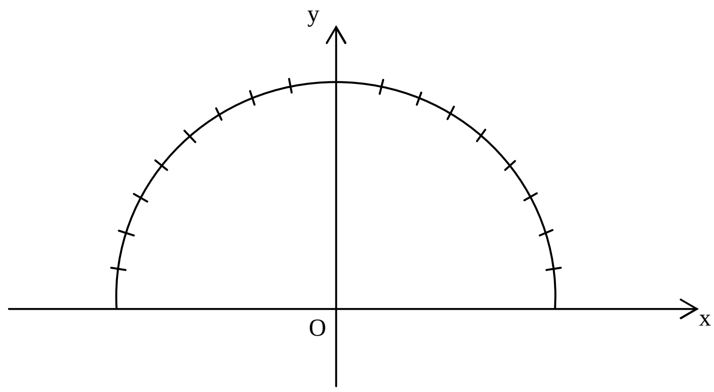
半径 r の円周上の点 P(x，y)をとる。

OP と x 軸の正の方向とのなす角 θ について

sin θ ＝　　　，cos θ ＝　　　，tan θ ＝

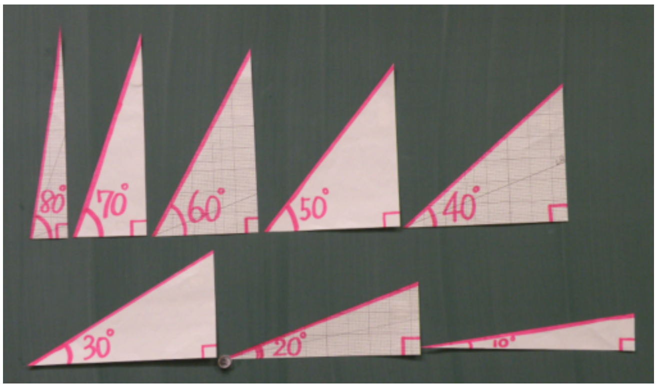


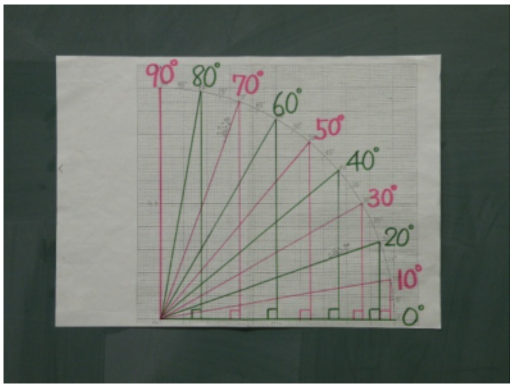
○ 0°≦θ≦180°の三角比の表



θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin θ									
cos θ									
tan θ									

○ 教具





3 授業記録

ワークシートを配付し、2 分程度で「30°，45°，60°の三角比の表」に取り組ませた。
その後、全体で確認しながら答え合わせをしたところ、ほぼ全員が正しい値を求めていた。

次に、三角比と円との関係を見いださせる準備を行った。以下は、そのときの生徒とのやりとりである。

教　師：今、30°と 45°と 60°の直角三角形をかいて、三角比を求めてもらいました。ここで質問です。sin30°と sin45°とでは、どちらの値が大きいですか？
生徒Ａ：sin45°です。
教　師：それはどうしてですか？
生徒Ｂ：sin45°の値を有理化すると $\frac{\sqrt{2}}{2}$ だから、それぞれの分子を比べて、sin45°の方が大きいです。

教　師：そうですね。ところで、有理化をすると分母の値が$\sqrt{2}$から 2 に変わりますね。これは直角三角形のどこが変化した、と見ることができますか？

生徒Ｃ：斜辺です。

教　師：そうですね。ということは、斜辺の長さを$\sqrt{2}$から 2 に拡大させた、ということになりますけど、拡大させてしまっていいのですか？

生徒Ｄ：いいです。

教　師：いい！？　どうしてですか？

生徒Ｅ：sin は辺の比だからです。

教　師：そうですね。角の大きさが一緒であれば、三角形の大きさは関係ない、ということを前回勉強しましたね。

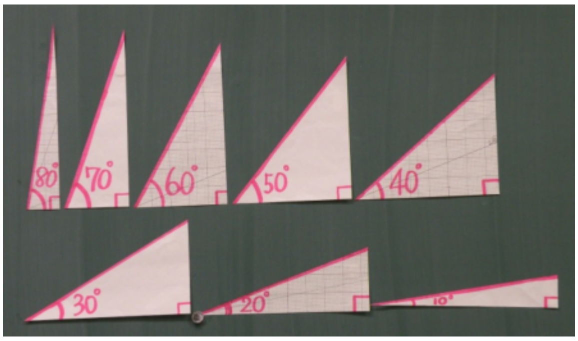
sin45°の値を有理化することによって、sin30°と sin45°と sin60°は分母が 2 という一定の値になりましたが、これは斜辺の長さを一定にしたと考えることができますね。

このようなやりとりにより、斜辺の長さが一定な直角三角形を考えてもよい、ということを確認した。ここでは、分母を同じ値にすることは、図形的には直角三角形の斜辺の長さを揃えたことを意味するという、図形的な解釈を意識させた。

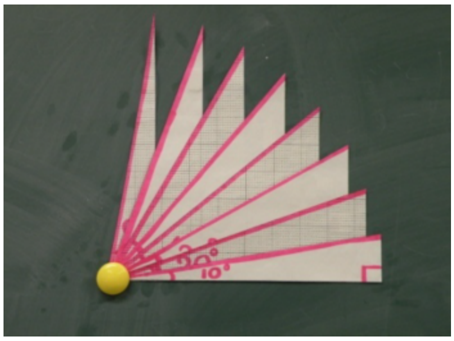
次に、直角三角形から円や座標を見いだした。以下はそのときの生徒とのやりとりである。

教　師：ここに、今考えた 30°と 45°と 60°以外に、10°から 80°まで 10°ごとの直角三角形を用意しました。もちろん、斜辺の長さが同じ直角三角形です。（図１）。この直角三角形を 80°から順番に重ねて貼っていきます。頂点が重なっているところを磁石で押さえておきましょう。

皆さん、どうですか？（図２）



［図１］



［図２］

生徒Ｆ：すごいきれい…

教　師：この図を見て気付いたことを近くの人たちと話し合ってみてください。

（生徒たちの話し合い）

教　師：では、気付いたこととか、思ったことを発表してみてください。

生徒Ｇ：磁石を中心とすると、頂点が円を描いています。

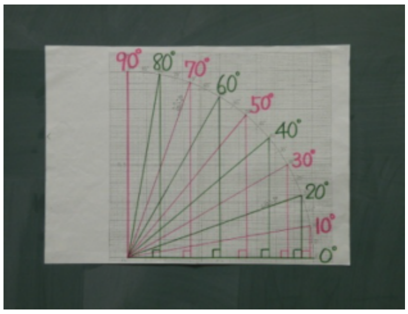
教　師：確かにそう見えますね。でも、本当に円になっているのかな？

生　徒：……

教　師：円というのはどんな図形ですか？

生徒Ｇ：中心があって、半径があって、丸い形。

教　師：確かにそうですね。丸い形だね。しかし、それを数学的に言うと、1 点からの距離が等しい点の集まりということができます。その 1 点のことを「中心」といいます。等しい距離を「半径」といいます。
さて、頂点は円を描いていますか？
生徒Ｈ：円になっています！
教　師：なぜ？
生徒Ｉ：直角三角形の斜辺の長さが全て同じだから、それが半径になっています！
教　師：Ｉさんが言ったことですけど、この図（図３）を見てください。この図を見ると、貼り付けた直角三角形は、この図から切り取ったものだと分かりますね。なので、最初にＧさんが言ってくれたように、斜辺を半径とする円になりますね。斜辺の長さが同じ直角三角形を重ねることで、円が見えてきました。



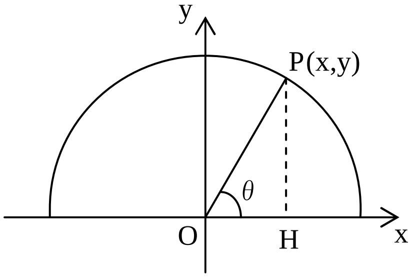
［図３］

教　師：他に気付いたことはありますか？
生徒Ｊ：角が大きくなると、高さが高くなっていきます。
生徒Ｋ：底辺は、角が大きくなると短くなります。
教　師：いいところに気付きましたね。高さは上下、つまり縦方向に動きます。底辺は左右、つまり横方向に動きます。角度の変化を縦方向と横方向の動きで表せるわけですね。
ところで、縦とか横の位置を表す方法って、これまでの学習では何を利用していましたっけ？
生徒Ｌ：座標…ですか？
教　師：そうです！座標を利用していましたね。

生徒から出てくる意見によっては、「頂点はどんな曲線を描いているか」という発問により、円を見いださせることを考えていたが、生徒たちは［図２］から円を見いだすことができていた。
また、角度の変化と底辺や高さの変化を結び付けて考えることができた生徒がいたので、それを取り上げることにより、三角比と座標との関係に気付かせることができた。

これらの意見を基に、以下のように三角比を座標で定義し直した。

教　師：皆さんから意見の出た「円」と「座標」を利用して三角比を考えてみましょう。プリントの「座標を用いた三角比の定義」のところを見てください。
さっき直角三角形を重ねたときに、磁石で押さえたところを原点にします。それと、底辺を x 軸上に置きますね。点 P の座標を(x，y)とします。
そうすると、いつも作っている直角三角形はこんな図（図４）になりますね。



［図４］

直角三角形の底辺と点 P はどんな関係にありますか？
生徒Ｍ：底辺は点 P の x 座標です。
教　師：そうですね。同じように、高さと点 P の関係は何でしょう？

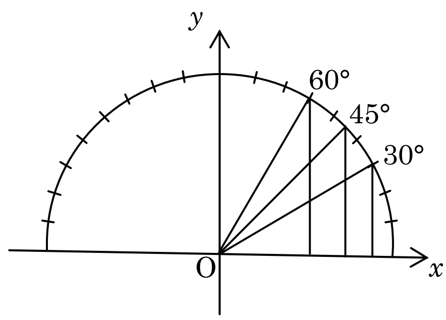
教　師：そうですね。斜辺、すなわち半径を r とすると、OP の長さは r になります。したがって、$\sin\theta$ は？

生徒O：$\dfrac{y}{r}$ です。

教　師：$\cos\theta$ と $\tan\theta$ は？

生徒P：$\cos\theta$ は $\dfrac{x}{r}$ で、$\tan\theta$ は $\dfrac{y}{x}$ です。

教　師：つまり、点 P の座標と円の半径を使って、三角比が表せそうですね。さて、授業の最初に、「90°以上の三角比の値を求められるようにしたい」と述べました。今定義したことを使うと、90°以上の三角比の値を求めることができるでしょうか。例えば、120°の三角比はどうでしょう。その前にまず、ワークシートに 30°、45°、60°の直角三角形をかいて、これらの三角比の値を求めてみましょう（図５）。できましたか？



［図５］

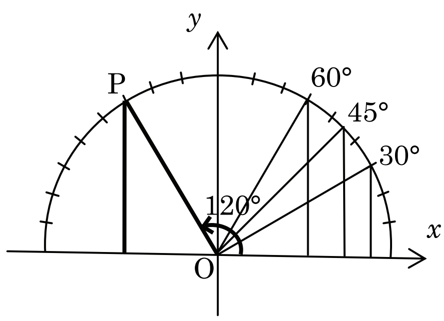
生徒Q：直角三角形のときと同じ値になりました。

教　師：そうですね。直角三角形で定義したときと同じ値になりましたか。全く別のことをしているわけではなく、直角三角形の辺の長さを座標に置きかえて定義し直しただけなので、これらの角の三角比は、当然、同じ値になりますね。したがって、今回の定義は、今までのことも使えると言うことです。そして、この定義であれば、120°の三角比の値を求められそうではないですか?

ところで、角を大きくすると、点 P は円周上をどの方向に動きますか？

生徒Q：左回りです。

教　師：そうですね。反時計回りともいいます。では、角を大きくしていって、120°になったときの点 P の位置をワークシートにかいてみてください。すると、点 P は第２象限にきますね。黒板の図（図６）のようになりましたか？



［図６］

生徒Ｒ：あとは点 P の座標が分かればいいんだ！

教　師：そうですね。θ が鈍角だと、今までみたいに直角三角形はかけないけれど、直角三角形の底辺や高さを、点 P の x 座標や y 座標と考えれば、鈍角でも三角比を定義できるのです。しかも、定義の仕方は鋭角の場合と一緒です。

その後、120°は 60°と y 軸に関して対称であることを利用して、120°の三角比を求めた。120°のときは点 P の x 座標が負であることを見落とした生徒もいたが、補足説明をすることによりすぐに理解でき、135°、150°の三角比も求めることができた。

さらに、点 P の座標を考えることにより、0°、90°、180°の三角比を求めることができた。

4　アンケートによる授業評価

授業後に、理解度及び授業の感想を記入させた。実施人数は 2 クラス 66 名である。

○　理解度「鈍角の三角比の定義が分かりましたか」

理解度	よく分かった	だいたい分かった	少し分からない	分からない
人数(割合)	29(43.9%)	32(48.5%)	5(7.6%)	0(0%)

○　授業の主な感想

座標を使うと鋭角も鈍角も考え方が同じなのが驚きだった。0°, 90°, 180° はないものをあるものとするので、難しかった。

鋭角も鈍角も同じように求められるのが予想外でした。X軸が負になるのに注意したい。

座標をつかって三角比を表す方が図が頭に入って分かりやすい。

三角比を円を用いて考えることで分かりやすくなることがよく分かりました。鋭角と鈍角での規則を利用することですばやく計算できることも分かりました。

斜辺の長さを固定して円の上で三角比の定義を考えるのは、なるほどと思った。鈍角のときは鋭角のときの三角形をひっくり返して使えることが分かった。

円にのっけて考えていくなんて、画期的だと思いました

三角比と円が密接な関係だったことに驚いた。180°よりも大きくなるとどうなるのか知りたいと思った。

図形の世界にマイナスの符号が出てくるとは思わなかったので、驚いた。

θ > 180°になったらどうなるのか疑問に思った。

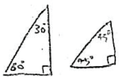
9割以上の生徒が「よく分かった、分かった」としていることから、生徒たちは座標による三角比の定義を自然なものとして受け入れていると考えられる。しかも、授業の感想からは、「鋭角の場合と鈍角の場合は同じ考え方であることが分かった」、「斜辺の長さを固定して円の上で三角比の定義を考えるのは、なるほどと思った」と記述しているように、納得をして定義を受け入れていることが分かる。また、「円を用いることで、三角比が分かりやすくなる」「円を用いる考え方がおもしろかった」、「図形の世界に負の数が出てくるところがおもしろい」という記述が多く見られ、数学のおもしろさにも触れることができたようである。さらに、本時は 180°までの三角比の求め方についての授業だったが、「θ＞180°になったらどうなるのか疑問に思った。」という記述のように、180°より大きい角の三角比に興味を持つ生徒も見られるなど、数学の学習に対する意欲も喚起することができた。

また、単元終了後、「三角比を円を用いて定義することについて、どう思うか」について記入させたところ、以下のような回答が見られた

・　「三角比に対する見方が広がった」と記述した例

「三角」比というので三角形の話かと思っていたら

見方を変えることによってどんどん幅が広がっていくのがすごいと思った。

今回は  の三角形を利用しての数値しかみてないけど、

他の三角形での数値や規則性についても興味をもった。

30°，45°，60°の三角形のつながり的なものを発見できた感じがして，より三角比を理解することができたと思った。一つ一つの三角形を別々に教えてもらうよりも，このようにつながりがあって，sin，cos の大きさの関係もわかって，いいと思った。

- 「三角比の値や性質が分かりやすくなった」と記述した例

一つ一つ丸覚えするのではなくて，鋭角の三角形を覚えて後は，＋，－だけ気をつけておけばよいというのは覚えやすいと思います。
また，図を書くことで同じ三角形を見つけるのが楽でした。一つ一つを頭の中で考えるのは難しいけど，頭の中で図を描いて考えようとすれば，何度もやるうちにできるようになると思います。

座標の上で教わったので，$(\cos\theta, \sin\theta)$ の符号の関係がわかりやすかった。円を描かずに「斜辺ぶんの高さ」というようにやっていたらこんがらがっていたと思う。

公式の意味が，式を見ただけだとさっぱり分からなかったけど，円を使って考えるとスムーズに考えることができた。

- 「他の学習内容との結び付きが分かった」と記述した例

円を用いると，三角比のとり方が分かりやすかったです。座標への符号のつき方が２次関数の「x軸について対称なグラフ」「y軸について対称なグラフ」などと同じで，面白いと思いました。

$\sin(180°-\theta) = \sin\theta$ が等しくなることや90°までの三角比の表で360°まで分かることがすごいと思いました。
２次関数のときに習った第１象限などの考え方が生きました。

「三角比の定義に円を導入することで、三角比に対する見方が広がった」「円周上に図示をすることによって、三角比の値や性質が分かりやすくなった」「座標平面で三角比を考えることによって、２次関数との関連も見えてきて、過去に学んだことが生かされた」などの回答があり、鈍角の三角比の定義を学ぶことによって、生徒たちは数学の奥深さを感じ、数学のおもしろさが実感できたようである。また、１つ１つの直角三角形がつながることで、関数としての考え方の一端を感じるこ

とができたようである。これは、三角比（数学Ⅰ）と三角関数（数学Ⅱ）をつなげる教材としても、有効であることが分かった。

5　実践を振り返って

鋭角の三角比の定義では直角三角形を用いるのに対し、鈍角の三角比は唐突に半円が登場し、座標を用いることに生徒は違和感を覚えていたはずである。中学校までの学習では、図形は多角形や円、立体であり、それを座標を用いて解析することはない。鈍角の三角比の定義は、初めて図形を座標平面上で解析する場面でもある。その違和感を少しでも解消し、納得させることが、おもしろさを味わわせることにもつながる。そして、数学Ⅱの「三角関数」、「図形と方程式」の学習への橋渡しともなる。

今回の取組では、斜辺の長さが等しい直角三角形をいくつか用いて、１つ１つの図形をつなげ、図形の変化を連続的にとらえることによって、頂点の軌跡が円であることを生徒は容易に理解することができた。同時に、角度の変化に伴う底辺や高さの動きも把握できたので、その気付きを生かすことによって、座標平面を見いだすことができ、自然に鈍角の三角比の定義を理解し、納得することができた。これらのことが、見方を変えることのおもしろさ、他の学習内容との結び付きといった数学のおもしろさを実感させることにつながった。単元終了後の生徒の感想から、「見方を変えることによって、どんどん幅が広がっていくのがすごいと思った」、「円を用いると、三角比の取り方が分かりやすかった。座標への符号のつき方が２次関数の『x 軸について対称なグラフ』など同じで、おもしろいと思った。」といったものが得られたことからも分かる。

生徒の理解と納得を得るためには、教科書に書かれていることを分かりやすく説明するだけでは足りない場面がある。生徒の気付きとそれを生かすことが理解と納得を得るためには重要である。生徒の気付きを得るためには、仕掛けが必要であり、今回は教具を用いた。抽象的な内容であるからこそ、具体的なものをつなぎ合わせることで、気付きを得、理解と納得に結び付けることができた。そして、理解と納得から、数学のおもしろさを実感させることができた。

しかし、実際に鈍角の三角比の値を求める段階では、「$\cos\theta$ や $\tan\theta$ は負の数である」ということに戸惑いを感じている生徒も見られた。今後、他の学習の場面でも、今回と同じように、生徒の気付きを生かし、理解と納得を深めさせることで、学習内容のつながりを実感させ、数学のおもしろさに気付かせていく必要がある。