

高等学校における教科指導の充実

数 学

分かる授業の展開の工夫
～数学的活動の充実～

栃木県総合教育センター

平成 22 年 3 月

ま え が き

総合教育センターでは、基礎・基本の確実な定着を図る教科指導の在り方について研究するとともに、その成果を普及することで生徒の学力の向上に資することを目的に、平成 17 年度より、「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」に取り組んでいます。

近年の教育課程実施状況調査や学力に関する国際的な調査では、日本の児童生徒の学力の状況や学習に対する意識などが明らかにされ、文部科学省等からも学力向上のための様々な対策が打ち出されたり提言がなされたりしています。

また、平成 19 年 12 月に公表された、OECD 生徒の学習到達度調査（PISA2006 年）では、科学的リテラシーをはじめ、数学的リテラシー、読解力のそれぞれについて問題点が指摘されています。

さらに、平成 20 年 12 月には、国際教育到達度評価学会（IEA）が行った国際数学・理科教育動向調査の 2007 年調査（TIMSS2007）の結果が公表され、学力低下に歯止めがかかったという分析がある一方で、パターン化された指導の弊害とも見られる結果も一部に見られ、思考力の育成に課題があることも指摘されています。

これらの調査の分析結果を踏まえ、中央教育審議会答申を経て、平成 21 年 3 月には、高等学校の新学習指導要領が告示されました。数学と理科が 24 年度から、国語、地理歴史、公民、外国語が 25 年度から学年進行で実施されます。今回の改訂の主な改善事項として、「言語活動の充実」、「理数教育の充実」が示されました。これらは、先に挙げた各種調査で、思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式の問題、知識・技能を活用する問題に課題が見られたことなどに対する改善策でもあります。

今年度の調査研究においては、新学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえるとともに、各種調査の結果から指摘されている課題の解決を図るための授業改善について、国語科、地理歴史科、数学科、理科、外国語科（英語）の各教科で取り組みました。調査研究を進めるにあたり、御協力いただきました研究協力委員の方々に、深く感謝申し上げます。今後、研究の成果をまとめた本冊子を有効に御活用いただければ幸いです。

平成 22 年 3 月

栃木県総合教育センター所長

瓦 井 千 尋

目 次

はじめに

- 1 調査研究の背景・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1
- 2 数学科における指導の工夫・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 3

「分かる」ことについての生徒の意識と指導の工夫

- 1 「分かること」についての生徒の意識・・・・・・・・・・ 5
- 2 指導の工夫・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 10

- 事例 1** 「不等式の解き方が分かる」ための指導の工夫・・・・・・・・・・ 12

- 事例 2** 「正弦定理が分かる」ための指導の工夫・・・・・・・・・・ 23

- 事例 3** 「場合の数の考え方・求め方が分かる」ための指導の工夫・・・・・・・・・・ 35

- おわりに・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 51

はじめに

1 調査研究の背景

平成 21 年 3 月 9 日に、新しい高等学校学習指導要領が告示された。今回の改訂のポイントとして、次のように、**言語活動の充実、学習習慣の確立**が挙げられる。

＜高等学校学習指導要領 第 1 章 総則（抜粋）＞

第 1 款 1 学校の教育活動を進めるに当たっては、各学校において、生徒に生きる力をはぐくむことを目指し、創意工夫を生かした特色ある教育活動を展開する中で、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得させ、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくむとともに、主体的に学習に取り組む態度を養い、個性を生かす教育の充実に努めなければならない。その際、生徒の発達の段階を考慮して、生徒の言語活動を充実するとともに、家庭との連携を図りながら、生徒の学習習慣が確立するよう配慮しなければならない。

第 5 款 5 教育課程の実施等に当たって配慮すべき事項

(1) 各教科・科目等の指導に当たっては、生徒の思考力、判断力、表現力等をはぐくむ観点から、基礎的・基本的な知識及び技能の活用を図る学習活動を重視するとともに、言語に対する関心や理解を深め、言語に関する能力の育成を図る上で必要な言語環境を整え、生徒の言語活動を充実すること。

新学習指導要領の改訂に際しては、「OECD 生徒の学習到達度調査（PISA 調査）」や、文部科学省が小学校第 6 学年と中学校第 3 学年を対象に行った「全国学力・学習状況調査」など、各種の調査から明らかにされた、次のような課題が反映されている。

- ①思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題、知識・技能を活用する問題に課題（無答率が高い）が見られる。
- ②読解力で成績分布の分散が拡大（成績中位層が減り、低位層が増加）しており、その背景には家庭での学習時間などの学習意欲、学習習慣・生活習慣に課題が見られる。
- ③自分への自信の欠如や自らの将来への不安、体力の低下といった課題が見られる。

特に、教科の指導においては、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得させること、知識及び技能を活用して課題を解決するために必要な思考力・判断力・表現力等を育成することが重視されている。その実現のためには、「**習得・活用・探究**」の**バランスを取った学習活動の展開**が重要である。このことについて、新学習指導要領には、改訂の基本方針として次のように述べられている。

＜高等学校学習指導要領解説 第 1 章 総説 第 2 節 改訂の基本方針（抜粋）＞

②知識・技能の習得と思考力・判断力・表現力等の育成のバランスを重視すること。

確かな学力を育成するためには、基礎的・基本的な知識・技能を確実に習得させること、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくむことの双方が重要であり、これらのバランスを重視する必要がある。

このため、各教科において基礎的・基本的な知識・技能の習得を重視するとともに、観察・実験やレポートの作成、論述など知識・技能の活用を図る学習活動を充実すること、さらに総合的な学習の時間を中心として行われる、教科等の枠を超えた横断的・総合的な課題について各教科等で習得した知識・技能を相互に関連付けながら解決するといった探

究活動の質的な充実を図ることなどにより思考力・判断力・表現力等を育成することとしている。

また、これらの学習を通じて、その基盤となるのは言語に関する能力であり、国語科のみならず、各教科等においてその育成を重視している。さらに、学習意欲を向上させ、主体的に学習に取り組む態度を養うとともに、家庭との連携を図りながら、学習習慣を確立することを重視している。

なお、学習指導要領の改訂に先立って発表された中央教育審議会答申には、言語に関する能力を育成するための、各教科における言語活動として、以下のような具体例が示されている。

＜平成20年1月中央教育審議会答申（抜粋）＞

- ・観察・実験や社会見学のレポート作成において、視点を明確にして、観察したり見学したりした事象の差異点や共通点をとらえて記録・報告する。（理・社）
- ・比較や分類、関連付けといった考えるための技法、帰納的な考え方や演繹的な考え方などを活用して説明する。（数・理）
- ・仮説を立てて観察・実験を行い、その結果を評価し、まとめて表現する。（理）
- ・体験活動を振り返り、そこから学んだことを記述し、まとめたものを発表し合う。（特別活動・総合的な学習の時間）
- ・討論・討議などにより意見の異なる人を説得したり、協同的に議論して集団としての意見をまとめたりする。（特別活動・総合的な学習の時間）

これらのことから、学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえるとともに、各種調査等から指摘されている課題について、その解決を図るための教科指導の工夫改善を目指して調査研究に取り組んだ。3回の調査研究委員会を通して、評価の観点を踏まえた教科指導の在り方について、各教科ごとに研究協議を行った。本書はそれらの取組について、授業実践を中心に報告するものである。

※本冊子の中では、平成11年3月に告示された学習指導要領を「現行の学習指導要領」、平成21年3月に告示された学習指導要領を「新学習指導要領」として記す。

2 数学科における指導の工夫

分かる授業の展開の工夫～数学的活動の充実～

平成 21 年 7 月に「高等学校学習指導要領解説数学編」が示された。ここでは、「第 1 章 総説」のなかの「第 1 節 改訂の趣旨」において、「(1) 高等学校における数学教育の意義」という項が新設された。これは、小・中学校における全国学力・学習状況調査、高等学校における教育課程実施状況調査、国際学力調査等の結果から得られた課題の 1 つである「子どもたちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である」ことを受けたものである。その項では、次のように示されている。

高等学校における数学教育においては、数学的な知識や技能の「量」だけでなく、いかにしてそれらを身に付けたのかなど学習の「質」を問う必要がある。それは、様々な場面で身に付けた知識や技能を活用しようとするとき、それらを身に付けたときの学習の「質」が影響するからである。

(中略)

高等学校数学科では、数学の学習を単に内容の習得にとどめるのではなく、数学的活動を重視し、すべての高校生の人間形成に資する数学教育を意図している。

(「高等学校学習指導要領解説数学編」から抜粋)

そこで、今回の調査研究では、数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるように、生徒が「分かった」と実感できる授業展開の工夫に取り組んだ。これは、数学の学習の「質」の向上を目指すことに他ならない。そして、その方策としては、新学習指導要領でも述べられている「数学的活動の充実」を柱に授業の実践に取り組むこととした。

また、生徒が考える「分かる」ことについての意識について、その実態を調査した。そこでは、数学を学習することによって身に付く力、分かることとできることについての意識、さらに、授業の中で「分かった」と思えた場面について調査した。その調査結果をもとに、指導のポイントを明確にし、不等式の解き方について、正弦定理について、場合の数の考え方・求め方についての指導の工夫・改善に取り組んだ。

本書で示す各事例における授業のねらい、教材、授業展開等は、実践者である研究協力委員の学校の実態に合わせて設定したものである。また、各事例は、2、3 時間の扱いとして作成したが、現実には、その時間の中だけで数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感させたりすることは難しく、さらに、継続して指導する必要がある。各事例の中から、それぞれの指導の趣旨を読み取り、各学校で活用していただきたい。

各事例の内容は、次のとおりである。

事例 1 「不等式の解き方が分かる」ための指導の工夫

1 次不等式の指導においては、不等式の性質の学習後に 1 次不等式の解法を学習していた。しかし、数の大小関係として学習する不等式の性質を、範囲を求める 1 次不等式の解法に結びつけることが難しく、生徒の理解も十分ではなかった。そこで、その矛盾を解消し、1 次不等式の解法の理解を深めるために、1 次不等式の解法を生徒自身に考察させる過程で、不等式の性質を導き出させることにした。生徒自身が発見した不等式の性質として理解を深め、さらには、1 次不等式の解法の理解、定着に結びつくように

工夫した。

事例2 「正弦定理が分かる」ための指導の工夫

正弦定理、余弦定理等の指導においては、問題解決のために活用の仕方を理解させることが中心となり、定理そのものの理解が十分ではなかった。そこで、活動を通して、生徒自身が三角形の辺の長さや角の大きさの関係を見出し、そこから正弦定理を導き出せるような指導の工夫に取り組んだ。具体的な課題から一般的な課題へと発展していく際に、活動の中で見出した関係との結びつきが分かるようにすることで、正弦定理のよさ、さらには、数学的な性質を考察していくよさを生徒が実感し、正弦定理の理解が深められるようにした。

事例3 「場合の数の考え方・求め方が分かる」ための指導の工夫

場合の数を求める際には、「もれなく数えること」、「重複なく数えること」が重要である。しかし、生徒は、学習が深まるにしたがって、「順列」と「組合せ」にこだわり、場合の数の考え方・求め方の原則を忘れてしまう。そこで、間違いやすい問題を設定し、その間違っただ理由を生徒自身が考える過程を通して、場合の数を求める際の考え方と、順列と組合せの違いが実感を持って分かることをねらいとして指導の改善に取り組んだ。考える過程では、グループによる学習を取り入れ、様々な見方、考え方にふれながら考察できるように配慮した。

<研究協力委員>

栃木県立鹿沼高等学校	教諭	大貫宏明
栃木県立小山北桜高等学校	教諭	今井小波子
栃木県立烏山高等学校	教諭	竹中謙介

<研究委員>

栃木県総合教育センター	研修部	副主任	植木淳
栃木県総合教育センター	研究調査部	指導主事	寺崎義人

「分かる」ことについての生徒の意識と指導の工夫

1 「分かる」ことについての生徒の意識

生徒の「分かる」ことについての意識を把握するために、数学の授業についての意識、数学を学ぶことについての意識に関して質問紙による調査を実施した。調査の対象は、研究協力委員及び教職5年目研修の受講者が勤務する学校の第1学年の生徒である。調査の内容は、数学を学習することによって身に付く力、授業の理解度、「分かる」と「できる」ことについての意識、「分かる」ことについての意識、数学の学習をする上での意識について選択肢による質問によって、生徒の意識の実態を把握した。

(1) 調査の実施について

①対象・実施時期等

対 象：研究協力委員が勤務する学校の第1学年の生徒 528名
教職5年目研修数学科の受講者が勤務する学校の第1学年の生徒 439名
合計 967名

実施時期：平成21年6月

時 間：おおむね15分程度

②質問紙について

2種類の質問紙A、Bを用意した。質問紙Aで調査した生徒が506名、質問紙Bで調査した生徒が461名である。クラスによって質問紙を変えた。抽出したクラスは無作為である。

質問紙A、Bでは、問1、問2を共通の質問事項として、数学を学習することによって身に付く力について、授業の理解度と問題を解く力について質問した。数学を学習することによって、どのような力が身に付くと感じているのかを生徒の目線で確認した。また、「授業は分かるが、問題を解くのは難しい」という生徒がいることを感じている教師は多くいる。そこで、このことについての生徒の意識の把握に努めた。

質問紙Aでは、問3以降で、「分かる」と「できる」ことについての意識、「分かった」と感じた経験やその場面について質問した。

質問紙Bでは、問3以降で、数学を学習する上での意識について確認した。「数学とは、公式や解法のテクニックやパターンを覚えてそれを使って答えを出すことである。」というような、生徒が日頃感じているであろうと思われる数学の学習に対する望ましくない考え方について、質問した。

(2) 調査結果

①「数学を学習することによって身に付く力」、「授業の理解度と問題を解く力」について

質問紙A、Bに共通して、問1、問2で「数学を学習することによって身に付く力」、「授業の理解度と問題を解く力」を確認した。

問1 数学を学習することによって、どのような力が一番身に付くと思いますか。

- ア 論理的に考える力 イ 表現する力
ウ 問題を解く力 エ 計算する力
オ その他（ ）

回答	ア 論理的に 考える力	イ 表現する 力	ウ 問題を解 く力	エ 計算する 力	オ その他
回答数(回答率)	291 (30.1%)	37 (3.8%)	297 (30.7%)	321 (33.2%)	21 (2.2%)

(回答総数 967)

「数学を学習することによって一番身に付く力」についての主な回答は、「計算する力」、「問題を解く力」、「論理的に考える力」の3つに分かれた。また、新学習指導要領で求められている力のうちの1つである「表現する力」と回答する生徒はごく少数であった。数学の学習をすることによって、「計算する力」が身に付く、「問題を解く力」が身に付くと考えている生徒の合計は、全体の63.9%であった。

問2 今、学校で受けている数学の授業の内容の理解度と問題を解くことについて

- ア 数学の授業の内容は分かるし、問題を解くこともできる。
イ 数学の授業の内容は分かるが、問題を解くことができない。
ウ 数学の授業の内容は分からないが、問題を解くことができる。
エ 数学の授業の内容は分からないし、問題を解くこともできない。

回答	ア 分かるし、解 ける	イ 分かるが、解 けない	ウ 分からないが、 解ける	エ 分からないし、 解けない
回答数 (回答率)	318 (32.9%)	447 (46.2%)	88 (9.1%)	114 (11.8%)

(回答総数 967)

「授業の理解度」については、「授業が分かる」と回答した生徒（アまたはイと回答した生徒）は、全体の79.1%であった。予想を上回る回答であった。しかし、「分かるが、解けない」、「分からないし、解けない」と回答した「解けない」と感じている生徒（エまたはイと回答した生徒）は全体の58.0%であった。

②「分かる」ことと「できる」ことについての意識、「分かった」と感じた経験やその場面について（質問紙A）

問3 数学が「分かる」ことと「できる」ことは同じだと思いますか？違うと思いますか？

- ア 同じことだと思う イ 違うことだと思う

回答	ア 同じこと	イ 違うこと
回答数 (回答率)	102 (20.2%)	404 (79.8%)

(回答総数 506)

約8割の生徒が「分かる」ことと「できる」ことは異なると感じている。

質問紙Aで調査した生徒506名について、問2の回答毎の問3の回答状況とみると（次表参照）、全体の問2の結果とほぼ同様の結果が得られた。その中で、問2で「ア 分かるし、解ける」と回答した生徒（全体の35.2%）のうち、77.0%の生徒が問3で「イ 違うこと」と回答している。すなわち、「授業は分かるし、問題も解ける」と考えている生徒の多くは、「分かることとできる

ことは違うことである」という認識を持っていることが分かる。また、特に顕著であったのは、少数ではあるが問2で「ウ 分からないが、解ける」と回答した生徒（全体の 7.9%）のうち、95.0%の生徒が問3で「イ 違うこと」と回答していることである。

問2の回答		問3の回答	
ア 分かるし、解ける	178 (35.2%)	ア 同じこと	41 (23.0%)
		イ 違うこと	137 (77.0%)
イ 分かるが、解けない	229 (45.2%)	ア 同じこと	40 (17.5%)
		イ 違うこと	189 (82.5%)
ウ 分からないが、解ける	40 (7.9%)	ア 同じこと	2 (5.0%)
		イ 違うこと	38 (95.0%)
エ 分からないし、解けない	59 (11.7%)	ア 同じこと	19 (32.2%)
		イ 違うこと	40 (67.8%)

(回答総数 506)

問4 数学の授業中に「分かった」と感じることはありますか？

ア よくある イ 時々ある ウ あまりない エ ほとんどない

回答	ア よくある	イ 時々ある	ウ あまりない	エ ほとんどない
回答数 (回答率)	125 (24.7%)	316 (62.5%)	48 (9.5%)	17 (3.4%)

(回答総数 506)

数学の授業中に「分かった」と感じることはあると肯定的に捉えている生徒（アまたはイと回答した生徒）は、全体の 87.2%であった。多くの生徒が、数学の授業中に「分かった」と感じている。

問5 数学が「分かった」と一番思えるのはどのようなときですか。または、どのようなときだと一番思いますか。

- ア 問題を解いて正解が求められたとき
 イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき
 ウ 教科書や参考書を読んでいて納得できたとき
 エ 自分で考えて納得できたとき
 オ その他（ ）

回答	ア 問題を解いて正解が求められたとき	イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき	ウ 教科書や参考書を読んでいて納得できたとき	エ 自分で考えて納得できたとき	オ その他
回答数 (回答率)	157 (31.0%)	239 (47.2%)	22 (4.3%)	84 (16.6%)	4 (0.8%)

(回答総数 506)

数学の授業中「分かった」と思えるのは、「イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき」という回答が最も多く、47.2%であった。ほぼ半数の生徒が、先生や友達の説明を聞いて「分かった」と思えたようである。また、「ア 問題を解いて正解が求められたとき」とする回答も多く、31.0%であった。これは、「エ 自分で考えて納得できたとき」の約2倍になる。考えて納得するよりも正解が求められたかどうかにかかわらず、「分かる」ことを感じている生徒が多いことが分かる。

また、問4の回答毎の問5の回答状況を見ると（次表参照）、問4で数学の授業中「分かった」と感じるがあると肯定的に捉えている生徒（**ア**または**イ**と回答した生徒）は、問5の回答に大きな差はない。しかし、問4で否定的に捉えている生徒（**ウ**または**エ**と回答した生徒）は、問5では、「**エ** 自分で考えて納得できたとき」が増え、「**イ** 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき」という回答の割合が減っている。

問4の回答	問5の回答	
ア よくある 125 (24.7%)	ア 問題を解いて正解が求められたとき	45 (36.0%)
	イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき	59 (47.2%)
	ウ 教科書や参考書を読んでいて納得できたとき	4 (3.2%)
	エ 自分で考えて納得できたとき	17 (13.6%)
	オ その他	0 (0.0%)
イ 時々ある 316 (62.5%)	ア 問題を解いて正解が求められたとき	95 (30.1%)
	イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき	158 (50.0%)
	ウ 教科書や参考書を読んでいて納得できたとき	12 (3.8%)
	エ 自分で考えて納得できたとき	51 (16.1%)
	オ その他	0 (0.0%)
ウ あまりない 48 (9.5%)	ア 問題を解いて正解が求められたとき	13 (27.1%)
	イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき	18 (37.5%)
	ウ 教科書や参考書を読んでいて納得できたとき	6 (12.5%)
	エ 自分で考えて納得できたとき	11 (22.9%)
	オ その他	0 (0.0%)
エ ほとんどない 17 (3.4%)	ア 問題を解いて正解が求められたとき	4 (23.5%)
	イ 授業中、先生や友達の説明を聞いて納得できたとき	4 (23.5%)
	ウ 教科書や参考書を読んでいて納得できたとき	0 (0.0%)
	エ 自分で考えて納得できたとき	5 (29.4%)
	オ その他	4 (23.5%)

③数学を学習する上での意識について（質問紙B）

次の質問について、あてはまるものを次の**ア**、**イ**、**ウ**、**エ**から選んでください。

ア そう思う **イ** おおむねそう思う **ウ** あまりそう思わない **エ** そう思わない

問3 数学とは、公式や解法のテクニックやパターンを覚えてそれを使って答えを出すことである。

問4 答えさえ合っていれば、途中の計算過程を省略したり、少々それが間違っていたりしてもかまわない。

問5 数学の学習では、「点数がとれる」ようになることが重要である。

問6 問題を解くときには、図やグラフを書くことはあまり好きではないし、意味がないと思う。とにかく計算でやろうとする。

問7 たとえば、分数の割り算をするとき分母と分子をひっくり返してかけるとか、（マイナス）×（マイナス）＝（プラス）などのように、知っていて使えるが、実はその理由がよくわからないことがある。

問8 数学はとにかく答えが出ればよいので、別解を考えることはあまり意味がない。

問9 問題をじっくり考える習慣はない。ちょっと考えて、分からなければ解答を安易に見たり、あるいはすぐあきらめて放棄したりしてしまう。

結果は、次の表のとおりである。

回答（回答率）	ア そう思う	イ おおむねそう 思う	ウ あまりそう思 わない	エ そう思わない
問 3	95 (20.6%)	272 (59.0%)	77 (16.7%)	17 (3.7%)
問 4	44 (9.5%)	93 (20.2%)	204 (44.3%)	120 (26.0%)
問 5	86 (18.7%)	222 (48.2%)	124 (26.9%)	29 (6.3%)
問 6	35 (7.6%)	95 (20.6%)	238 (51.6%)	93 (20.2%)
問 7	77 (16.7%)	153 (33.2%)	136 (29.5%)	95 (20.6%)
問 8	43 (9.3%)	131 (28.4%)	228 (49.5%)	59 (12.8%)
問 9	59 (12.8%)	151 (32.8%)	191 (41.4%)	60 (13.0%)

(回答総数 461)

「数学とは、公式や解法のテクニックやパターンを覚えてそれを使って答えを出すことである。」(問3)、「数学の学習では、『点数がとれる』ようになることが重要である。」(問5)という問いに対しては、数学の学習に対して否定的な回答（アまたはイの回答）が多かった。このことから、数学は、「公式や解法のテクニックやパターンを覚えて、そして、点数がとれるようになること」という認識を持っている生徒が多いことが分かる。この問3、問5の回答状況を見ると、次の表のようになった。表から、問3でアまたはイと回答した生徒は、問5でもアまたはイと回答する生徒が多い。すなわち、「数学とは、公式や解法のテクニックやパターンを覚えてそれを使って答えを出すことである。」ということと、「数学の学習は、『点数がとれる』ようになることが重要である。」ということは、相関が強いということである。

問3の回答	問5の回答	
ア そう思う 95 (20.6%)	ア そう思う	34 (35.8%)
	イ おおむねそう思う	41 (43.2%)
	ウ あまりそう思わない	17 (17.9%)
	エ そう思わない	3 (3.1%)
イ おおむねそう思う 272 (59.0%)	ア そう思う	40 (14.7%)
	イ おおむねそう思う	148 (54.4%)
	ウ あまりそう思わない	76 (27.9%)
	エ そう思わない	8 (2.9%)
ウ あまりそう思わない 77 (16.7%)	ア そう思う	9 (11.7%)
	イ おおむねそう思う	33 (42.8%)
	ウ あまりそう思わない	25 (32.5%)
	エ そう思わない	10 (13.0%)
エ そう思わない 17 (3.7%)	ア そう思う	3 (17.6%)
	イ おおむねそう思う	0 (0.0%)
	ウ あまりそう思わない	6 (35.3%)
	エ そう思わない	8 (47.1%)

また、「答えさえ合っていれば、途中の計算過程を省略したり、少々それが間違っていたりしてもかまわない。」(問4)、「問題を解くときには、図やグラフを書くことはあまり好きではないし、意味がないと思う。とにかく計算でやろうとする。」(問6)という問いに対しては、数学の

学習に対する望ましい考え方を回答（ウまたはエの回答）する生徒が多かった。

問題解決の場面において、途中の計算を丁寧に追い、時には図やグラフをかいて問題の解決を図ろうとする態度や意識は育成されつつあるものの、それらの態度や意識の裏には、解法のパターンを覚えて、テストで点数を取ることが主たる目的になっていることがうかがえる。点数を取ろうとする気持ちをもつことは悪いことではないが、それだけに偏ってはいは、数学的な見方や考え方、数学のよさを感じることに結びついていかないので、指導の際には十分留意する必要がある。

2 指導の工夫

質問紙による調査からは、次の5つのことが課題として挙げられる。

- 数学を学習することによって一番身に付く力は「計算する力」「問題を解く力」と考えている生徒が多い。
- 数学の授業の内容は分かるが、問題を解くことができないと感じている生徒が半数近くいる。
- 数学が「分かった」と思えるのは、問題を解いて正解が求められたときと考えている生徒が3割程度いる。これは、考えて納得できたときと回答した生徒の約2倍になる。
- 数学は、公式や解法のテクニックやパターンを覚えてそれを使って答えを出すことだと考えている生徒が多い。
- 数学の学習は「点数がとれる」ようになることが重要であると考えている生徒が多い。

これらの課題を改善するために、指導の工夫として次の2点に着目した。

数学を学習することによって、「計算する力」、「問題を解く力」が身に付き、また、数学が「分かった」と思えるのは問題を解いて正解が求められるときであると感じている生徒が多い背景には、数学の学習の進め方に課題がある。数学の学習では、計算をして問題を解くことが求められる。また、問題を解く際には、当然のこととして、誤答よりも正答が求められている。小学校、中学校、高等学校の算数・数学の学習を通して、生徒は常にそれを求められてきた。その結果が、今回の質問紙の回答状況に表れている。しかし、数学の授業においては、正答を確認するだけではなく、誤答である原因を理解すること、誤答に至った背景を理解することも大切なことである。そこに、授業改善のポイントがある。

また、数学の授業の内容は分かるが問題を解くことができないこと、数学は公式や解法のテクニックやパターンを覚えてそれを使って答えを出すこと、数学の学習は「点数がとれる」ようになることが重要であると感じていることの間には、それぞれ深い関連があると考えられる。公式や解法のテクニックやパターンを覚え、ペーパーテストで点数をとろうとすることで、授業の場面では分かったと思って、実際には表面的な理解にとどまり、時間が経過すると問題を解けなくなってしまう状態になってしまっていると考えられる。そこで、公式や解法の手順の深い理解、すなわち、本来の「数学が分かった」状態にするために、試行錯誤を繰り返し、生徒自身の頭と手によって数学を学習していくことが必要となる。したがって、授業の中で、教師による一方的な説明に終始することなく、生徒の活動を通して、生徒自身に数学的な性質、公式、解法の手順を発見させるような授業展開の工夫が重要となる。

さらに、質問紙による調査から、次のことが読み取れる。

- 分かることとできることは違うという認識を持っている生徒が多数いること
- 数学の授業の中で分かったと感じることのある生徒が多数いること
- 数学が分かったと思えるのは先生や友達の説明を聞いて納得できたときと感じている生徒が多数いること

これらの回答からは、生徒の「分かるようになりたい」というメッセージが伝わってくる。分かるが問題が解けないと感じている生徒、分からないが問題が解けると感じている生徒のためにも、授業の中で「分かった！」と感じさせることが重要になる。そのためには、「数学が分かったと思えるのは先生や友達の説明を聞いて納得できたとき」と感じている生徒が多数いることを有効に活用することが考えられる。授業の中で教師が一方的に説明するのではなく、生徒同士の話し合いの場面を設定することや教師の発問の工夫が授業改善のポイントとなる。

以上のような授業の改善のポイントを踏まえて、実践に取り組んだ。

事例 1

「不等式の解き方が分かる」ための指導の工夫

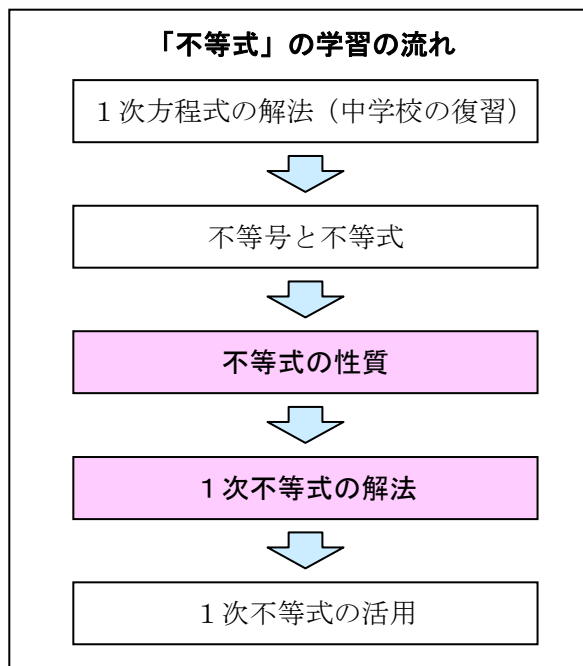
1 事例の概要

(1) 不等式の指導について

不等式の学習は、平成 14 年の学習指導要領の改訂の際に、中学校から高等学校へ移行された。1 次不等式を指導するようになって平成 21 年度で 7 年になるが、指導の成果が上がらず、不等式を苦手とする生徒は、年々増えているように感じる。そこで、不等式の指導の在り方を見直し、生徒が「分かった」と実感できる授業の実践を目指して取り組んだ。

不等式の学習は、教科書会社によって多少の前後はあるが、おおむね右のような流れで進む。

授業をしていて毎年説明に苦しむところは、不等式の性質は数の大小関係を表す不等号（不等式）に対するものであるにもかかわらず、範囲を表す不等式（1 次不等式）にその不等式の性質を適用するところである。不等式の性質は、多くの教科書では、数直線を用いての説明や、具体的な数字を用いての説明であることが多く、そのため、生徒も直感的な理解が深まる。しかし、1 次不等式の解法では、数の大小関係ではなく範囲を表す不等式であること、すなわち、式の中に x が含まれることから、不等式の性質と同じように数直線を用いて説明することが困難であり、そのため、イメージが湧かずに苦勞する生徒が多い。特に、不等式の両辺に負の数をかけたり、両辺を負の数で割ったりすることを忘れてしまうことが多い。何とかしてイメージを持たせるために、図を用いて説明しても、逆に分かりにくくなってしまうことが多かった。



生徒は、数の大小関係を表す不等式と範囲を表す不等式の理解に壁を感じており、それが障害となって、不等式を苦手と感じている。そこで、この 2 つの不等式の関係に配慮しながら、不等式の性質と 1 次不等式の解法をスムーズにつなげるための指導計画を作成した。また、不等号と不等式の指導の際には、「高等学校教科指導の充実 『範囲の概念』の形成を促す指導の工夫」（栃木県総合教育センター 平成 19 年 3 月）を参考に、範囲の考え方や範囲を表す不等式についての学習を進めることにした。

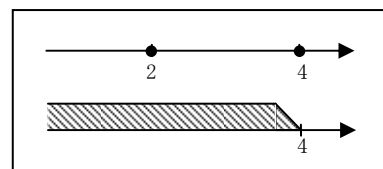
(2) 不等式の学習における「分かる」指導について

不等式の学習で理解させたいことは、次のようにまとめることができる。

不等式の学習で「理解させたいこと」

- ・数の大小関係を表す不等式と範囲を表す不等式の数直線上の表現の違い
- ・範囲
- ・不等式の式による表現、数直線による表現、言葉による表現の関係
- ・不等式の中の文字の意味
- ・不等式の解の意味
- ・1 次不等式の解法
- ・1 次不等式の解法にもとづく、不等式の性質
- ・連立不等式の解の意味とその解法
- ・不等式を活用すること

数の大小関係を表す不等式（例 $2 < 4$ ）と範囲を表す不等式（例 $x < 4$ ）を数直線上で表現すると右図のようになる。不等式の理解を深めるためには、2つの不等式を数直線上に表現したときに違いがあることについて配慮するとともに、範囲の概念の形成を促しながら進める必要がある。このことが、前述した不等式の学習で「分かってほしいこと」のうちの「数の大小関係を表す不等式と範囲を表す不等式の数直線上の表現の違い」、「範囲」、「不等式の式による表現、数直線による表現、言葉による表現の関係」に相当する。



また、不等式の性質と1次不等式の解法についても、これらの関係を踏まえて、範囲を表す不等式としての性質として、不等式の性質を理解するとともに、不等式の解法を理解する必要がある。

さらに、不等式の表現方法、不等式の解の意味、不等式の解法を理解するとともに、不等式の性質の理解を踏まえて、連立不等式の解の意味とその解法を理解し、具体的な事象の考察にあたって不等式を活用することができるようにしたい。

2 指導計画

（1）単元「不等式」の計画

不等式の性質と1次不等式の解法の理解を深めるために、「不等号と不等式」の学習後に「不等式の性質」を学習するのではなく、1次不等式の解法を考える過程を通して、生徒自身に不等式の性質を導き出させることにした。そうすることで、不等式の性質が不等式を解く上で必要不可欠なものであることを実感させることができるとともに、その性質は生徒自らが導き出したものであることから、理解がより深まると考えられる。

①単元の目標

数の大小関係を表す不等式と範囲を表す不等式についての違いを理解させる。その上で、不等式の中の文字や不等式の解の意味、不等式の解法を理解させ、それらを活用できるようにさせる。

②単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
① 数量の関係を不等式で表すことのよさをとらえようとする。 ② 具体的な事象の考察に1次不等式を活用しようとする。	① 不等号の性質を等号の性質と対比してとらえることができる。 ② 1次不等式の解について、数直線と対比したり、いろいろな数値を代入したりして考察することができる。 ③ 1次不等式の解き方を考察する過程で、不等式の性質を考察することができる。	① 範囲を数直線、式、言葉で表現することができる。 ② 数量の関係を1次不等式で表現することができる。 ③ 1次不等式を解くことができる。 ④ 1次不等式の解を数直線上に表現することができる。	① 範囲の数直線、式、言葉による表現を関連付けて理解している。 ② 不等式の中に含まれている文字の意味を理解している。 ③ 不等式の性質を理解している。 ④ 1次不等式とその解の意味を理解し、解を求めるための基礎的な知識を身に付けている。

③単元の指導計画

時 間	学 習 内 容	指導上の留意点	評価規準
第 1 時間	1 次方程式の解法 ・ 1 次方程式の解について ・ 等式の性質について ・ 1 次方程式の解法	・ 方程式の解、等式の性質については、不等式の解、不等式の性質との比較が可能となるように、丁寧に扱う。	
第 2 時間	不等号と不等式 ・ 数の大小関係を表す不等式について ・ 範囲について ・ 範囲を表す不等式について	・ 言葉による表現、式による表現、数直線による表現を相互に関わらせることで、範囲を表す不等式についての理解を深める。 (『「範囲の概念」の形成を促す指導の工夫」P9～P13 参照)	㉒、㉑、㉔、 ㉑、㉒
第 3 ・ 4 時間 (実践例)	1 次不等式の解法と不等式の性質 ・ 両辺に同じ数を加えたり、両辺から同じ数を引いたりして解く不等式の解法と不等式の性質 ・ 両辺に同じ数をかけたり、両辺を同じ数で割ったりして解く不等式の解法と不等式の性質	・ 生徒の活動を中心にして、生徒自らが不等式の性質に気づき、内容を整理できるように配慮する。 ・ 不等式の性質は、等式の性質と比較検討するように促す。	㉑、㉓、㉔、 ㉓
第 5 ・ 6 時間	1 次不等式の活用 ・ 連立不等式の解法 ・ 1 次不等式の応用	・ 数直線を利用して、連立不等式の解を視覚的に明らかにしながら解決を図る。また、1 次不等式の応用では、実生活に即した題材を提供するとともに、生徒自身に問題作りに取り組ませ、理解を深める。	㉑、㉒、㉔ ㉒
第 7 時間	問題演習		㉔、㉒

* 1 次方程式は単元「不等式」には含まれないが、不等式の学習とのつながりを考慮して、指導計画の中に含めた。

(2) 第 3 ・ 4 時間「1 次不等式の解法と不等式の性質」の計画

①第 3 ・ 4 時間の目標

1 次不等式の解法を考察する過程で、不等式の性質を導くことができる。また、不等式の性質にもとづいた不等式の解法を理解することができる。

②第 3 ・ 4 時間の計画

	学習活動	学習のねらい	指導上の留意点
導 入	不等号と不等式の確認	前時の学習内容の定着度を確認する。	言葉による表現、式による表現、数直線による表現の相互関係を理解しているかどうか確認する。
展 開	不等式の解法 1 ・ 不等式の性質 I $A < B \iff A + C < B + C$ $A < B \iff A - C < B - C$ (ワークシート①)	不等式の解を考える過程を通して、不等式の性質 I に気付くことができる。	個人による演習と 4 人程度のグループによる演習を設定し、気付いたこと、考えたことを協議し、グループとしての意見をまとめさせる。

	不等式の解法 2 ・不等式の性質Ⅱ $A < B \quad C > 0 \iff AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$ (ワークシート②) 不等式の解法 3 ・不等式の性質Ⅱ $A < B \quad C < 0 \iff AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$ (ワークシート③)	不等式の解を考える過程をと おして、不等式の性質Ⅱに気 付くことができる。	個人による演習と 4 人程 度のグループによる演習 を設定し、気付いたこと、 考えたことを協議し、グル ープとしての意見をまと めさせる。
	不等式の性質のまとめ	不等式の性質Ⅰ、Ⅱの確認を するとともに、不等式の性質 を活用した不等式の解法の理 解を深める。	不等式の解法 1、不等式の 解法 2、不等式の解法 3 か ら得られた結果を不等式 の性質としてまとめさせ る。
まとめ	小テストと授業の振り返り	学習内容の理解度を小テス ト、振り返りシートで確認す る。	小テストを実施し、理解状 況を把握するとともに、振 り返しシートを用いて授 業の振り返りを行わせる。

③教材（ワークシート）

i) ワークシート①

不等式ワークシート①（不等式の解法 1） 1 年 組 N o 氏名

○次の不等式について考えてみよう。

$x \geq 4$

この式を満たす x は
 など

→

これを言葉で表すと

$x + 3 \geq 5$

この式を満たす x は
 など

→

これを言葉で表すと

↓

これを式で表すと

このように不等式を満たす x の値の範囲を求めることを、 という。

問 1 次の不等式を解いてみよう。

(1) $x + 2 \geq 6$
(2) $x - 1 \leq 8$

○問 1 はどのように解きましたか。

○問 1 から、不等式を解く際にどのような性質があると思いますか。

○問 1 のまとめ

ii) ワークシート②

不等式ワークシート② (不等式の解法 2) 1年 組 N o 氏名

○ 次の不等式の解を考えてみよう。
 $2x \geq 4$

この式を満たす x は

など

これを言葉で表すと

↓

これを式で表すと

$3x \geq -9$

この式を満たす x は

など

これを言葉で表すと

↓

これを式で表すと

○ 2つの不等式の解から分かることはどんなことですか。

問 2 次の不等式を解いてみよう。
 (1) $2x \geq 6$ (2) $5x \leq 20$ (3) $2x \geq -6$

○ 問 2 から、不等式を解く際にどのような性質があると思いますか。

○ 問 2 のまとめ

iii) ワークシート③

不等式ワークシート③ (不等式の解法 3) 1年 組 N o 氏名

問 3 次の不等式を解いてみよう。
 $-2x \geq -6$

○ 問 3 はどのように解きましたか。

○ 問 3 の解を考えてみよう。
 $-2x \geq -6$

この式を満たす x は

など

これを言葉で表すと

↓

これを式で表すと

○ 最初に解いた結果と、次に解いた結果の違いについて気付いたことを書いてみよう。

○問3から、不等式を解く際にどのような性質があると思いますか。

問4 次の不等式を解いてみよう。

(1) $-3x \geq 6$

(2) $-5x \leq 20$

(3) $-4x \leq -8$

○不等式の性質のまとめ

3 授業記録

(1) 不等式の解法1

前時の学習内容である不等式を数直線上に表現すること、数直線上に表現された範囲を不等式で表現することを確認したところ、理解の程度は概ね良好であった。その後、ワークシート①を配布し、不等式の解法1についての学習に取り組ませた。

導入となる「 $x \geq 4$ 」について右のような解答があった。多くの生徒は「4、5、6、7」と解答したが、中には「7、10、14、100、…」等の数字を選んだ解答もあった。また、言葉による表現も「 x は4以上」という解答がほとんどで、数名の生徒は「4より大きい」、「5以上」という解答であった。授業中に確認できた生徒については、個別に指導した。

また、「 $x+3 \geq 5$ 」についても、多くの生徒が「2、3、4、5」と解答したが、この問題でも、中には「7、8、9、10、…」等の数字を選んだ解答もあった。言葉による表現も「 x は2以上」という解答が多かったが、境界の数である「2」が思い浮かばなかった何人かの生徒は、「 x は3以上」、「 x は4以上」と解答していた。この活動から、生徒は境界の数字を見つけ出すことが重要であることに気付いたようである。

これらの活動を通して、不等式の解が方程式の解と異なり範囲を求めることであることを実感したようである。ただし、 x を具体的な整数として考えたので、範囲ではなく複数の数字が解になると錯覚してしまった生徒もいた。数直線上に解を表現することで、再度説明し直し、不等式の解について確認した。

生徒の主な解答

○次の不等式について考えてみよう。

$x \geq 4$

この式を満たす x は

4 5
7 10 など

これを言葉で表すと

x は4以上

$x+3 \geq 5$

この式を満たす x は

2 3
5 8 など

これを言葉で表すと

x は2以上

これを式で表すと

$x \geq 2$

○次の不等式について考えてみよう。

$x \geq 4$

この式を満たす x は

5 14
18 100 など

これを言葉で表すと

x は5以上→4以上

$x+3 \geq 5$

この式を満たす x は

2 4
5 10 など

これを言葉で表すと

x は2以上

これを式で表すと

$x \geq 2$

次に、問1に取り組ませ、その解き方を言葉で表現させた。等式の性質と同様に「移項して解いた」と表現した生徒も数名いたが、下のような記述が多かった。2つの例の解法をもとにして、境界の点を探し、不等式を満たす x を具体的に考えていたようである。

生徒の主な記述

x に2をたして6以上になるものをさがした。

数直線にして解いた。

$x+2$ が6以上の数になることは、 x をたすに6に6より2を引いた、4である。
つまり、 x が表す最小の数値は4。つまり4以上の数である。答えになる

ここまでの結果をもとに、座席が近い生徒4人を1つのグループとして、「不等式を解く際にどのような性質があるか」を話し合わせた。多くのグループで、すぐに「方程式と同じように移項することができる」という結論に達した。しかし、「両辺に同じ数を加えても、両辺から同じ数を引いても不等式が成り立つ」という結論を導くことはできなかった。そこで、再度考えさせたところ、「足したり、引いたりしたものは移項できる。」という意見がすぐに出された。それを、問1のまとめとして記入させた。

(2) 不等式の解法2

続いてワークシート②を配布し、不等式の解法2についての学習に取り組んだ。不等式の解法2では、両辺を同じ正の数で割れることに気付かせることをねらいとしている。

不等式の解法1で解法に慣れた生徒にとっては、それほど抵抗がないものと考えていたが、特に「 $3x \geq -9$ 」を満たす x の値を考えることが難しかったようである。小さい数(-3)から順に並べることができない生徒が多く、なかには負の数考えることができなかった生徒もいた。不等式を満たす x の値を正確に求めることができない生徒も、両辺を3で割ることができると考えて不等式の解を導いていた。

授業では、不等式を満たす x の値を確認しながら、丁寧に指導した。

解を確認した後に、この2つの不等式の解から分かることはどんなことをクラス全体に問いかけた。多くの生徒が、「両辺を同じ数で割ることができる」ことに気付いていた。しかし、それが正の数の場合だけであることに気付いた生徒はいなかった。

生徒の主な解答

○次の不等式の解を考えてみよう。

$$2x \geq 4$$

この式を満たす x は

3 5
8 10 など

これを言葉で表すと

x は 2以上

これを式で表すと

$$x \geq 2$$

$$3x \geq -9$$

この式を満たす x は

1 2
0 5 など

これを言葉で表すと

これを式で表すと

$$x \geq -3$$

○次の不等式の解を考えてみよう。

$$2x \geq 4$$

この式を満たす x は

2 3
4 5 など

これを言葉で表すと

2以上

これを式で表すと

$$x \geq 2$$

$$3x \geq -9$$

この式を満たす x は

0 1
-2 -3 など

これを言葉で表すと

-3以上

これを式で表すと

$$x \geq -3$$

その後、問2に取り組ませ、さらに、不等式の性質まで考えさせた。ほぼすべての生徒が性質まで記入することができた。多くの生徒が右のように、「両辺を同じ数でわれる」と記入していたが、具体的な数「2や3や5でわれる」と記入していた生徒もいた。不等式の解法3において不等式の性質を考える際の大きなヒントになると考えた。

生徒の主な記述

両辺も同じ数でわれる。

2や3 でわっても OK!

(3) 不等式の解法3

ワークシート③を配布し、不等式の解法3についての学習に取り組んだ。ここでは、不等式の解法2で気付いたことを使って、不等号の向きが変わらずに解く生徒が大多数ではないかと予測したが、そのとおり「 $-2x \geq -6$ 」の解を「 $x \geq 3$ 」と記述する生徒しかいなかった。また、どのように解いたかという問いかけに対しては、「両辺を-2で割った」と答える生徒しかいなかった。

生徒の主な解答

問3 次の不等式を解いてみよう。
 $-2x \geq -6$

○問3はどのように解きましたか？
 $x \geq 3$
 両辺も-2で割った。

○問3の解を考えてみよう。
 $-2x \geq -6$

この式を満たすxは

3	4
2	1

 など

これを言葉で表すと
 3以下

これを式で表すと
 $x \leq 3$

そこで、不等式の解法2までと同様に不等式を満たすxの値を考えさせると、多くの生徒が「両辺を-2で割った」解法で得た答えとの違いに驚き、どうしてそうなるのかを不思議がった。

問3 次の不等式を解いてみよう。
 $-2x \geq -6$

○問3はどのように解きましたか？
 $x \geq 3$
 -2 で割る

○問3の解を考えてみよう。
 $-2x \geq -6$

この式を満たすxは

0	1
2	3

 など

これを言葉で表すと
 3以下

これを式で表すと
 $x \leq 3$

不等式の解法2と同様に考えた解と不等式を満たすxの値を考えたとが違うことについて何が違うのか、そして、そ

こから得られる不等式の性質について、前時同様、座席が近い生徒4人を1つのグループとして、考えさせた。次に示すものは、そのときのあるグループのやりとりである。

- A：何でさっきと違うの？
 B：分からない。でも、みんな違うんだから違うよね。
 C：先生は、何が違うのか考えてみなさいって言っていたよね。何が違うの。
 A：同じように割っているだけだけど。
 D：そうか、さっきは2とか3とか5で割ったけど、今度は、-2で割っているよ。
 B：そうだけど…。
 A：そうか、さっきはプラスの数で割ったけど、今度はマイナスの数で割ってんだ。
 C：方程式の時はプラスで割ろうが、マイナスで割ろうが、同じだったけど、不等式では違うんだ。
 B：本当にそうかな？
 D：その下の問4をやってみればいいんじゃない。
 A： $-3x \geq 6$ では、どうなるだろう。
 B：普通に解けば、 $x \geq -2$ だけど…。
 C：でも、具体的なxを考えると、-2や-3、-4だから、答えは $x \leq -2$ になりそうだよ。
 A：とういことは、やっぱりマイナスで割ると向きが反対になるんじゃない。

このグループでは、不等式の解法 2 との違いを考え、割る数の符号に着目することができた。また、本当にそうなるのかどうかを検証するために、自ら問 4 に取り組んだ。そのことで、自分たちの考えが正しいことを確認することができた。

授業では、いくつかのグループは割る数の符号に気付くことができたが、気付かないグループもあった。気付かなかったグループには、教師が助言を与えることで、すべてのグループで気付くことができた。この後、問 4 に取り組ませ、答えを確認した後に、不等式の性質のまとめを行った。

(4) 小テスト、振り返りシートによる授業の評価

2 時間目の授業の最後に、小テストと振り返りシートの記入を行った。実施人数は、2 クラス 47 名である。

①小テストの結果について

小テストは、授業で取り組んだ不等式の解法をそのまま生かせる問題を 10 題出題した。その問題と結果は以下のとおりであった。

問 題		正答率	主な誤答
1	$x - 3 > 0$	89.4%	$x < 3$ (2 名) 他
2	$x + 5 < 7$	95.7%	$x > 2$ 他
3	$x - 4 \leq 2$	95.7%	$x \geq 6$ 他
4	$x + 1 \geq -7$	85.1%	$x \geq -6$ (4 名)
5	$5 < -x + 8$	87.2%	$x > -3$ (2 名)、 $x < -3$ 他
6	$6x \geq -12$	93.6%	$x \leq -2$ 他
7	$-7x \leq 21$	74.5%	$x \leq -3$ (9 名)、 $x \geq 3$ 他
8	$-3x > -9$	85.1%	$x > 3$ (4 名)、 $x < -3$ (2 名) 他
9	$\frac{1}{2}x < 1$	85.1%	無答 (5 名) 他
10	$-0.4x \geq -1.2$	80.9%	$x \geq 3$ (3 名)、 $x \leq 0.3$ (2 名)、無答 (2 名) 他
合 計		87.7%	

小テストでは、正答率の平均は 87.7% であった。日頃の学習状況を考えると、おおむね満足いく結果を得ることができた。しかし、7 の「 $-7x \leq 21$ 」の正答率が 74.5% であったのは残念であった。7 ができない生徒でも、8 の「 $-3x > -9$ 」ができていない生徒が多く、ほとんどの生徒は不注意で不等号の向きを反対にすることを忘れてしまったようである。再度注意を促す必要がある。また、9 の「 $\frac{1}{2}x < 1$ 」や 10 の「 $-0.4x \geq -1.2$ 」は、分数や小数が含まれていて、しかも、授業では扱わなかったもので、あまり正答率が低いと予想したが、それに反して、多くの生徒が正答を導くことができていた。特に、10 は、小数が含まれ、さらに、負の数で両辺を割らなければならない問題であったが、47 名中 38 名の生徒が正答を導くことができていた。不等式の性質を自分たちで導き出したことが、この結果に結びついたと考えられる。

②振り返りシートの記入状況について

振り返りシートでは、「不等式を解く上で分かったこと」、また、「今日の授業を通して分かったこと」を書かせた。

「不等式を解く上で分かったこと」としては、多くの生徒が、「両辺を負の数で割ったり、

かけたりすると、不等号の向きが逆になる。」ということを挙げていた。次に多かったのは、「解き方が方程式と似ている」ということであった。生徒によって表現方法は異なるが、生徒自らが導き出した不等式の性質を理解したようである。生徒の記述内容の主なものは次のようなものがあった。

生徒の主な記述

解き方は方程式と同じで負(-)で割ったりかけたりする時だけ不等号の向きは変わる。

両辺を負の数で割ったりかけたりすると不等号の向きが逆になる。

正の数の場合、両辺を正の数で割ったりかけたりしても不等号の向きは変わらないが
負の数の場合、両辺を負の数で割ったりかけたりしたら不等号の向きがかわる。

また、「今日の授業をとおして分かったこと」としては、「いつもは先生から教えられた方法で解くだけであったが、自分たちが見つけた方法で不等式を解くことができた。うれしかった、楽しかった。」という回答が目立った。回答を読んでいて、多くの生徒が「自分たちで数学に取り組んだ」と実感していることが読み取れた。中には、次の回答のように、小学校、中学校の時には数学に対して苦手意識を持っていた生徒が、「数学は楽しい」という感想を書いた。今後とも、すべての生徒にこのような感想を持ってもらえるような授業を展開していかなければならないと感じた。

生徒の主な記述

数学は楽しい!!
数学はもともと嫌いだったけど「分かる」と思えたときから一番好き

最初から出来ないとあきらめずにやれば、少しずつヒントや自分の中からでてきて問題が解けるといえることができたので数学が楽しくなってきている。

4 実践を振り返って

毎年、不等式の指導をする際に、不等式の性質を数直線等を使って説明し、その性質を使って不等式を解く際に、数直線を使って同じように説明できないことに疑問を感じていた。この実践後、振り返ると、不等式の性質は数の大小関係を使って説明するのに対して、不等式の解法は範囲を表す不等式であることから、説明できないのは当然であった。

そこで、今回の取組では発想を変え、説明できないならば、不等式の性質を説明せずに、不等式を解いていく中で、不等式の性質を生徒自身に導き出させようと考えた。例年は、教師自身が疑問を抱いた状態での授業だったためか、授業中の生徒の取組もあまりよくなく、理解度も、定着度も低かった。しかし、この実践では、授業中の生き生きとした生徒の目が印象的であった。そして、通常であれば、「小テストをする」と言ったときにはとても嫌そうな顔をする生徒が、一生懸命小テストに取り組んでいた。そして、間違った箇所があるととても悔しがっ

ていた。間違っただ理由を自分自身で納得する様子が見られただけでなく、その後の学習に対する意欲の高まりが感じられた。取組の様子だけではなく、小テストの結果からも例年より理解度が高いことがうかがえる。

説明されたことを使って問題を解くだけでは、「数学が分かる」までには至らないことが多い。特に、家庭学習が十分でない生徒たちにとっては、授業の中でどれだけ分かるかが重要である。そのためには、授業の中で生徒自身が数学の性質を導き出したり、解法を導き出したりする活動を取り入れ、「自分が考えたこと」、「自分が見つけたこと」を実感させることが大切である。これが、「分かる授業」を実践していく大きなポイントである。

生徒の感想にある「分かった！とひらめいたときが一番好き」、「ヒントが自分の中から出てきて問題が解けることが分かったので、数学が少しずつ楽しくなってきた」という言葉を糧に、さらに指導の工夫を重ねていく必要がある。

<参考文献>

高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編 文部科学省 平成 11 年 12 月

高等学校学習指導要領解説 数学編 文部科学省 平成 21 年 7 月

高等学校教科指導の充実『『範囲の概念』の形成を促す指導の工夫』

栃木県総合教育センター 平成 19 年 3 月

事例 2

「正弦定理が分かる」ための指導の工夫

1 事例の概要

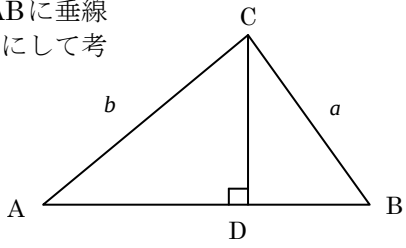
(1) 正弦定理の指導について

平成 14 年度及び平成 17 年度に実施された高等学校教育課程実施状況調査の中で、正弦定理について、次のような問題が出題された。

正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ を証明する授業で、まず右の鋭角三角形 ABC について、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ が成り立つことの証明の仕方を考えています。

明さんは次のような考えを述べました。

右の図のように頂点 C から辺 AB に垂線 CD を引く。CD の長さをもとにして考えれば証明できると思う。



明さんの考えを参考にして、鋭角三角形 ABC について $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ が成り立つことの証明を口の中に書きなさい。

この問題の正答率（調査では通過率）、無答率は、右の表のとおりであった。両年度とも、全問題中、最も正答率が低く、最も無答率が高い問題であった。

	正答率	無答率
平成 14 年度	24.0%	61.9%
平成 17 年度	23.7%	63.7%

正弦定理については、証明をすることよりも、それを利用して計量問題を解決することが指導の中心であった。したがって、多くの学校でこの調査と同じような結果になることが予想される。しかし、このような状況では本当に「正弦定理が分かった」ことにはならない。また、正弦定理を使って、三角形の辺の長さや角の大きさを求めることができるだけでは不十分である。また、最近の生徒は、特に証明を苦手とし、自分の考えを数学的に記述することを苦手としている。そこで、数学的な表現力の向上と、正弦定理の理解を目指して、授業の実践に取り組んだ。

(2) 正弦定理の学習における「分かる」指導について

正弦定理の学習で理解させたいことは、次のようにまとめることができる。

正弦定理の学習で「理解させたいこと」

- ・ 三角形の辺と角との間には関係が成り立つこと
- ・ 正弦定理は三角形の辺と角との間の基本的な関係であること
- ・ 平面図形や空間図形の計量などに正弦定理を活用できること
- ・ 正弦定理を三角形の決定条件と関連付けて活用できること

今回の取組では、特に「三角形の辺と角との間には関係が成り立つこと」を中心に指導の

工夫・改善に取り組む。正弦定理の指導では、なぜ成り立つのか、どうして成り立つのかを問うことよりも、正弦定理の使い方に重点が置かれていた。しかし、それだけでは、正弦定理の有用性を感じることはできず、問題を解くための1つの道具としか感じることはできない。そこで、生徒自身に三角形の辺と角の間には関係があることに気付かせるとともに、成り立つ関係式を導かせることで、正弦定理の理解を深めさせたい。

2 指導計画

(1) 単元「正弦定理」の計画

①単元の見方・目標

図形の性質をもとに、三角形において正弦定理が成立することに気付かせ、その公式をイメージすることができるようにする。また、正弦定理を用いて、三角形の辺と角の関係を明らかにするなど、種々の問題の解決を通して、正弦定理が図形の計量の考察や処理に有用であることを理解させる。

②単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
㉑ 三角形の辺と角の間に成り立つ関係に関心を持つ。 ㉒ 正弦定理などが図形の計量の考察に有用であることに気付き、活用しようとする。	㉑ 正弦定理を導く過程を考察することができる。 ㉒ 正弦定理を導くために図形的な見方や考え方ができる。	㉑ 正弦定理を導くことができる。 ㉒ 三角形の決定条件が与えられたとき、残りの要素を求めることができる。	㉑ 正弦定理の導き方を理解している。 ㉒ 正弦定理を三角形の決定条件と関連付けて理解し、基礎的な知識を身に付けている。

③単元の指導計画

時 間	学 習 内 容	指導上の留意点	評価規準
第1・2時間 (実践例)	正弦定理の成り立ち ・三角形の辺の長さ(ワークシート1) ・三角形における辺の長さと角の大きさの関係(ワークシート2)	・中学校での学習、三角比の定義の学習をもとに個人演習に取り組ませる。 ・ワークシートを用いた活動から三角形における辺の長さと角の大きさの关系到気付かせる。	㉑、㉒、㉑、㉑
第3時間	正弦定理の証明と活用① ・鋭角、直角、鈍角における正弦定理の証明 ・正弦定理を活用した図形の計量問題①	・正弦定理の証明については、鋭角における証明を一斉指導し、直角、鈍角における証明は、個人で取り組ませる。 ・外接円の半径を含めた、簡単な図形の計量に取り組ませる。	㉑、㉒、㉒
第4時間	正弦定理の活用② ・正弦定理を活用した図形の計量問題②	・やや複雑な図形の計量に取り組ませ、三角形の決定条件と関連付けて三角形を解くことができるようにさせる。	㉒、㉒、㉒

(2) 第1・2時間「正弦定理の成り立ち」の計画

①第1・2時間の目標

中学校での図形の性質、三角比の定義等を用いて、三角形の辺の長さを工夫して求めさせる。また、三角形の辺の長さと角の大きさの関係(正弦定理)に自ら気付き、数学的に表現することができるようにさせる。

②第1・2時間の計画

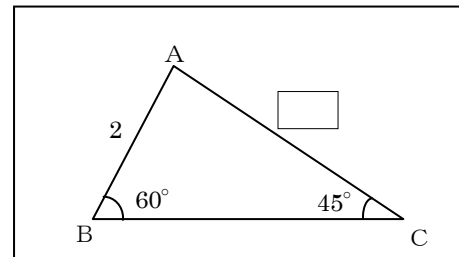
学習活動		学習のねらい	指導上の留意点
導入	辺の長さ、角の大きさが分かっている三角形の辺の長さを求める。(ワークシート1 問題1)	中学校で学習した図形の性質を利用して、三角形の辺の長さを求める。	特に指示は与えず、自由に考えさせる。その際、考え方も記述するように促す。
展開	三角形の1つの辺の長さを他の辺の長さや角の大きさを用いて表す。(ワークシート1 問題2)	辺の長さ、角の大きさが分かっていない三角形の辺の長さを記号を用いて表す。	問題1との違いに配慮させながら取り組ませる。ここでも、結果だけではなく、導いた過程も記述させる。
	三角形の辺の長さや角の大きさの計量(ワークシート2)	定規、分度器を用いて、円に内接する三角形の辺の長さや角の大きさを求める。	三角比の表を用いて、正弦の値を求めさせる。
	三角形の辺の長さや角の大きさの関係の考察(ワークシート2)	三角形の辺の長さや角の大きさの関係を推測する。	辺の長さと正弦の値との関係を自由に発想するように促す。
まとめ	授業の振り返り		振り返りシートを用いて授業の振り返りを行わせる。

③教材(ワークシート)

i) ワークシート1(三角形の辺の長さを求めよう)

問題1では、右の図の $\triangle ABC$ において、辺の長さを求めさせる。具体的にヒントを与えることなく、自由な発想を促し取り組ませたい。修正する場合は、最初にしたものは消すことなく、付け加えるように指示をする。

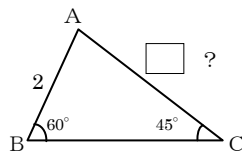
問題2では、文字を用いて辺の長さを求めさせる。具体的な数値が与えられたときと、そうでない場合の違いについて考えさせる。



数学I第3章 図形と計量 <1>正弦定理 ～三角形の辺の長さを求めよう！～

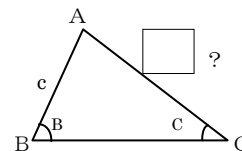
ワークシート1

問題1 下の図のような $\triangle ABC$ において、ACの長さ(b)を求めてみよう。



解)

問題2 一般的な $\triangle ABC$ において、ACの長さ(b)をc、B、Cを用いて表してみよう。



解)

3 授業記録

(1) 三角形の辺の長さの考察①（問題1）

生徒の主な解答

ワークシート1を配布し、時間を10分程度かけて、生徒に自由に取り組ませた。多くの生徒が、Aから垂線を下ろし、直角三角形の辺の比を用いてACの長さを導くことができた。1割程度の生徒の鉛筆が止まっていたので、机間指導しながらヒントを与えたところ、取り組むことができた。表現力に差があり、数字の羅列に終わってしまう生徒から、丁寧に説明しながら解答する生徒までいた。右は、特に丁寧に説明が示されている生徒とそうでない生徒の解答である。

解)

AからBCに向かって垂線を下ろし、その交点をDとすると
 $AD \perp BC$ となり、2つの直角三角形 $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ ができる
 $\angle B = 60^\circ$ より、 $\angle BAD = 30^\circ$
 したがって、 $\triangle ABD$ において、 $BD:AB:AD = 1:2:\sqrt{3}$ が成り立つ
 $\angle C = 45^\circ$ より、 $\angle DAC = 45^\circ$
 $\triangle ADC$ は直角三角形だから、 $AD:DC:AC = 1:1:\sqrt{2}$ なので、
 (b)を x とすると、
 $1:\sqrt{3} = \sqrt{2}:x$
 $x = \sqrt{6}$
 よって、(b)の長さは $\sqrt{6}$

問題1の確認終了後に、問題2に取り組ませた。各自で取り組ませる前に、問題1との違いを確認した。すぐに、「辺の長さや角の大きさが具体的に分かっていない。」ことに気付いたので、値が決まっていなと、どのようなよいことがあるのか、また、どのような不都合があるのかを考えさせた。そのときの生徒とのやりとりは、以下のとおりであった。

$$1:\sqrt{3} = \sqrt{2}:x$$

$$\sqrt{6} = x$$

教師：「辺の長さや角の大きさが具体的に分かっていない。」という意見がありましたが、分かっていないことで、どんなよいことがあるのでしょうか。また、どんな不都合があるのでしょうか。

A：よいことはあるのかな？よくないことは、さっきの問題のように 60° の直角三角形や 45° の直角三角形がないので、辺の長さが分からないから求めるのが大変かもしれない。

教師：他の人はどうでしょう。

B：確かに、 60° や 45° が分からないと辺の長さが分からないと思います。

C：そうか、分かった！ 60° や 45° という角が分からないということは、デメリットでもあるけど、もし、これで求めることができれば、どんな三角形でも辺の長さを求めることができるということじゃないかな。

教師：なるほど。

B：そうか、そう考えれば、いいのか。デメリットだけじゃないんだね。

教師：そうですね。辺の長さが分からない、角の大きさが分からないことは、辺の長さを求めることについては、大きなデメリットですね。先ほどの問題は、 60° 、 45° という特殊な角だったので求めることができました。しかし、文字で表すことができれば、一般化されるので、どんな場合でも求めることができるようになるはずですよ。この場合、それがメリットになるはずですよ。では、問題2に取り組んでみましょう。今話したように、 60° 、 45° という特殊な場合ではありません。しかし、問題1は問題2の解決のための大きなヒントになるはずです。今まで学んだ知識を使って、解決してみてください。

最後は、教師がまとめることになったが、一般化するメリットに自分たちで気付き、自分自身の言葉で表現することができた。

(2) 三角形の辺の長さの考察② (問題2)

ワークシート1の問題2に取り組ませた。問題1と同様に10分程度時間を取った。多くの生徒は、問題1と同様に、頂点Aから辺BCに垂線を下ろしていたが、そこから先がなかなか進まず、試行錯誤を繰り返していた。そこで、既習事項である三角比を、「直角三角形における角の大きさと辺の長さの関係」として紹介した。すると、数名の生徒が三角比を用いて辺の長さを表すことに気付き始めた。ほぼすべての生徒が結論を導けた段階で、2名の生徒に発表させた。発表した生徒のワークシートの記入内容は、以下のとおりである。

生徒Dの解答	生徒Eの解答
解) AからBCに垂線をひき交点をDとする $\sin B = \frac{AD}{c}$ $AD = c \cdot \sin B = CD \text{ とする}$ よって $\cos C = \frac{c \cdot \sin B}{AC}$ $AC = \frac{c \cdot \sin B}{\cos C}$	解) $AC = b$ とする。AからBHに垂線をひき交点をHとする。 $\triangle ABH \text{ において } \sin B = \frac{AH}{c} \text{ より}$ $AH = (\sin B) \cdot c$ また $\sin C = \frac{AH}{b} \text{ より } AH = (\sin C) \cdot b$ よって $(\sin B) \cdot c = (\sin C) \cdot b$ $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$

生徒Dの解答、生徒Eの解答の順に説明させ、解答の違いについて他の生徒に意見を求めた。そのときの生徒の発表内容は、以下のとおりであった。

教師：では、Dくん、説明してくれるかな。 D：はい、先ほどの問題と同じように、AからBCに垂線をひき、その交点をDとしました。そうすると、$\triangle ABD$は直角三角形なので、$\sin B = \frac{AD}{c}$ とかけます。そうすると、両辺にcをかけると、$AD = c \cdot \sin B$ になります。これは、図を見ると分かるように、CDと同じになります。今度は、$\triangle ACD$で考えると、これも直角三角形なので、ACとCDと角Cの関係はコサインだから、$\cos C = \frac{c \cdot \sin B}{AC}$ となります。この式で、ACを移項して、$\cos C$を移項すると、$AC = \frac{c \cdot \sin B}{\cos C}$ となります。 教師：はい、ありがとう。直角三角形における辺の長さや角の大きさの関係である三角比を使って、ACをc、B、Cで表してくれました。みんなも気付いたと思いますが、三角比を使うと一般的な場合でも表現することができそうですね。しかし、こちらに書いてもらったEさんの解答と比べると、結果がちょっと違うね。何が違うんだろう。では、まずは、Eさんの説明も聞いてから、その違いについて考えてみましょう。では、Eさんお願いします。 E：はい、私もDくんとほとんど同じように考えていきました。頂点Aから垂線を引き、交点をHとしました。$\triangle ABH$は直角三角形なので、$\sin B = \frac{AH}{c}$ となります。そうすると、$AH = (\sin B) \cdot c$ になります。$\triangle ACH$も直角三角形なので、$\sin C = \frac{AH}{b}$ となります。そうすると、$AH = (\sin C) \cdot b$ になります。両方とも、AHの長さなので、同じものだから、$(\sin B) \cdot c = (\sin C) \cdot b$ となるので、結局 $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$ となりました。 教師：はい、ありがとう。同じように考えていきましたが、途中からDくんとはちょっと違ってましたね。では、やってもらった2つの解答の違いについて考えていきましょう。	
--	--

教師：最初に、誰か発表してくれませんか。

F：私は、Eさんと同じように考えましたが、Dくんの解答との違いは、Dくんはコサインを使ったところだと思います。

教師：そうですね。Eさんの解答はサインだけが出てきますが、Dくんの解答にはコサインがありますね。どうしてでしょう？Gくんどうですか？

G：どちらもあっているような気がするんですが、答えが違うからどちらかが間違っているんですよね。Dくんの解答にコサインが出てきたのは、 $\triangle ACD$ で CD を使ったからですよね。Eさんののは、 AH だけだし…。

H：そうか、 CD を使ったからコサインが出てきたんだ。でも、それだと間違っているのかな。

D：わかった。ぼくが間違えました。

教師：Dくん自身が気付きましたね。他の人はどうでしょう。Dくんのどこが間違っているのでしょうか？

I：はい！Dくんは、 AD の長さとして CD の長さと同じだとしていますが、それは、さっきの 45° の時だと成り立ちますが、今度は $\angle C$ は 45° とは限らないので、 $AD=CD$ にはならないと思います。

教師：Dくんそれでいいかな。

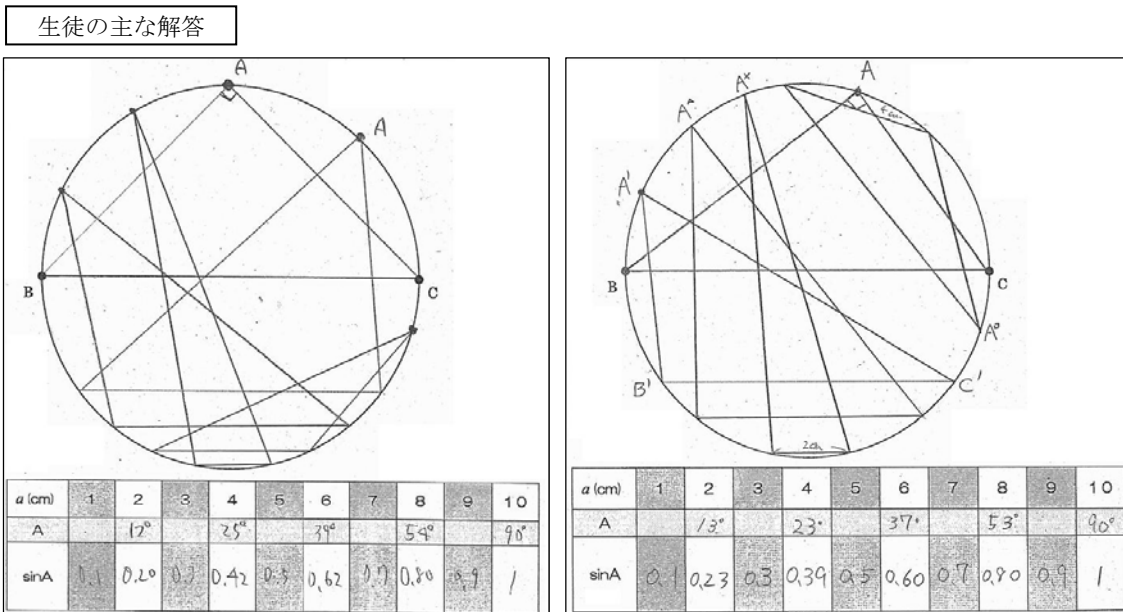
D：はい、三角形を見て AD と CD が同じ長さだと思ってしまいました。確かに、 45° じゃないと同じ長さにならないんですよね。そこで間違えました。

問題2は、正弦定理の接続として重要な内容であるので、2つの解答をそれぞれ発表させ、その違いについて考えさせた。当初は困惑していたが、徐々に考える視点に気付き、間違えた原因を追及することができた。生徒D自身が、最初にその間違えに気付いたが、それを他の生徒に発表させることで、すべての生徒が共有できるように配慮した。

(3) 三角形の辺の長さや角の大きさの計量

ワークシート2を配布し、作業内容、作業方法の説明をしてから、各自で作業に取り組ませた。特に、最後の作業4である、 $a=1, 3, 5, 7, 9$ それぞれのときの $\sin A$ の値を予測することが重要であること伝えた。15分程度の時間ですべての生徒が作業3まで終了した。

辺の長さの取り方は生徒によって違うので、できた三角形も様々であった。生徒が記述したワークシートの主なものは、次のとおりである。



その中で、辺の長さ、角の大きさの測定については、誤差が生じることは予測していたが、角度の誤差についてはおおむね 4° 程度であり、 $\sin A$ の値に大きな違いはなかった。授業後にワークシート 2 を回収して確認したところ、 $a=2, 4, 6, 8, 10$ の A の大きさと $\sin A$ の値については、次のようになった。

	$a=2$ のとき	$a=4$ のとき	$a=6$ のとき	$a=8$ のとき
A の大きさ	$12^\circ, 13^\circ, 14^\circ$	$23^\circ, 24^\circ, 25^\circ$	$36^\circ, 37^\circ, 38^\circ, 39^\circ$	$52^\circ, 53^\circ, 54^\circ$
$\sin A$ の値	0.20, 0.21, 0.23	0.39, 0.41, 0.42	0.59, 0.60, 0.61, 0.62	0.79, 0.80,

授業では、測定には誤差があることを伝え、 $\sin A$ の値は、おおむね 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 であることを確認した。その後、 $a=1, 3, 5, 7, 9$ の値を予想させた。すべての生徒が、0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 と予想することができた。

その予想をもとに、 a と $\sin A$ の関係の考察を促した。2～3 分程度で多くの生徒が、次のように 1 つあるいは 2 つ程度は、その関係を自分の言葉で表現することができた。

生徒の主な記述

● みが 1, 2, 3 ... となるとき
 $\sin A$ は 0.1, 0.2, 0.3 ... となる。
 ● $\sin A$ とみは常に + (プラス)。

○ a の値が大きくなると $\sin A$ の値も大きくなる。
 ○ 比例

a の長さの 10 分の 1 が $\sin A$ の値

「 a の値が大きくなると $\sin A$ の値も大きくなる」や「比例の関係になっている」など、具体的な数値で表現することができなかった生徒も、その関係については気付くことができた。そこで、別の生徒に確認したところ、「 a の長さの 10 分の 1 が $\sin A$ の値」と示したり、中には、「 $\sin A$ の値は $\frac{a}{10}$ になる」と表現したりする生徒がいた。 a の値に対する $\sin A$ の値を考えさせたので、多くの生徒は $\sin A$ が主語となった解答であった。また、10 が外接円の直径であることに気付いた生徒はいなかった。そこで、生徒の解答を生かしながら、さらに、問題 2 との関連を図りながら、生徒の意見を引き出した。そのときの授業の様子は以下のとおりであった。

教師：さて、 a と $\sin A$ の関係は、今発表してもらったように、「比例の関係になっている」

こと、さらに、「 $\sin A$ の値は $\frac{a}{10}$ になる」ということでした。では、この関係を式で表したらどうなるのでしょうか。J くん、どうかな？

J：はい、 $\sin A$ の値は $\frac{a}{10}$ になるので、 $\sin A = \frac{a}{10}$ となると思います。

教師：そうですね。もうほとんど式になっているようなものでしたけど、式で表すと、

$\sin A = \frac{a}{10}$ になりますね。

教師：では、この 10 は何でしょうか？10 という数字はどこから出てきたのでしょうか？

K：円の直径が 10cm だったから、その 10 だと思います。

教師：ということはということかな？

L：円の直径が 5cm だったら、 $\sin A = \frac{a}{5}$ になるのかな。

教師：L くん、なかなかいいところに気が付いたね。みんなはどう思いますか？

M：90° で考えると、この 10 は円の直径だから、きっと、円の直径が変わると、この値も変わっていくと思います。

N：そうか、そうすると $\sin A$ の値は、辺の長さで決まることになるんだね。

教師：なかなかおもしろい発想だね。外側の三角形というのは、三角形の外接円と呼ぶんだよね。外接円という言葉を使って、さらに、直角三角形におけるサインの定義と比べるとどう言えるかな。

M：直角三角形の時は、その直角三角形の辺の比でサインの値を求めることができたけど、普通の三角形の時は、辺の長さで決まるということですか。

O：直角三角形の時も、結局、斜辺は外接円の直径になるから、サインは辺の長さで決まるということになるんだよ、きっと！

教師：みんな、三角比の定義を作っちゃったね。いいよ！他に何か気付いたことはないかな。

L：今は、A で考えたけど、B や C でもできるのかな。

M：サインは、辺の比で外接円の直径で表すことができるのであれば、B や C でもできるはずだね。

L：とすると、 $\sin B = \frac{b}{10}$ になったり、 $\sin C = \frac{c}{10}$ になったりするということかな。

教師：すごい、すごい。新たな定義だね。では、もう少し一般化して、外接円の直径が $2R$ だとしたらどうなりますか。

O：それは、 $\sin A = \frac{a}{2R}$ や、 $\sin B = \frac{b}{2R}$ や、 $\sin C = \frac{c}{2R}$ になるということだよ。でも、直径はなぜ R ではなくて、 $2R$ なんですか？

教師：みんなは、円周の長さや円の面積の公式はどういう形で覚えている？

O：そうか、 $2\pi r$ や πr^2 か。直径じゃなくて、円は半径を考える方がいいのか。

教師：この 3 つの式を見比べると何か分からないかな。P さん、どうだろう？

P：よく分かりませんが、全部に R が入っているということですか？

教師：そうだね。では、これらの式をすべて $2R$ について解いてみてください。そこから何か分からないかな。時間を少し取りますので考えてみてください。

Q：全部の式が $2R = \frac{a}{\sin A}$ 、 $2R = \frac{b}{\sin B}$ 、 $2R = \frac{c}{\sin C}$ になったぞ。で、なんだ？

R：そうか、 R を使わなくても、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ と書けるということですか？

教師：そうだ。導くことができたぞ！それが、正弦定理と言われるものなんです。

教師の誘導が多いやりとりであったが、正弦定理の式を導くためには致し方なかった。しかし、考察していく中で、生徒自身が、外接円の直径を使って三角比を定義し直したり、他の角への適用を考えたりすることができたのは、大きな収穫であった。教師が示したものを覚えるだけの正弦定理の学習ではなく、生徒自身が気づきを通して学んだ正弦定理であるので、生徒の印象に強く残ったのではないかなと思われる。

この後、正弦定理について再度まとめ直した。さらに、問題 2 を振り返り、そこで導いた $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$ について、この式が正弦定理の式であること、さらに、そのことで外接円の直径

が分からなくても、1つの三角形の中で辺の長さや角の大きさを求めることができることを確認した。

(4) 振り返りシートによる授業の評価

2時間の授業の最後に、振り返りシートの記入を行った。実施人数は、3クラス 106 名である。数値による質問の集計結果は次のとおりであった。

質問項目		4 あてはまる	3 だいたいあてはまる	2 あまりあてはまらない	1 あてはまらない
1	正弦定理が理解できましたか。	21(19.8%)	62(58.5%)	19(17.9%)	4(3.8%)
2	正弦定理を導く過程に興味関心をもちましたか。	18(17.0%)	51(48.1%)	27(25.5%)	10(9.4%)
3	活動を伴う授業は、おもしろいと思いましたか。	43(40.6%)	48(45.3%)	10(9.4%)	5(4.7%)
4	活動などを通して法則性を発見しそれを実証していくことが数学の授業の中で大切であると思いましたか。	44(41.5%)	53(50.0%)	4(3.8%)	5(4.7%)
5	分かった（なるほど）と思う場面が何度かありましたか。	36(34.0%)	48(45.3%)	16(15.1%)	6(5.7%)
6	今日の授業に満足していますか。	38(35.9%)	55(51.9%)	9(8.5%)	4(3.7%)

この結果から、約 80%の生徒が「正弦定理を理解した」と認識できた。また、活動を伴う授業のおもしろさ、大切さについては、90%程度の生徒が肯定的に捉えていること、さらに、それに伴って、授業の中で「分かった」と思う場面があり、授業に満足していることが読み取れる。生徒が主体的に活動し、そして、生徒同士の意見の交換の中で数学の定理や性質を自分たちで導き出したことが、「分かった」ことに結びついたと考えられる。

また、「正弦定理の授業で分かったこと」、「授業の感想」を自由記述で記入させた。数値による質問事項の結果を裏付ける記述がとても多く、生徒たちの感想がこの授業のすべてであると感じた。同じような内容の記述があるので、両方をまとめて紹介する。

○問題2と正弦定理との関わりが分かった。

2つめの問題はと公式に関連があることがわかったとき、すっきりしました。実際に角度を測ったりして実証することによって、よりいっそう理解が深まったと思います。

最初円を考えた正弦定理が、問題2の三角形でもあてはまるか、かなりすごいなと思いました。

○正弦定理がよく分かった。

定理だけ覚えるのではなく、この授業のように自分でどのように定理になるのかということも理解してからのほうが分かったという気持ちが大変なほど、ということが分かった。

正弦定理の楽しさが分かった。

問題2であまり面白くもなくつまらなかった $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$ の値がすべて二でつながれるところがとてもきれいで楽しかった。

数学の楽しさはこういう所にあると思った。

正弦定理を導くうえで、辺や角の関係があって成り立っているということや式を変形したり、共通点や規則性を見つけることによって思考の範囲が広がるということが分かりました。

○授業がおもしろかった、楽しかった。

聞いているだけよりも、実際にやって自分で考えた方が分かりやすいと思いました。

今まで「学んだことを利用して問題を解いたが、それがこれから習っていく内容にも関わっている(つながっている)」ということが改めてわかった。

そう考えると、数学は思ったよりも単純な...? かもしれないと感じた。

定理を説明されるだけでなく、自分で解いていくことによって、いつもよりも意味がわかりやすかった。

作図をしたり、予想を立てたりしたので、普段の授業よりも楽しかった。

○数学のおもしろさ、楽しさを実感できた。

ただ単に、定理だけを学習するよりも、実際にその定理を実証しながら学習した方が、授業をより楽しくできて、その単元(定理)に関心・興味を持って、そして何より、頭によく入る。だから、この授業は良いと思う。

$\sin A$ と a の関係を見つけるとき、すごくうれしかったし、「法則っておもしろい」と改めて感じました。

定理の成り立ちの過程を考えることもおもしろいことなんだなと思った。

4 実践を振り返って

日頃の様子と違って意欲的に学習に取り組む生徒の姿を見て、実践の手応えを感じた。普段はおとなしく、あまり自分の意見を言わない生徒たちが、活発に自分の考えを述べていた。また、納得した表情で、うなずく生徒が多かった。振り返りシートに記述された生徒の感想を読

んでもそれらを実感できた。

一方的に定理やその使い方を示され、問題を解き、解法を身に付けていくだけでは、生徒は「分かった」と実感することは難しい。授業が分かるためには、生徒自身が考え、表現することが重要である。

この取組では、問題2において、生徒自身が解答の誤りを考えた。間違えることに不慣れな生徒は、間違ったことを発表したくないと感じることが多い。しかし、授業の中で間違えることは、効果的な学習であることを実感させ、そのような場面を随所に設定していく必要がある。また、活動を通して得られたデータから数学的な性質を導いたり、その性質から定理を導いたりすることは、その定理の理解に大きく影響する。振り返りシートの中に「定理の成り立ちの過程を考えることはおもしろいことなんだなあと思った。」との感想があった。普段は、定理の証明をあまり好まず、問題の解き方だけに固執していた生徒が多かったが、それは、指導の在り方に課題があったことになる。定理の成り立ちの過程を生徒自身が考察することで、定理が分かり、興味を抱き、おもしろさを感じる。そのことによって、数学の授業、数学そのものへの興味・関心を高めることになる。

<参考文献>

高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編	文部科学省	平成 11 年 12 月
高等学校学習指導要領解説 数学編	文部科学省	平成 21 年 7 月

事例 3

「場合の数の考え方・求め方が分かる」ための指導の工夫

1 事例の概要

(1) 新学習指導要領との関わり

中学校における場合の数・確率の学習は、中学校第2学年で「起こり得る場合の数、確率」として行われる。平成14年告示の学習指導要領においては、起こり得る場合の数を求めることについて次のように示されている。

「確率の学習を進めるにあたって、起こり得る場合を順序よく整理し、正しく数え上げることを学ぶ。ただし、その程度については、樹形図や二次元の表などを利用して、起こり得るすべての場合を簡単に求めることができる程度の事象を取り上げることにする。」

すなわち、中学校では、計算等によって場合の数を求めることはなく、樹形図や二次元の表を利用して、その構造を把握しながら簡単な場合の数について学習している。

下の図のように、新学習指導要領においては、小学校第6学年、中学校第1学年で「資料の考察」、「資料の散らばりと代表値」として統計分野についての学習をする。また、小学校第6学年、中学校第2学年で「起こり得る場合」、「確率」として確率分野について学習する。

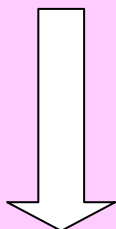
小学校算数科・中学校数学科における確率・統計分野の学習

現行の学習指導要領

小学校第6学年

「平均の意味」の学習

平均の意味について理解し、それを用いることができるようにすることをねらいとして学習する。



中学校第2学年

「確率」の学習

具体的な事象についての観察や実験を通して、確率について理解することをねらいとして学習する。

- ・起こり得る場合を順序よく整理することができる。
- ・不確定な事象が起こり得る程度を表す確率の意味を理解し、簡単な場合について確率を求めることができる。

- 確率の意味
- 起こり得る場合の数
- 簡単な場合について確率を求めること

新学習指導要領

小学校第6学年

「資料の考察」の学習

資料の代表値としての平均や度数分布の表、柱状グラフを取り扱うなど、統計的な考察をしたり表現をしたりする能力を伸ばすことをねらいとして学習する。

「起こり得る場合」の学習

起こり得るすべての場合を適切な観点から分類整理して、順序よく列挙できるようにすることをねらいとして学習する。



中学校第1学年

「資料の散らばりと代表値」の学習

目的に応じて資料を収集し、表やグラフに整理し、代表値や資料の散らばりに着目して資料の傾向を読み取ることができるようにすることをねらいとして学習する。



中学校第2学年

「確率」の学習

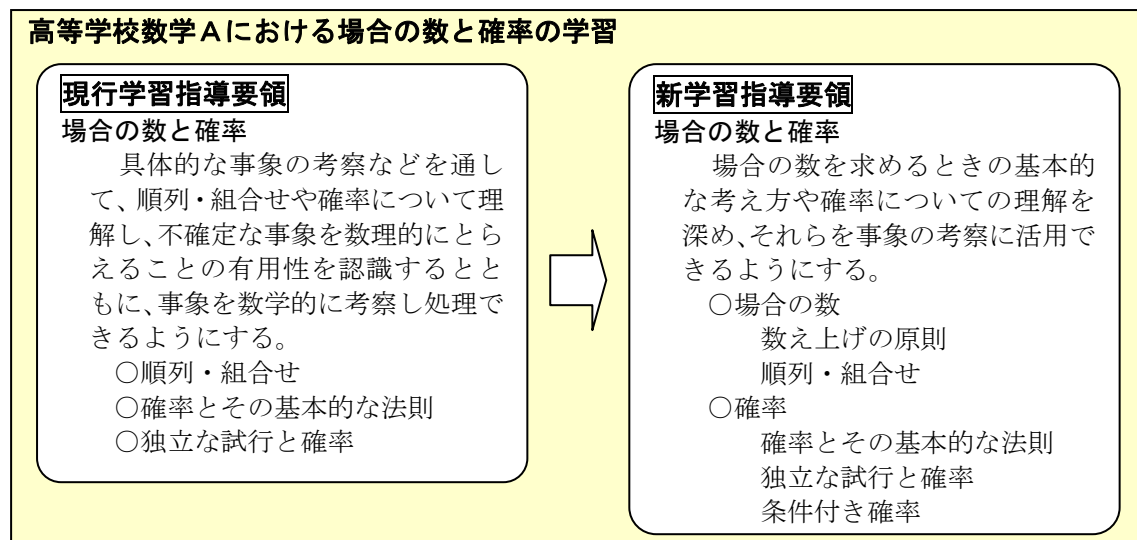
不確定な事象についての観察や実験などの活動を通して、確率について理解し、それを用いて考察し表現することができるようにすることをねらいとして学習する。

- ・確率の必要性和意味を理解し、簡単な場合について確率を求めることができる。
- ・確率を用いて不確定な事象を捉え説明することができる。

- 確率の必要性和意味
- 簡単な場合について確率を求めること
- 不確定な事象をとらえ説明すること

今回の学習指導要領の改訂により、小学校、中学校においては、確率・統計分野の学習の充実が図られた。場合の数については、中学校第2学年だけで学習している現在の生徒と異なり、小学校第6学年での学習、中学校第2学年での学習とスパイラルに学習することになり、より定着がなされた上で高等学校に入学してくることが予想される。

このような状況の中で、高等学校の数学Aにおける場合の数と確率における学習は、下の図のように変わる。



高等学校においても、「数え上げの原則」、「条件付き確率」が新たに加わり、数学Ⅰに加わった統計分野の「データの分析」とともに、確率・統計分野の学習の内容が充実することになる。「数え上げの原則」において学習する内容は、集合の要素の個数に関する基本的な関係、和の法則、積の法則についてである。新たに加わる学習内容はないが、新たに項立てすることによって、場合の数をもれなく、重複することなく数え上げることの大切さをさらに実感させることをねらいとしている。また、「条件付き確率」では、具体例を通してその意味を理解させたり、簡単な場面について条件付き確率を求めたり、確率の乗法定理を扱ったりする。現行の学習指導要領では数学Cで扱っていた内容であったので、一部の生徒しか学習していなかったが、数学Aで扱うことになり、多くの生徒が学習することを考えると、教材の工夫が重要となってくる。

今回の学習指導要領の改訂にあたって、小学校、中学校での学習内容を十分理解し、高等学校における確率・統計分野の指導の在り方を考えていかなければならない。

(2) 場合の数の学習における「分かる」指導について

場合の数の学習で理解させたいことは、次のようにまとめることができる。

場合の数の学習で「理解させたいこと」

- ・樹形図による数え上げの原則
- ・和の法則と積の法則の意味、法則による場合の数の求め方
- ・場合の数を数え上げる有効な方法（もれなく、重複なく数える）
- ・順列、組合せの意味とその総数の求め方
- ・公式の有用性
- ・順列、組合せを使った様々な考え方

これらの内容は、相互に関連し合っている。しかし、生徒は、学習が進むにしたがって、「これは順列なのか組合せなのか」の判断が中心となり、もれなく数えること、重複なく数

えることへの注意が疎かになることがある。

そこで、この取組では、順列と組合せの学習の終了後に、場合の数を数える際の考え方と、順列と組合せの違いが実感を伴って分かることをねらいとして指導計画を立てた。授業では、問題の設定を工夫することで、間違った部分やその理由を生徒自身に考えさせ、そのことから、もれなく数えること、重複なく数えることの意味を実感させたい。その際、多くの視点が得られるようにグループでの学習を取り入れる。また、人を並べることと基石を並べることの違いを考えることで、順列と組合せについての理解を深めさせたい。この実践によって、ばらばらだった考え方や知識が意味を持って関連付けられ、場合の数の考え方や求め方が分かった状態になることが期待される。

2 指導計画

(1) 単元「場合の数」の計画

①単元の見方・目標

具体的な事象の考察を通して、順列・組合せの意味を理解し、その総数を求められるようにさせる。単に公式を暗記し、それを形式的に扱うのではなく、公式を用いることの有用性を認識させ、順列・組合せを使った様々な考え方ができるようにさせる。

②単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
① 起こり得る事柄に関心をもち、それぞれの場合の数を調べようとする。 ② いくつかの異なるものを順序を考えて並べる場合に関心をもち、調べようとする。 ③ 順列の考え方をを用いて、いろいろな問題を解こうとする。 ④ 順序を考えずにいくつかのものを取り出す場合の数に関心をもち、順列とどのような関係にあるのかを調べようとする。 ⑤ 組合せの考え方をを用いて、いろいろな問題を解こうとする。	① 数え上げるときに注意することは何かを考える。また、効率よく数えるために計算式を用いる手立てを考えることができる。 ② 起こり得る事柄が順列に対応していることに気付くとともに、総数との関係を式を通して一般化することを考えることができる。 ③ 問題解決の過程で整理する方法として置き換えの考え方や繰り返しの考え方、輪を作る考え方の意義やよさに気付くことができる。 ④ 起こり得る事柄が組合せに対応していることに気付くとともに、総数との関係を式を通して一般化することを考えることができる。 ⑤ 問題解決の過程で題意を正しく理解し、規則性を見いだしたり、一般化する意義やよさに気付いたりすることができる。	① 樹形図を利用して数え上げることができる。 ② 順列の公式を用いて場合の数を効率よく求めたり、式の値を正確に計算できる。 ③ 置き換え、円順列、重複順列等の公式を使って、場合の数を求めることができる。 ④ 組合せの公式を用いて場合の数を効率よく求めたり、式の値を正確に計算したりすることができる。 ⑤ 図や文字、記号を用いて問題を整理・分析し、場合の数を効率よく求めることができる。	① 起こり得る事柄と和の法則、積の法則との関係を正しく理解している。 ② 順列とその記号の意味を理解している。 ③ 置き換え、円順列、重複順列について理解している。 ④ 組合せとその記号の意味を理解している。 ⑤ 組合せの公式、組分け及び同じものを含む順列について理解している。

③単元の指導計画

時間	学習の目標	学習内容	評価規準
第1時間～第2時間	樹形図を用いて数え上げることの意味を考えるとともに、起こり得る事柄と和の法則、積の法則との関係を理解しながら、もれなく重複なく数え上げることができる。	樹形図 和の法則 積の法則	④①、⑤①、 ⑤①、⑥①
第3時間～第5時間	順列の考え方とそのよさを理解し、場合の数を求めることができる。	順列の総数 順列の考え方の利用 円順列 重複順列	④②、⑤③、 ⑤②、⑥③、 ⑥②、⑥③
第6時間～第8時間	組合せの考え方とそのよさを理解し、場合の数を求めることができる。	組合せの総数 組合せの考え方の利用 組分けの総数 同じものを含む順列	④④、⑤④、 ⑥④、⑥④、 ⑥⑤
第9時間（実践例）	順列と組合せの考え方の違いをもとに、場合の数の求め方の理解を深める。	問題演習	⑤②、⑤⑤、 ⑥⑤
第10時間	問題演習を通して、起こり得る事柄に関心をもつとともに、効率よく数えるための手立てを考える。	問題演習	④③、④⑤、 ⑤②、⑤⑤、 ⑥⑤

（2）第9時間「順列・組合せのさらなる理解のために」の計画

前述した単元計画のもと、順列と組合せの考え方の理解を含めて場合の数の求め方の深化を図るために、第9時間に「順列・組合せのさらなる理解のために」をテーマとして指導を計画した。この時間では、人の並び方をテーマにして、基本的事項を確認するとともに、考え方について間違えやすい問題を設定し、誤答が出た際にその理由を考えさせること（数学的活動）で、場合の数の考え方、求め方の理解を深めたい。特に、場合の数・確率の単元では、誤答である場合の理由は、「もれがある」、「重複している」ことが多い。これらの視点を生徒に示しながら、誤答である理由を考えさせていきたい。

この時間では、誤答である理由を考えることで、「場合の数の考え方・求め方が分かる授業」を展開したい。

① 前時までの授業の流れ

前述した単元計画のもと、下のように授業を展開した。順列まではおおむね良好な学習状況であったが、組合せの学習では、順列との区別がつかず、苦勞している生徒もいた。

ア) 第1時間～第2時間

樹形図の書き方、書く際の留意点等につれ、樹形図を作成して場合の数を求めることを学習した。また、樹形図から規則性を見だし、和の法則、積の法則を導き、もれなく、重複なく数え上げることの重要性を確認した。

イ) 第3時間～第5時間

並べる順序の違いを区別する並び方に関する具体的な例をもとに、積の法則との関連を踏まえて場合の数（順列）について考察し、規則性を見出した。また、順列の総数や階乗の記号を導入し、その意味について学習した。具体的な例としては、数字の並び方による整数の個数、人の並び方、円順列、数珠順列、重複順列等の問題について扱い、順列の考え方、求め方の理解を深めた。

第9時間の授業との関わりとしては、次のような問題に取り組んだ。理解の状況はおおむね良好であった。

男子4人と女子3人が1列に並ぶとき、次の並び方は何通りあるか。

- (1) すべての並び方
- (2) 両端が男子である並び方
- (3) 女子3人が続いて並ぶ並び方
- (4) 男子と女子が交互に並ぶ並び方

ウ) 第6時間～第8時間

ものを取り出す順序を無視した組の作り方として具体的な例をもとに、場合の数(組合せ)について考察し、規則性を見出した。また、組合せの総数の記号を導入し、その意味について学習した。具体的な例として、人の選び方、図形的な問題、組分けの総数、同じものを含む順列(文字や数字の並べ方、最短経路)等の問題について扱い、組合せの考え方、求め方の理解を深めた。

②本時の目標(今回の授業で分かってほしいこと)

順列、組合せの基本的な考え方を確認するとともに、場合の数が誤答である理由を考察することで、場合の数の考え方、求め方の理解を深める。また、順列と組合せの違いについて理解を深める。

③教材の準備

次の問題をワークシートNo1、No2として用意した。前日に配布し、ワークシートNo1の問題(1)、(2)、(3)を授業までの課題とした。ワークシートNo2は、No1の確認が終了後に、授業中に配布し、取り組ませた。

場合の数・ワークシートNo1

1学年 組 番 氏名

- (1) 男子5人と女子2人の計7人が一列に並ぶとき、すべての並び方は何通りあるか。
- (2) 男子5人と女子2人の計7人が一列に並ぶとき、女子が隣り合う並び方は何通りあるか。
- (3) 男子5人と女子2人の計7人が一列に並ぶとき、女子同士が隣り合わない並び方は何通りあるか。

場合の数・ワークシートNo2

1学年 組 番 氏名

- (4) 男子4人と女子3人の計7人が一列に並ぶとき、女子同士が隣り合わない並び方は何通りあるか。
- (5) 黒の基石5個と白の基石3個を一列に並べるとき、白の基石同士が隣り合わない並び方は何通りあるか。

また、授業の振り返りとして、次のシートを用意し、授業後に取り組みさせた。

振り返りシート		1 学年 組 番 氏名
＊以下の項目について、 4…あてはまる 3…だいたいあてはまる 2…あまりあてはまらない 1…あてはまらない として、該当する番号を○で囲んでください。		
1	問題(4)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	4・3・2・1
2	問題(5)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	4・3・2・1
3	問題(3)では、多様な解き方を理解できた。	4・3・2・1
4	順列と組合せの違いを理解できた。	4・3・2・1
5	誤答に対して、なぜ間違っているかを考えることにより、その問題自体の理解が深まった。	4・3・2・1
6	今日の授業で分かったことを書いてください。(自由記述)	
7	今日の授業に関する感想を書いてください。(自由記述)	

④展開計画

	学習活動	学習のねらい	指導上の留意点
導入	問題(1)、(2)の確認（生徒の板書）	解答の確認をすることで、順列の考え方、求め方について確認する。	課題の実施状況を確認することで、定着状況を把握する。（ワークシートN o 1）
展開	問題(3)の確認（生徒の板書）	いくつかの解法を確認することで、場合の数の考え方について理解を深める。	全体から女子が隣り合う並び方を除くことが予想されるが、直接求める求め方についても触れる。（ワークシートN o 1）
	問題(4)への取組 各自取り組んだ後に、なぜ間違っているのかをグループで考える。	誤答である理由を考察することで、場合の数の考え方、求め方についての理解を深める。	正答、誤答にかかわらず、考え方に違いや、もれがないか、重複がないかという視点に着目させる。（ワークシートN o 2）
	問題(5)への取組 各自取り組んだ後に、なぜ間違っているのかをグループで考える。	誤答である理由を考察することで、順列と組合せの違いについての理解を深める。	
まとめ	授業の振り返り		振り返りシートを用いて授業の振り返りを行わせる。

3 授業記録

授業は、習熟度別授業を実施している第1学年のクラスの中で、習熟度の高い1クラス 34名に対して行った。授業中の生徒の様子と、ワークシートの記入状況は次のとおりであった。

(1) 問題(1)、(2)の状況について

授業では、それぞれ1名の生徒に板書させ解説をさせたが、理解の状況はおおむね良好であった。

解答の状況については、右の表のように、問題(1)については、誤答であった生徒は、計算ミスをした生徒1名だけであった。28名の生徒（全体の82.4%）が「7！（通り）」と考え、残りの5名の生徒（全体の14.7%）が「 $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ （通り）」と考えて解答した。

解 答 状 況			
問題(1)	正答	7！	28名
		$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$	5名
	誤答	計算ミス	1名
問題(2)	正答	$6! \times 2!$	31名
		$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2$	2名
	誤答	6！	1名

問題(1) 生徒の解答

(1)男子5人と女子2人の計7人が一列に並ぶとき、すべての並び方は何通りあるか。

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
 $= 5040$
 5040通り

また、問題(2)については、誤答であった生徒は、「6！（通り）」と考えた生徒1名だけであった。31名の生徒（全体の91.2%）が「 $6! \times 2!$ （通り）」と考え、残り2名の生徒（全体の5.9%）が「 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2$ （通り）」と考えて解答した。

問題(2) 生徒の解答

(2)男子5人と女子2人の計7人が一列に並ぶとき、女子が隣り合う並び方は何通りあるか。

女子2人を1とみなす。
 男子5人と1人の並び方は6!通りあり、
 そのそれぞれの場合に対して女子の並び方は2!通りある。
 よって $6! \times 2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1$
 $= 1440$
 1440通り

課題であったこともあってか、ほぼすべての生徒が正答を導くことができた。また、正答を導く過程で、順列の考え方、求め方を確認することができた。

(2) 問題(3)の状況について

授業では、1名の生徒に板書させ、解説をさせた。ほぼすべての生徒が、問題(1)、(2)を利用して、すべての並び方から女子が隣り合う並び方を引くことで、正答を導くことができたようで、納得していた。板書させた生徒の解答は右のような解答であった。

問題(3) 生徒の解答1

(3)男子5人と女子2人の計7人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

(全佳) - (女子が隣り合う並び方) = (女子が隣り合わない並び方)

(1)(2)より
 $5040 - 1440 = 3600$
 3600通り

問題(3) 生徒の解答 2

しかし、1名の生徒が右のような解答を提示して、「これではなぜいけないのでしょうか?」と疑問を投げかけた。この生徒だけが、順列の学習の際に「男子と女子が交互に並ぶ並び方は何通りあるか。」という問題を扱ったときの解法で考えていた。予定はしていなかったが、この解法のどこに間違いがあるのかをクラス全員で話し合った。

まずは、この生徒に、解答を板書させて解法を説明させた。その後、他の生徒から様々な意見を言わせた。以下がそのときのやりとりである。

$(男)(男)(男)(男)(男)$
 男子の並び方は $5!$ 通り
 女子の並び方は ${}_6C_2$ 通りある
 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1}$
 $= 120 \times 15$
 $= 1800$
A 1800通り

教師：最初に、A君、この解き方を説明してくれますか?

A：はい、僕は、他の人のように全体から引くことを考えずに、とりあえず、並べてみようと考えました。そのときに、前に授業でやったことを思い出して、男子を並べてみて、その間をすべて空けて、空いているところに女子を並べることを考えました。

教師：なるほど、とりあえずそこまでにしよう。そう考えたA君の続きを誰か説明してくださいませんか。では、Bさんどうですか?

B：はい、○男○男○男○男○男○と並べると、男子の並び方は5人を一列に並べるので、 $5!$ 通りの並び方があると思います。

教師：はい、ありがとう。では、次はどうですか?では、Cさんどうですか?

C：はい、男子を並べることができたので、残りは女子になります。女子は、並べるところが、この○の6カ所のところなので、この6カ所から2カ所を選んで並べればよいから、 ${}_6C_2$ 通りになります。ですから、 $5!$ と ${}_6C_2$ をかけて、1800通りになります。

あれ、あってるんじゃないの?

教師：はい、ありがとう。さあ、どうでしょうか?先ほど、Dさんに黒板に書いてもらったときには3600通りになり、みんなも納得しましたね。でも、この解法でいくと1800通りにしかありません。どちらがどうおかしいのでしょうか?考えるときには、本当にすべての場合を考えたのか、また、すべての場合を考えたときにダブって考えたことはないかどうかを考えてみてください。樹形図のところで学習した、もれはないか、重複はしていないかということです。

E：はい。確かにこの方法でも解けると思うのですが、女子を並べるときに、これは、順番も考えなければならないから、組合せではなくて、順列にしないといけないではないでしょうか。

教師：なるほど。具体的にはどう計算すればいいですか?

E：女子の並び方が ${}_6P_2$ 通りとなっていますが、ここが、 ${}_6P_2$ 通りになればいいじゃないかな。そうすれば、3600通りになるし。

A：そうか、僕が間違った。女子の並び方は、組合せではなくて、順列だ。

教師：そうですね。ここでは、2人の女子は区別して考えなければならないので、並べるときには、6カ所から2カ所を選んで並べなければ、2人の女子の並び方にならないね。要するに、数え方にもれがあったことになるわけですね。これで解決かな。他の人でまだ疑問のある人はいますか?

このように、ここでは、順列と組合せの間違いをしてしまいましたが、要するに、すべての場合を考えていなかったことになってしまいますね。もれていたことになってしまいます。ですから、場合の数を求めるときには、やはり、もれがないか、ダブって数えていないか、常に注意して考えていくことが大切です。

A君、よい解答を出してくれて本当にありがとう。

ここでは、教師が生徒の意見を導いた。また、発表者（A君）だけの意見にならないように、最初の説明を途中で遮り、他の生徒（Bさん、Cさん）に続きを説明させた。このことで、A君の考えを多くの生徒で共有することができ、授業への参加意欲を高めることができた。

また、当初の指導計画では、問題(4)、(5)の際に、場合の数の問題の誤答を考える視点を与えるつもりであったが、考えるのにより解答が提案されたので、ここで取り扱った。生徒にとっては、順列と組合せの違いであると安易に考えてしまうところである。しかし、その起こり得る場合の状況を的確に把握し、もれなく数えているか、重複なく数えているかを考えさせることが重要であることを認識させることが大切である。特に、この問題では、Eさんの発言の中の「女子を並べるときに、これは、順番も考えなければならないから」という言葉がキーとなっている。すなわち、「順番も考えなければならないから」という発言は数え方にもれがあるということの意味している。

問題(3)の解答状況は右のとおりであった。問題(1)、(2)、(3)の解答状況を見ると、ほぼすべての生徒が順列、組合せについての基本的な事項の理解は、おおむね満足いくものであった。

解 答 状 況			
問題(3)	正答	すべての並び方から女子が隣り合う並び方を引く	31 名
	誤答	問題(2)が計算ミス	1 名
		数え方にもれがあった(前述した生徒)	1 名

(3) 問題(4)の取組状況について

問題(3)が終了した後に、各自で問題(4)に取り組ませた。問題(3)は1名を除くすべての生徒が、すべての並び方から女子が隣り合う並び方を引く方法を選択していた。したがって、問題(4)も多くの生徒が、同様の解法で取り組み、誤答となることが予想された。授業後にワークシートを回収し、解答状況を確認したところ、右のとおりとなった。

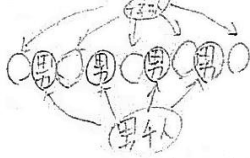
解 答 状 況			
問題(4)	正答	男子を並べ、その間に女子3人を並べる	1 名
	誤答	すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方を引く(7! - 5! × 3!)	28 名
		7! - 4! × 3!	1 名
		すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方と女子2人が隣り合う並び方を引く	4 名

正答であった生徒は、問題(3)で誤答となって取り上げた生徒であった。また、誤答であった生徒のうち、28名の生徒(全体の82.4%)が問題(3)と同様に取り組み、その解答にあまり疑問を抱かずに誤答となった。もれなく数えているか、重複なく数えているかを確認するまでには至らなかったようである。状況の把握や解答の吟味はまだ十分ではないと考えられる。また、すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方と女子2人が隣り合う並び方を引く方法に取り組んだ生徒が4人いた。しかし、どの生徒も最後までたどり着くことはできなかった。

次に示すものは、正答であった生徒の解答、すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方を引く(7! - 5! × 3!) 解答、すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方と女子2人が隣り合う並び方を引く解答である。

問題(4) 生徒の解答 1 (正答)

(4)男子4人と女子3人の計7人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。



男子の並び方が4!通りあるそのそれぞれの場合に対して
女子の立つ場所が5箇所ありそのうちの1箇所には女子3人が3C3通りあるそのそれぞれの場合に対して
女子の立つ場所3箇所あり3!通りある。

$$\begin{aligned}
 & 4! \times 5C3 \times 3! \\
 &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 \\
 &= 24 \times 10 \times 6 \\
 &= 1440
 \end{aligned}$$

問題(4) 生徒の解答 2 (誤答 すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方を引く)

(4)男子4人と女子3人の計7人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

$$(\text{全1本}) - (\text{女子が隣り合う並び方}) = (\text{女子どうしが隣り合わない並び方})$$

女子3人を1人とみなし、

女子1組と男子4人の計5人の並び方は5!通りあり、
そのそれぞれの場合に対する女子3人の並び方は3!通りある。

$$\begin{aligned}
 5! \times 3! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \\
 &= 720
 \end{aligned}$$

$$7! - 5! \times 3! = 4320$$

問題(4) 生徒の解答 3 (誤答 すべての並び方から女子3人が隣り合う並び方と女子2人が隣り合う並び方を引く解答)

(4)男子4人と女子3人の計7人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

○○○○○○○

(全体) - (女子どうしが隣り合う場合) を求めればよい。

(i) 女子3人を1組と見た場合とした場合

○○○ ○○○○

$$\begin{aligned}
 5! \times 3! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \\
 &= 120 \times 6 \\
 &= 720
 \end{aligned}$$

(ii) 女子2人を1組とした場合、

○ ○○ ○○○○

↑
隣り合ふ女子2人は1組として扱う。

隣り合ふ女子2人は1組として扱う。

ただし

○○ ○○○○

↑
一番最初に女子1組が来たとき、

$$3! \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576 \text{ 通り}$$

この並び方の数は一番最後に女子1組が来たときと同じ。

$$576 \times 2 = 1152 \text{ 通り}$$

※両端以外に女子2組が並んだ場合は、

○ ○○ ○○○○ ○
↑ ↑ ↑
女子2組 女子2組 女子1組
1通り 3通り

$$(4 \times 3! \times 3 \times 3 \times 2 \times 1)$$

$$= 36 \times 12$$

$$= 432$$

$$432 \times 4 = 1728$$

これは、2番目に女子2組が並ぶ場合、2番目、3、4、5番目に並ぶ場合、同じ並び方が数々あり、よって

$$432 \times 4 = 1728$$

$$\text{全体は } 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$5040 - 1728 - 1152 = 2160$$

$$= 1400 \text{ 通り}$$

授業では、すべての並び方から女子 3 人が隣り合う並び方を引く ($7! - 5! \times 3!$) 解法を黒板に示し、この解答が間違っていることだけを伝えた。その後、4 人一組のグループとなって、どこが間違っているのか、なぜ間違っているのか、正しい解答はどのようなものかを 15 分間で話し合わせた。以下は、そのときのある 1 つのグループのやりとりである。

F : みんなはどうやって解いたの？僕は、黒板と同じなんだけど。
G : えっ、私も黒板と同じ。
H : 私も。
I : 僕もだ。
F : これは、どこが間違っているんだろう。
G : さっきの問題(3)でやったことを考えると、もれなく数えているかとかダブって数えていないかとかを考えればいいわけだね。
F : そうだね。これだと、もれなく数えていないのかな、ダブって数えているのかな。
I : 具体的に書いてみれば分かるかもしれないよ。
例えば、全体は、7 人が一列に並ぶから、○○○○○○○で、男子、女子の区別がないから 7! 通りになるよね。これにはもれもなく、ダブってもないから大丈夫だよね。
H : ここまでは問題ないよね。だとすると、 $5! \times 3!$ の方だね、きっと。
I : これは、「男男女女女男男」のように女子 3 人が隣り合う並び方だね。女子 3 人を 1 人と考えると全部で 5 人だから 5! 通りで、女子 3 人の並び方は 3! 通りだから、かけ算すればいいんだよね。おかしいかな。
G : そうか、わかった。これは、女子 3 人が隣同士になる場合しか考えていないんだ。
F : それが何か変かな。
G : だって、「男男女女女男男」のように女子 2 人が隣同士になることもあるんじゃないの。問題は、「女子同士が隣り合わない並び方」だったから、これも引かないといけないんだよ。
F : そうか、思いつかなかったけど、女子が 3 人いるから、2 人が隣同士で、もう 1 人が離れて並ぶことがあるのか。
H : だとすると、全体から、女子 3 人が隣同士で並ぶときと、女子 2 人が隣同士で並ぶ時を引けばいいんだね。そうすると、全体と、女子 3 人が隣同士で並ぶときはできているから、女子 2 人が隣同士で並ぶ場合を求めればいいんだね。
I : ということは、女子 2 人の選び方は、並び方も考えると ${}_3P_2$ 通りで、残りの女子 1 人と隣同士の女子 2 人と男子 4 人の並べ方は 6! 通りだから、それをかければいいのかな。
G : でもそれだと、男女(女女)男男男のように、女子が 3 人並んでしまうことがあるんじゃない。
I : わかった！また、そこから女子 3 人が隣り合って並ぶこと引けばいいんじゃない。そうすると、
$$7! - (5! \times 3!) - ({}_3P_2 \times 6! - 5! \times 3!) = 720 \text{ (通り)}$$
となるのかな。

このグループでは、どこが間違っているか、なぜ間違っているかまでは確認できたが、課題を解決するまでに至らなかった。しかし、場合の数を求めるときに、具体的な場面を考えて、もれなく数えているか、重複なく数えているかを確認することができた。このように、場合の数を求めるときには、具体的な場面を書き出しながら、確認すると有効であることが多い。グループでの話し合いの結果を聞いていると、多くのグループでそのことに気付き、取り組んでいた。その結果、すべての並び方から女子 3 人が隣り合う並び方を引く解法には誤りがあることにすべてのグループで気付いたが、課題を解決できたのは、最初に正答にたどり着いた生徒（問題(4) 生徒の解答 1）がいるグループだけであった。

また、「問題(4) 生徒の解答 3」を考えた生徒がいるグループでは、当該生徒の解答の検討に手こずってしまった。この解法において、もれなく数えているか、重複なく数えているかを吟味する際に、具体的な場面を考えながら進めていたが、数えもれを示す場面を発見するまでには至らなかった。

授業では、各グループで考えた解法を発表させ、それぞれの解法の問題点を検討した。発表された解法は、前述したグループの解答、問題(4)生徒の解答 1、問題(4)生徒の解答 3 の 3 種類だったので、それぞれ 1 つずつ取り上げた。正答以外の解答では、もれなく数えたり、重複なく数えたりしているかどうかを検討することが難しく、間違っている具体的な場面を考え出すことができなかった。検討の結果、男子を並べその間に女子 3 人を並べる解法（問題(4)生徒の解答 1）が、もれなく数えたり、重複なく数えたりすることを検討するのに一番分かりやすいという結論になった。

(4) 問題(5)の取組状況について

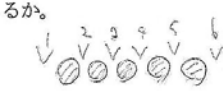
問題(4)の検討が終了した後に、問題(5)に取り組ませた。問題(4)で、男子を並べその間に女子 3 人を並べる解法が分かりやすいと感じた生徒は、同じ解法で問題(5)に取り組むことが予想される。その中で、何人の生徒が人を並べることと基石を並べることの違いに気付くのであろうか。授業後にワークシートを回収し、解答状況を確認したところ、下のとおりとなり、正解者はいなかった。解法は正しかったが、人と基石を区別することはできなかった。また、問題(4)で十分吟味したにもかかわらず、すべての並び方から白の基石 3 個が隣り合う並び方を引く解法を試みた生徒も 8 人いた。また、図だけを書いた生徒はすべて、黒の基石を並べ、その間に白の基石を並べた図であった。図は書けたが立式することができなかった。

解 答 状 況			
問題(5)	誤答	黒の基石を並べ、その間に白の基石を並べる (5! × 6 × 5 × 4)	20 名
		すべての並び方から白の基石 3 個が隣り合う並び方を引く (8! - 6! × 3!)	8 名
		図だけが示されている	6 名

次に示すものは、誤答であった生徒の解答のうち、黒の基石を並べ、その間に白の基石を並べる (5! × 6 × 5 × 4) 解法と、すべての並び方から白の基石 3 個が隣り合う並び方を引く (8! - 6! × 3!) 解法である。

問題(5) 生徒の解答 1

(5) 黒の基石 5 個と白の基石 3 個を一列に並べるとき、白の基石どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。



$$\begin{aligned}
 &5! \times 6 \times 5 \times 4 \\
 &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 120 \\
 &= 120 \times 120 \\
 &= 14400
 \end{aligned}$$

14400 (通り)

問題(5) 生徒の解答 2

(5) 黒の基石 5 個と白の基石 3 個を一列に並べるとき、白の基石どうしが隣り合わない並べ方は何通りあるか。



(全体) - (隣り合う並び方) = (隣り合わない並び方)

$$8! - 6! \times 3! = 40320 - 4320 \\ = 36000$$

A 36000 通り

正解にたどり着いた生徒が誰もいないことを確認してから、解答を黒板に書かずに正しい結果 (20 通り) だけを伝え、自分たちの解答の間違いをグループごとに話し合わせた。次は、そのときのある 1 つのグループのやりとりである。

J : どうして、たったの 20 通りしかないの！これ！

僕は、さっきの問題(4)と同じ方法でやったんだけど、みんなはどうしたの。

K :僕は、全体から隣り合う並び方を引いてやってみた。

L : 私は、J 君と同じようにやったわ。

M : 私もそう。

J : K 君のやり方だと、さっきと同じように、2 個の白が隣同士になることもあるから、それを考えないといけないんじゃないかな。

K : そうか、そうだったね。とすると、J 君たちのようなやり方になるよね。でも、今度はそれが何でだめなんだろう。

L : 5 個の黒の基石を並べて、その間に 3 個の白の基石を置けばいいんだから、おかしくないよね。黒の基石の並べ方は、5! 通りだし、3 個の白の基石の置き方は、6 カ所から順番を考えて 3 カ所選べばいいんだから、 ${}_6P_3$ 通りになるはずよね。

M : 確かに、もれなく数えたり、ダブリなく数えたりしているはずだけど…。全然数字が違うと言うことは、根本的に何かが違うっているのかな。

一同 : …

教師 : 今までの問題と問題(5)の違いを考えるといいアイディアが浮かぶかもしれないよ。

J : 違いといっても、数字が違うことはあまり関係ないだろうから、そうすると並べるものがさっきまでは人だったけど、今度は基石に変わったよね、そこに違いがあるのかな。

M : そうか、人を並べるときは、例えば、AさんとBさんが入れ替わると違う並び方だけど、黒の基石が入れ替わっても同じということなんじゃない。

J : そうか、それが違うのかな。そうすると、20 通りぐらいになるのかな。

L : そうすると、同じように考えていって求めてみると、5 個の黒の基石の並べ方を考えて、その間に 3 個の白の基石を並べればいいのかから…。

えっ、黒の基石の並べ方って何通りあるの？

K : もしかして、1 通りだったりして。

J : そうだよ。1 通りしかないんだよ。だって、入れ替えても同じだし、もれもないし、ダブリもないよね。

M : そうすると、3 個の白の並べ方は、順番を考えないから組合せになって、 ${}_6C_3$ 通りでいいのかな。

L : そうか、そうすると $1 \times {}_6C_3$ 通りだから、計算すると…、20 通りだ。

J : やった！解決した！

でも、同じように並べる問題でも、並べるものが変わるだけでこんなに変わるんだね。

このグループでは、なかなか解決の糸口を見いだすことができなかったもので、教師が「違いを考える」ことを助言すると、そこから解決の糸口を見いだした。会話として表現すると、わずかではあるが、時間になると15分程度は試行錯誤を繰り返していた。今までの学習との違いが、新たにアイディアの創出になることは、まま起こり得る。生徒が立ち往生しているときには、教師の適切な助言で議論が進むことがある。この場合も、タイミングと助言の出し方が、グループ学習のポイントとなった。

計算上はもれなく数えたり、重複なく数えたりしていても、何を並べるか、何を選ぶかによって立式が異なることがある。ここでは、それを実感させたかった。ほとんどすべてのグループで解決までたどり着くことができたが、助言を必要としなかったグループは1グループだけであった。しかし、今回の演習を通して、もれなく数える、重複なく数える、何を数えるのかを考えたことで、今後、様々な問題に取り組むときにその成果が現れるのではないと思われる。

(5) 振り返りシートから

授業終了後に振り返りシートを記入させた。結果は以下のとおりである。

○選択肢による質問

質 問 項 目		4	3	2	1
1	問題(4)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	23 (67.6%)	10 (29.4%)	1 (2.9%)	0 (0.0%)
2	問題(5)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	22 (64.7%)	10 (29.4%)	2 (5.9%)	0 (0.0%)
3	問題(3)では、多様な解き方を理解できた。	15 (44.1%)	13 (38.2%)	4 (11.8%)	2 (5.9%)
4	順列と組合せの違いを理解できた。	6 (17.6%)	20 (58.8%)	7 (20.6%)	1 (2.9%)
5	誤答に対して、なぜ間違っているかを考えることにより、その問題自体の理解が深まった。	16 (47.1%)	14 (41.2%)	3 (8.8%)	1 (2.9%)

4…あてはまる 3…だいたいあてはまる 2…あまりあてはまらない 1…あてはまらない

○自由記述による質問

6 今日の授業で分かったことを書いてください。(主な意見)

- ・ どうして間違ったのかと考えることが大切だということが分かりました。
- ・ 一人では分からないことが、みんなで考えると分かった。すごい。
- ・ 場合の数を求めるときは、もれなくダブリなく数えることが大切なことが分かった。
- ・ ワンパターンで考えるのではなく、様々な解き方で考え、自分は何を間違っているのかをよく考えることが大切だと気付いた。
- ・ 1つの問題にもいろいろな解き方があったことが分かった。
- ・ 順列と組合せがゴチャゴチャになっていたが、今回の授業でその考え方が少し分かるようになった。
- ・ 同じ「並べる」問題なのに、順列で考えたり、組合せで考えたりすることがあるとは思わなかった。これからは、よく考えて求めたい。

等

「誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた」という1、2の質問に対して、9割以上の生徒から肯定的な回答が得られた。また、「授業で分かったこと(自由記述)」で

は、次のように、

「どうして間違っただのかと考えることが大切だということが分かりました。」

「場合の数を求めるときは、もれなくダブリなく数えることが大切なことが分かった。」

という記述が多かった。順列か組合せかを判断するだけで求められる場合は別として、やや複雑になった問題において場合の数を求める際には、もれなく数えたり、重複なく数えたりすることに留意することが重要である。そのために、具体的な場面をイメージしながら考えたことは、生徒たちにとって貴重な経験であったと思われる。

また、「授業で分かったこと（自由記述）」にあるように、「一人では分からないことが、みんなで考えると分かった。すごい。」という意見があった。1人で考えているとすぐにあきらめてしまう生徒にとって、グループで取り組んだことは有効に働いたと考えられる。友人の意見を聞いたり、自らの意見を述べたりすることで考えを深め、考え方を身に付けていくことができたのではないと思われる。クラス全体で授業に取り組んでいるときには、意見があっても発表することができない生徒がいる。このような生徒であっても、数名のグループの中では意見を述べるのが可能となる。授業の時間はかかるが、考え方を身に付けるためには有効な手段となる。

また、本時のもう1つの目標である「順列と組合せの違いについて理解を深める」ことについては、「順列と組合せの違いを理解できた」という4の質問に対して8割程度の生徒が肯定的に解答した。また、「授業で分かったこと（自由記述）」では、「順列と組合せがゴチャゴチャになっていたが、今回の授業でその考え方が少し分かるようになった。」という意見がいくつかあった。問題(4)と問題(5)で同じように並べる場合を考える際に、並べるものが変わると、その考え方が変わることに、生徒は新鮮な驚きを感じていた。『並べる』は順列、『選ぶ』は組合せ」と短絡的に覚えていた生徒にとっては、ショッキングな問題であったようだ。まだまだ十分ではないところもあるが、順列と組合せの違いを再度確認することができた。

4 実践を振り返って

生徒にとって「分かる授業」を実践することは、教師としては最大のテーマであり、そして、永遠の課題である。何とか分かってもらおうと思って指導しても、なかなか生徒にはその意が伝わらず、分かてもらえないことが多々ある。今回の実践を通して、分かる授業を実践するためのポイントを2つ確認することができた。

1つは、ねらいを明確にすることである。ねらいの明確化は常に心がけなければならないことであるが、その際、留意しなければならないことは、知識だけを理解させようとするのではなく、考え方を身に付けさせることをねらいとする授業を実践することである。時に生徒は、公式を覚え、解法を覚えるだけに陥ることがある。そのように身に付けた公式や解法は、活用することはできない。生きた知識となるためには、考え方を身に付けさせることが重要であり、それは、生徒自身が問題を多く解くことで身に付けるまで待つのではなく、積極的に仕掛けを用意して、その素地を作ることが大切となる。

もう1つは、生徒が実感を伴って分かる場面を設定することである。本事例における取組では、自分自身の解答をもとに、グループで協議することで、どこが間違っているか、なぜ間違っているかを検討した。一方的に示されただけでは、実感を伴って分かることにはならない。自分自身で考え、悩むからこそ分かることに結びつくのではないだろうか。1人で考えることができる生徒にとっては、グループで協議することは煩わしいと感じることもあるかもしれない。しかし、友人からの指摘や意見が刺激となり、実感を伴って分かることに結びつき、また、できる生徒にとっても、違った視点からの意見が新鮮に感じることもある。したがって、適切な場面を設定し、協議させることは大変意義深いものになる。また、協議させる際には、場面

を設定するだけでなく何を協議させるかも重要になる。意図的に問題を設定することで、協議の成果が変わってくる。何を考えさせたいのか、何を協議させたいのか、すなわち、前出したねらいを明確にした上で、問題の設定を工夫して、取り組むことが大切になる。

<参考文献>

高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編 文部科学省 平成 11 年 12 月

高等学校学習指導要領解説 数学編 文部科学省 平成 21 年 7 月

高等学校における授業改善のための評価の在り方 奈良県立教育研究所 平成 16 年 3 月

おわりに

「分かる授業」の実践は、教師にとって常に追い求めていく永遠のテーマである。今回の調査研究では、生徒の主体的な活動（数学的活動）を取り入れることで、数学的な内容を生徒自身が実感を伴って分かる授業について考えた。調査研究の過程では、研究協力委員とともに、何度も協議を繰り返し、試行錯誤の上で事例の作成に取り組むことができた。得られた成果と課題から、分かる授業を実践するためには、次の2点について留意していかなければならない。

生徒自身が実感を伴って分かること

「分かる授業」を展開するためには、生徒自信が実感を伴って分かることが重要である。そのためには、数学的な性質を生徒自身が発見したり（**事例1**）、定理の成り立ちの過程を生徒自身が考察したり（**事例2**）、解答の誤りの原因を生徒自身が気付いたり（**事例3**）すること等が大切である。これらの「発見」「考察」「気付き」によって、生徒自身が実感を伴って分かったと感じる。教師によって一方的に示された性質、定理、解答の誤りでは、分かったと感じることはあっても実感を伴って感じるまでには至らないことが多い。単元の中の重要な事柄や、一方的に示しただけでは理解が困難な事柄等の授業の場面では、適切に数学的活動を設定し、授業を展開していく必要がある。

ねらいの設定、授業展開の工夫

生徒自身が実感ともなって分かる場面を設定するためには、授業の中で数学的活動を適切に設定することが重要である。しかし、単に活動を設定するだけではなく、授業のねらいを明確にすること、生徒に発見させたいこと、考察させたいこと、気付かせたいことを明確にすることが大切である。その上で、授業の中に仕掛けを設定し、生徒自身が「発見できた」「考えることができた」「気付いた」と思えるような数学的活動を取り入れることが重要になる。

授業の中の仕掛けとしては、教科書の学習の順序を入れ替えること（**事例1**）、作業を通して得られたデータを生徒自身に考察させること（**事例2**）、正答を求めるだけではなく誤答を生かすこと（**事例3**）などが考えられる。さらに、考察させる際には、発問や生徒の考えを引き出す補助発問の出し方が重要となる。解答のヒントを与えるのではなく、考え方のヒントを与えなければならない。そのためには、生徒の実態を十分に把握する必要がある。また、考察させる場面では、生徒が1人で考えるだけではなく、グループで話し合わせたり、隣の生徒と話し合わせたりすることなど、生徒同士によるコミュニケーションが有効な方法の1つになる。

ここで示した事例が「分かる授業」のすべてではない。生徒の実態に応じて、授業者一人一人が常に「分かる授業」の実践について考えていくことが重要であり、考えることを前提として、授業者、そして、生徒一人一人の中に「分かる授業」が創造されていくことになる。事例の中の生徒の振り返りシートに示されていたように「考えることはおもしろい」、「数学の楽しさはこういうところにあると思った」といった感想を生徒が実感できる授業を展開していくことを心掛ける必要がある。

また、ここで示した事例のような授業を毎時間実施することは難しい。数学科の授業では、基礎的・基本的なことを教え込む場面、数学的な内容を考える場面、反復練習をもとに定着を図る場面、複雑な問題をじっくりと考える場面、単元と単元をつなげる場面等、様々な場面が存在する。その時々に応じて、授業展開を考えていくことが大切である。

今回の事例を読んでいただいたことを契機に、さらに「分かる授業」について考えていただくことが、本調査研究の最大の成果となる。

高等学校における教科指導の充実
数 学 科
分かる授業の展開の工夫～数学的活動の充実～

発 行 平成22年3月
栃木県総合教育センター 研究調査部
〒320-0002 栃木県宇都宮市瓦谷町1070
TEL 028-665-7204 FAX 028-665-7303
URL <http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/>