事例３　**「場合の数の考え方・求め方が分かる」ための指導の工夫**

１　事例の概要

（１）新学習指導要領との関わり

中学校における場合の数・確率の学習は、中学校第２学年で「起こり得る場合の数、確率」として行われる。平成 14 年告示の学習指導要領においては、起こり得る場合の数を求めることについて次のように示されている。

「確率の学習を進めるにあたって、起こり得る場合を順序よく整理し、正しく数え上げることを学ぶ。ただし、その程度については、樹形図や二次元の表などを利用して、起こり得るすべての場合を簡単に求めることができる程度の事象を取り上げることにする。」

すなわち、中学校では、計算等によって場合の数を求めることはなく、樹形図や二次元の表を利用して、その構造を把握しながら簡単な場合の数について学習している。

下の図のように、新学習指導要領においては、小学校第６学年、中学校第１学年で「資料の考察」、「資料の散らばりと代表値」として統計分野についての学習をする。また、小学校第６学年、中学校第２学年で「起こり得る場合」、「確率」として確率分野について学習する。

小学校算数科・中学校数学科における確率・統計分野の学習

現行の学習指導要領

小学校第６学年

「平均の意味」の学習

平均の意味について理解し、それを用いることができるようにすることをねらいとして学習する。

↓

中学校第２学年

「確率」の学習

具体的な事象についての観察や実験を通して、確率について理解することをねらいとして学習する。

- ・起こり得る場合を順序よく整理することができる。
- ・不確定な事象が起こり得る程度を表す確率の意味を理解し、簡単な場合について確率を求めることができる。

○確率の意味
○起こり得る場合の数
○簡単な場合について確率を求めること

新学習指導要領

小学校第６学年

「資料の考察」の学習

資料の代表値としての平均や度数分布の表、柱状グラフを取り扱うなど、統計的な考察をしたり表現をしたりする能力を伸ばすことをねらいとして学習する。

「起こり得る場合」の学習

起こり得るすべての場合を適切な観点から分類整理して、順序よく列挙できるようにすることをねらいとして学習する。

↓

中学校第１学年

「資料の散らばりと代表値」の学習

目的に応じて資料を収集し、表やグラフに整理し、代表値や資料の散らばりに着目して資料の傾向を読み取ることができるようにすることをねらいとして学習する。

↓

中学校第２学年

「確率」の学習

不確定な事象についての観察や実験などの活動を通して、確率について理解し、それを用いて考察し表現することができるようにすることをねらいとして学習する。

- ・確率の必要性と意味を理解し、簡単な場合について確率を求めることができる。
- ・確率を用いて不確定な事象を捉え説明することができる。

○確率の必要性や意味
○簡単な場合について確率を求めること
○不確定な事象をとらえ説明すること

今回の学習指導要領の改訂により、小学校、中学校においては、確率・統計分野の学習の充実が図られた。場合の数については、中学校第２学年だけで学習している現在の生徒と異なり、小学校第６学年での学習、中学校第２学年での学習とスパイラルに学習することになり、より定着がなされた上で高等学校に入学してくることが予想される。

このような状況の中で、高等学校の数学Ａにおける場合の数と確率における学習は、下の図のように変わる。

高等学校数学Ａにおける場合の数と確率の学習

現行学習指導要領

場合の数と確率

具体的な事象の考察などを通して、順列・組合せや確率について理解し､不確定な事象を数理的にとらえることの有用性を認識するとともに､事象を数学的に考察し処理できるようにする。

○順列・組合せ
○確率とその基本的な法則
○独立な試行と確率

⇒

新学習指導要領

場合の数と確率

場合の数を求めるときの基本的な考え方や確率についての理解を深め､それらを事象の考察に活用できるようにする。

○場合の数
　数え上げの原則
　順列・組合せ
○確率
　確率とその基本的な法則
　独立な試行と確率
　条件付き確率

高等学校においても､「数え上げの原則」､「条件付き確率」が新たに加わり、数学Ⅰに加わった統計分野の「データの分析」とともに、確率・統計分野の学習の内容が充実することになる｡「数え上げの原則」において学習する内容は､集合の要素の個数に関する基本的な関係、和の法則、積の法則についてである。新たに加わる学習内容はないが、新たに項立てすることによって、場合の数をもれなく、重複することなく数え上げることの大切さをさらに実感させることをねらいとしている。また､「条件付き確率」では、具体例を通してその意味を理解させたり､簡単な場面について条件付き確率を求めたり､確率の乗法定理を扱ったりする。現行の学習指導要領では数学Ｃで扱っていた内容であったので、一部の生徒しか学習していなかったが、数学Ａで扱うことになり、多くの生徒が学習することを考えると、教材の工夫が重要となってくる。

今回の学習指導要領の改訂にあたって、小学校、中学校での学習内容を十分理解し、高等学校における確率・統計分野の指導の在り方を考えていかなければならない。

（２）場合の数の学習における「分かる」指導について

場合の数の学習で理解させたいことは、次のようにまとめることができる。

場合の数の学習で「理解させたいこと」

・樹形図による数え上げの原則
・和の法則と積の法則の意味、法則による場合の数の求め方
・場合の数を数え上げる有効な方法（もれなく、重複なく数える）
・順列、組合せの意味とその総数の求め方
・公式の有用性
・順列、組合せを使った様々な考え方

これらの内容は、相互に関連し合っている。しかし、生徒は、学習が進むにしたがって、「これは順列なのか組合せなのか」の判断が中心となり、もれなく数えること、重複なく数

えることへの注意が疎かになることがある。

そこで、この取組では、順列と組合せの学習の終了後に、場合の数を数える際の考え方と、順列と組合せの違いが実感を伴って分かることをねらいとして指導計画を立てた。授業では、問題の設定を工夫することで、間違った部分やその理由を生徒自身に考えさせ、そのことから、もれなく数えること、重複なく数えることの意味を実感させたい。その際、多くの視点が得られるようにグループでの学習を取り入れる。また、人を並べることと碁石を並べることの違いを考えることで、順列と組合せについての理解を深めさせたい。この実践によって、ばらばらだった考え方や知識が意味を持って関連付けられ、場合の数の考え方や求め方が分かった状態になることが期待される。

2　指導計画

（１）単元「場合の数」の計画

①単元の目標

具体的な事象の考察を通して、順列・組合せの意味を理解し、その総数を求められるようにさせる。単に公式を暗記し、それを形式的に扱うのではなく、公式を用いることの有用性を認識させ、順列・組合せを使った様々な考え方ができるようにさせる。

②単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
A1起こり得る事柄に関心をもち、それぞれの場合の数を調べようとする。 A2いくつかの異なるものを順序を考えて並べる場合に関心をもち、調べようとする。 A3順列の考え方を用いて、いろいろな問題を解こうとする。 A4順序を考えずにいくつかのものを取り出す場合の数に関心をもち、順列とどのような関係にあるのかを調べようとする。 A5組合せの考え方を用いて、いろいろな問題を解こうとする。	B1数え上げるときに注意することは何かを考える。また、効率よく数えるために計算式を用いる手立てを考えることができる。 B2起こり得る事柄が順列に対応していることに気付くとともに、総数との関係を式を通して一般化することを考えることができる。 B3問題解決の過程で整理する方法として置き換えの考え方や繰り返しの考え方、輪を作る考え方の意義やよさに気付くことができる。 B4起こり得る事柄が組合せに対応していることに気付くとともに、総数との関係を式を通して一般化することを考えることができる。 B5問題解決の過程で題意を正しく理解し、規則性を見いだしたり、一般化する意義やよさに気付いたりすることができる。	C1樹形図を利用して数え上げることができる。 C2順列の公式を用いて場合の数を効率よく求めたり、式の値を正確に計算できる。 C3置き換え、円順列、重複順列等の公式を使って、場合の数を求めることができる。 C4組合せの公式を用いて場合の数を効率よく求めたり、式の値を正確に計算したりすることができる。 C5図や文字、記号を用いて問題を整理・分析し、場合の数を効率よく求めることができる。	D1起こり得る事柄と和の法則、積の法則との関係を正しく理解している。 D2順列とその記号の意味を理解している。 D3置き換え、円順列、重複順列について理解している。 D4組合せとその記号の意味を理解している。 D5組合せの公式、組分け及び同じものを含む順列について理解している。

③単元の指導計画

時間	学習の目標	学習内容	評価規準
第１時間～第２時間	樹形図を用いて数え上げることの意味を考えるとともに、起こり得る事柄と和の法則、積の法則との関係を理解しながら、もれなく重複なく数え上げることができる。	樹形図 和の法則 積の法則	A1、B1、 C1、D1
第３時間～第５時間	順列の考え方とそのよさを理解し、場合の数を求めることができる。	順列の総数 順列の考え方の利用 円順列 重複順列	A2、B3、 C2、C3、 D2、D3
第６時間～第８時間	組合せの考え方とそのよさを理解し、場合の数を求めることができる。	組合せの総数 組合せの考え方の利用 組分けの総数 同じものを含む順列	A4、B4、 C4、D4、 D5
第９時間（**実践例**）	順列と組合せの考え方の違いをもとに、場合の数の求め方の理解を深める。	問題演習	B2、B5、 C5
第 10 時間	問題演習を通して、起こり得る事柄に関心をもつとともに、効率よく数えるための手立てを考える。	問題演習	A3、A5、 B2、B5、 C5

（２）第９時間「順列・組合せのさらなる理解のために」の計画

前述した単元計画のもと、順列と組合せの考え方の理解を含めて場合の数の求め方の深化を図るために、第９時間に「順列・組合せのさらなる理解のために」をテーマとして指導を計画した。この時間では、人の並び方をテーマにして、基本的事項を確認するとともに、考え方について間違えやすい問題を設定し、誤答が出た際にその理由を考えさせること（数学的活動）で、場合の数の考え方、求め方の理解を深めたい。特に、場合の数・確率の単元では、誤答である場合の理由は、「もれがある」、「重複している」ことが多い。これらの視点を生徒に示しながら、誤答である理由を考えさせていきたい。

この時間では、誤答である理由を考えることで、「場合の数の考え方・求め方が分かる授業」を展開したい。

①　前時までの授業の流れ

前述した単元計画のもと、下のように授業を展開した。順列まではおおむね良好な学習状況であったが、組合せの学習では、順列との区別がつかず、苦労している生徒もいた。

ア）第１時間～第２時間

樹形図の書き方、書く際の留意点等にふれ、樹形図を作成して場合の数を求めることを学習した。また、樹形図から規則性を見いだし、和の法則、積の法則を導き、もれなく、重複なく数え上げることの重要性を確認した。

イ）第３時間～第５時間

並べる順序の違いを区別する並び方に関する具体的な例をもとに、積の法則との関連を踏まえて場合の数（順列）について考察し、規則性を見出した。また、順列の総数や階乗の記号を導入し、その意味について学習した。具体的な例としては、数字の並び方による整数の個数、人の並び方、円順列、数珠順列、重複順列等の問題について扱い、順列の考え方、求め方の理解を深めた。

第９時間の授業との関わりとしては、次のような問題に取り組んだ。理解の状況はおおむね良好であった。

男子４人と女子３人が１列に並ぶとき、次の並び方は何通りあるか。 （１）すべての並び方 （２）両端が男子である並び方 （３）女子３人が続いて並ぶ並び方 （４）男子と女子が交互に並ぶ並び方

ウ）第６時間～第８時間

ものを取り出す順序を無視した組の作り方として具体的な例をもとに、場合の数（組合せ）について考察し、規則性を見出した。また、組合せの総数の記号を導入し、その意味について学習した。具体的な例として、人の選び方、図形的な問題、組分けの総数、同じものを含む順列（文字や数字の並べ方、最短経路）等の問題について扱い、組合せの考え方、求め方の理解を深めた。

②本時の目標（今回の授業で分かってほしいこと）

順列、組合せの基本的な考え方を確認するとともに、場合の数が誤答である理由を考察することで、場合の数の考え方、求め方の理解を深める。また、順列と組合せの違いについて理解を深める。

③教材の準備

次の問題をワークシートＮｏ１、Ｎｏ２として用意した。前日に配布し、ワークシートＮｏ１の問題（１）、（２）、（３）を授業までの課題とした。ワークシートＮｏ２は、Ｎｏ１の確認が終了後に、授業中に配布し、取り組ませた。

場合の数・ワークシートＮｏ１　　　　　　　１学年　組　番　氏名 ⑴ 男子５人と女子２人の計７人が一列に並ぶとき、すべての並び方は何通りあるか。 ⑵ 男子５人と女子２人の計７人が一列に並ぶとき、女子が隣り合う並び方は何通りあるか。 ⑶ 男子５人と女子２人の計７人が一列に並ぶとき、女子同士が隣り合わない並び方は何通りあるか。

場合の数・ワークシートＮｏ２　　　　　　　１学年　組　番　氏名 ⑷ 男子４人と女子３人の計７人が一列に並ぶとき、女子同士が隣り合わない並び方は何通りあるか。 ⑸ 黒の碁石５個と白の碁石３個を一列に並べるとき、白の碁石同士が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

また、授業の振り返りとして、次のシートを用意し、授業後に取り組ませた。

振り返りシート　　　　　　　　１学年　組　番　氏名	
＊以下の項目について、 ４…あてはまる　３…だいたいあてはまる　２…あまりあてはまらない　１…あてはまらない として、該当する番号を○で囲んでください。	
1　問題(4)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	４・３・２・１
2　問題(5)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	４・３・２・１
3　問題(3)では、多様な解き方を理解できた。	４・３・２・１
4　順列と組合せの違いを理解できた。	４・３・２・１
5　誤答に対して、なぜ間違っているかを考えることにより、その問題自体の理解が深まった。	４・３・２・１
6　今日の授業で分かったことを書いてください。（自由記述）	
7　今日の授業に関する感想を書いてください。（自由記述）	

④展開計画

学習活動		学習のねらい	指導上の留意点
導入	問題(1)、(2)の確認（生徒の板書）	解答の確認をすることで、順列の考え方、求め方について確認する。	課題の実施状況を確認することで、定着状況を把握する。 （ワークシートＮｏ１）
展開	問題(3)の確認 （生徒の板書）	いくつかの解法を確認することで、場合の数の考え方について理解を深める。	全体から女子が隣り合う並び方を除くことが予想されるが、直接求める求め方についても触れる。 （ワークシートＮｏ１）
	問題(4)への取組 各自取り組んだ後に、なぜ間違っているのかをグループで考える。	誤答である理由を考察することで、場合の数の考え方、求め方についての理解を深める。	正答、誤答にかかわらず、考え方に違いや、もれがないか、重複がないかという視点に着目させる。 （ワークシートＮｏ２）
	問題(5)への取組 各自取り組んだ後に、なぜ間違っているのかをグループで考える。	誤答である理由を考察することで、順列と組合せの違いについての理解を深める。	
まとめ	授業の振り返り		振り返りシートを用いて授業の振り返りを行わせる。

3　授業記録

授業は、習熟度別授業を実施している第１学年のクラスの中で、習熟度の高い１クラス 34 名に対して行った。授業中の生徒の様子と、ワークシートの記入状況は次のとおりであった。

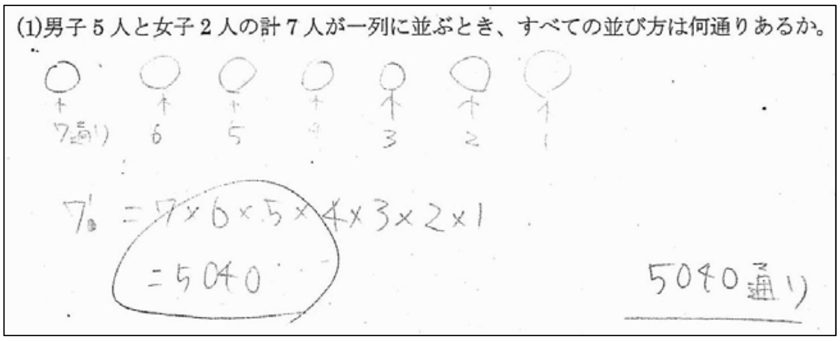
（１）問題(1)、(2)の状況について

授業では、それぞれ１名の生徒に板書させ解説をさせたが、理解の状況はおおむね良好であった。

解答の状況については、右の表のように、問題(1)については、誤答であった生徒は、計算ミスをした生徒1名だけであった。28名の生徒（全体の82.4%）が「7！（通り）」と考え､残りの5名の生徒(全体の14.7%)が「7×6×5×4×3×2×1（通り）」と考えて解答した。

	解　答　状　況		
問題(1)	正答	7！	28名
		7×6×5×4×3×2×1	5名
	誤答	計算ミス	1名
問題(2)	正答	6！×2！	31名
		6×5×4×3×2×1×2	2名
	誤答	6！	1名

問題(1)　生徒の解答


(1)男子５人と女子２人の計７人が一列に並ぶとき、すべての並び方は何通りあるか。

7通り　6　5　4　3　2　1

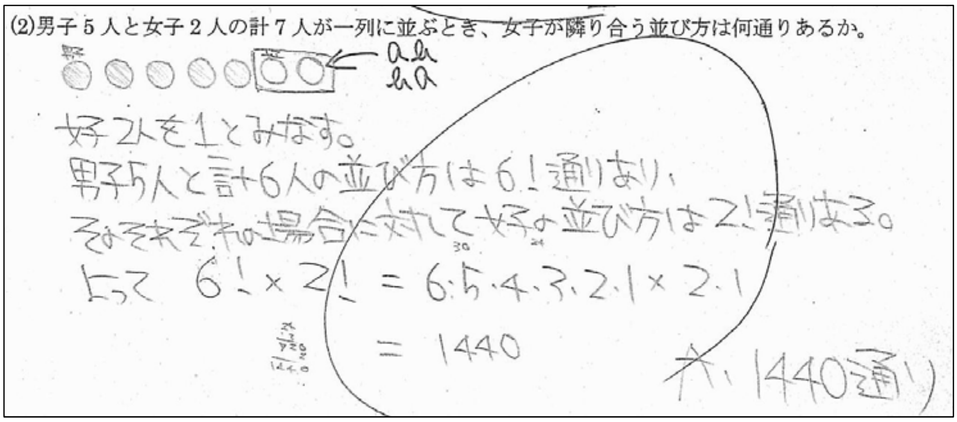
7! = 7×6×5×4×3×2×1

= 5040

5040通り

また、問題(2)については、誤答であった生徒は､「6！（通り）」と考えた生徒 1 名だけであった。31名の生徒（全体の91.2%）が「6！×2！（通り）」と考え、残り2名の生徒（全体の5.9%）が「6×5×4×3×2×1×2（通り）」と考えて解答した。

問題(2)　生徒の解答


(2)男子５人と女子２人の計７人が一列に並ぶとき、女子が隣り合う並び方は何通りあるか。

女子2人を1とみなす。

男子5人と計6人の並び方は6！通りあり、

それぞれの場合に対して女子の並び方は2！通りある。

よって　6！×2！ = 6・5・4・3・2・1×2・1

= 1440

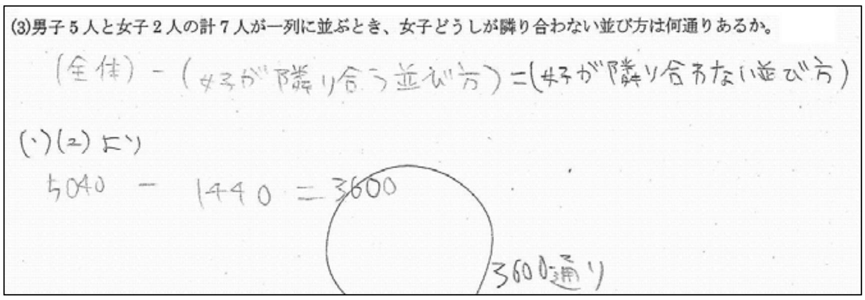
答　1440通り

課題であったこともあってか、ほぼすべての生徒が正答を導くことができた。また、正答を導く過程で、順列の考え方、求め方を確認することができた。

（２）問題(3)の状況について

授業では、1名の生徒に板書させ、解説をさせた。ほぼすべての生徒が、問題(1)、(2)を利用して、すべての並び方から女子が隣り合う並び方を引くことで、正答を導くことができたようで、納得していた。板書させた生徒の解答は右のような解答であった。

問題(3)　生徒の解答１


(3)男子５人と女子２人の計７人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

(全体) − (女子が隣り合う並び方) = (女子が隣り合わない並び方)

(1)(2)より

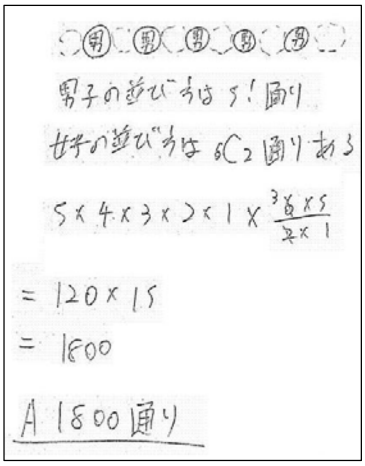
5040 − 1440 = 3600

3600通り

しかし、１名の生徒が右のような解答を提示して、「これではなぜいけないでしょうか？」と疑問を投げかけた。この生徒だけが、順列の学習の際に「男子と女子が交互に並ぶ並び方は何通りあるか。」という問題を扱ったときの解法で考えていた。予定はしていなかったが、この解法のどこに間違いがあるのかをクラス全員で話し合った。

まずは、この生徒に、解答を板書させて解法を説明させた。その後、他の生徒から様々な意見を言わせた。以下がそのときのやりとりである。

問題(3)　生徒の解答２


○㊚○㊚○㊚○㊚○㊚○

男子の並び方は 5!通り

女子の並び方は $_6C_2$ 通りある

$5\times4\times3\times2\times1\times\frac{6\times5}{2\times1}$

$=120\times15$

$=1800$

A 1800通り

教師：最初に、A君、この解き方を説明してくれますか？

Ａ：はい、僕は、他の人のように全体から引くことを考えずに、とりあえず、並べてみようと考えました。そのときに、前に授業でやったことを思い出して、男子を並べてみて、その間をすべて空けて、空いているところに女子を並べることを考えました。

教師：なるほど、とりあえずそこまでにしよう。そう考えたA君の続きを誰か説明してくれませんか。では、Bさんどうですか？

Ｂ：はい、○㊚○㊚○㊚○㊚○㊚○と並べると、男子の並び方は５人を一列に並べるので、**5！**通りの並べ方があると思います。

教師：はい、ありがとう。では、次はどうですか？では、Cさんどうですか？

Ｃ：はい、男子を並べることができたので、残りは女子になります。女子は、並べるところが、この○の６カ所のところなので、この６カ所から２カ所を選んで並べればよいから、$_6C_2$通りになります。ですから、5！と$_6C_2$をかけて、1800 通りになります。

あれ、あってるんじゃないの？

教師：はい、ありがとう。さあ、どうでしょうか？先ほど、Dさんに黒板に書いてもらったときには 3600 通りになり、みんなも納得しましたね。でも、この解法でいくと 1800 通りにしかなりません。どちらがどうおかしいのでしょうか？考えるときには、本当にすべての場合を考えたのか、また、すべての場合を考えたときにダブって考えたことはないかどうかを考えてみてください。樹形図のところで学習した、もれはないか、重複はしていないかということです。

Ｅ：はい。確かにこの方法でも解けると思うのですが、女子を並べるときに、これは、順番も考えなければならないから、組合せではなくて、順列にしないといけないではないでしょうか。

教師：なるほど。具体的にはどう計算すればいいですか？

Ｅ：女子の並べ方が$_6C_2$通りとなっていますが、ここが、$_6P_2$通りになればいいじゃないかな。そうすれば、3600 通りになるし。

Ａ：そうか、僕が間違った。女子の並べ方は、組合せではなくて、順列だ。

教師：そうですね。ここでは、２人の女子は区別して考えなければならないので、並べるときには、６カ所から２カ所を選んで並べなければ、２人の女子の並べ方にならないね。要するに、数え方にもれがあったことになるわけですね。これで解決かな。他の人でまだ疑問のある人はいますか？

このように、ここでは、順列と組合せの間違いをしてしまいましたが、要するに、すべての場合を考えていなかったことになりますね。もれていたことになります。ですから、場合の数を求めるときには、やはり、もれがないか、ダブって数えていないか、常に注意して考えていくことが大切ですね。

A君、よい解答を出してくれて本当にありがとう。

ここでは、教師が生徒の意見を導いた。また、発表者（Ａ君）だけの意見にならないように、最初の説明を途中で遮り、他の生徒（Ｂさん、Ｃさん）に続きを説明させた。このことで、Ａ君の考えを多くの生徒で共有することができ、授業への参加意欲を高めることができた。

また、当初の指導計画では、問題(4)、(5)の際に、場合の数の問題の誤答を考える視点を与えるつもりであったが、考えるのによい解答が提案されたので、ここで取り扱った。生徒にとっては、順列と組合せの違いであると安易に考えてしまうところである。しかし、その起こり得る場合の状況を的確に把握し、もれなく数えているか、重複なく数えているかを考えさせることが重要であることを認識させることが大切である。特に、この問題では、Ｅさんの発言の中の「女子を並べるときに、これは、順番も考えなければならないから」という言葉がキーとなっている。すなわち、「順番も考えなければならないから」という発言は数え方にもれがあるということを意味している。

問題(3)の解答状況は右のとおりであった。問題(1)、(2)、(3)の解答状況を見ると、ほぼすべての生徒が順列、組合せについての基本的な事項の理解は、おおむね満足いくものであった。

	解　答　状　況		
問題(3)	正答	すべての並び方から女子が隣り合う並び方を引く	31 名
	誤答	問題(2)が計算ミス	1 名
		数え方にもれがあった（前述した生徒）	1 名

（３）問題(4)の取組状況について

問題(3)が終了した後に、各自で問題(4)に取り組ませた。問題(3)は１名を除くすべての生徒が、すべての並び方から女子が隣り合う並び方を引く方法を選択していた。したがって、問題(4)も多くの生徒が、同様の解法で取り組み、誤答となることが予想された。授業後にワークシートを回収し、解答状況を確認したところ、右のとおりとなった。

	解　答　状　況		
問題(4)	正答	男子を並べ、その間に女子３人を並べる	1 名
	誤答	すべての並び方から女子３人が隣り合う並び方を引く（7！－5！×3！）	28 名
		7！－4！×3！	1 名
		すべての並び方から女子３人が隣り合う並び方と女子 2 人が隣り合う並び方を引く	4 名

正答であった生徒は、問題(3)で誤答となって取り上げた生徒であった。また、誤答であった生徒のうち、28 名の生徒（全体の 82.4%）が問題(3)と同様に取り組み、その解答にあまり疑問を抱かずに誤答となった。もれなく数えているか、重複なく数えているかを確認するまでには至らなかったようである。状況の把握や解答の吟味はまだ十分ではないと考えられる。また、すべての並び方から女子 3 人が隣り合う並び方と女子 2 人が隣り合う並び方を引く方法に取り組んだ生徒が 4 人いた。しかし、どの生徒も最後までたどり着くことはできなかった。

次に示すものは、正答であった生徒の解答、すべての並び方から女子 3 人が隣り合う並び方を引く（7！－5！×3！）解答、すべての並び方から女子 3 人が隣り合う並び方と女子 2 人が隣り合う並び方を引く解答である。

問題(4)　生徒の解答１（正答）

(4)男子４人と女子３人の計７人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

男子の並び方が4!通りあるそのそれぞれの場合に対して

女子の入る場所が5か所ありそのうちの3か所に入る入り方が$_5C_3$通りあるそのそれぞれの場合に対して
女子の3か所に入る入り方が3!通りある。

$4! \times {}_5C_3 \times 3!$

$= 4\times3\times2\times1\times\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times3\times2\times1$

$= 24\times10\times6$

$= 1440$

問題(4)　生徒の解答２（誤答　すべての並び方から女子３人が隣り合う並び方を引く）

(4)男子４人と女子３人の計７人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

(全体)－(女子が隣り合う並び方)＝(女子どうしが隣り合わない並び方)

女子3人を1人とみなし、
女子1組と男子4人の計5人の並び方は5!通りあり、
そのそれぞれの場合に対し女子3人の並び方は3!通りある。

$5!\times3! = 5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1$
$=720$

$7!-5!3!=4320$

問題(4)　生徒の解答３（誤答　すべての並び方から女子３人が隣り合う並び方と女子２人が隣り合う並び方を引く解答）

(4)男子４人と女子３人の計７人が一列に並ぶとき、女子どうしが隣り合わない並び方は何通りあるか。

○○○○○○○

(全体)－(女子どうしが隣り合う場合)を求めればよい。

(i) 女子3人を1組で見た場合とした場合

(○○○)○○○○

$5!\times3! = 5\times4\times3\times2\times1\times3\times2\times1$
$=120\times6$
$=720$

(ii) 女子2人で1組とした場合

○(○○)○○○○

○(○○)○○○○

隣り合わせに女がきてはいけない。

たとえば

(○○)○○○○○

女子を抜いた4通り　4通り　3通り　2　1

一番最初に女子1組がきたとき、

$3!\times4\times4\times3\times2\times1=576$通り

この並び方の数は一番最後に女子1組がきたときと同じ。

$576\times2=1152$通り

また、両端以外に女子2組が並んだ場合。

○(○○)○○○○

女子を抜いた4通り　女子を抜いた3通り　3通り　2通り　1通り

$4\times3!\times3\times3\times2\times1$

$=36\times12$

$=442$

これは、2番目に女子2組が並んだ場合であるが、3、4、5番目に並んだ時でも同じ並び方の数がある。よって

$442\times4=1768$

全体は $7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=504$

$5040-1768-1152-720$

$=1400$

1400通り

授業では、すべての並び方から女子３人が隣り合う並び方を引く（7！−5！×3！）解法を黒板に示し、この解答が間違っていることだけを伝えた。その後、4 人一組のグループとなって、どこが間違っているのか、なぜ間違っているのか、正しい解答はどのようなものかを15 分間で話し合わせた。以下は、そのときのある１つのグループのやりとりである。

Ｆ：みんなはどうやって解いたの？僕は、黒板と同じなんだけど。
Ｇ：えっ、私も黒板と同じ。
Ｈ：私も。
Ｉ：僕もだ。
Ｆ：これは、どこが間違っているんだろう。
Ｇ：さっきの問題(3)でやったことを考えると、もれなく数えているかとかダブって数えていないかとかを考えればいいわけだよね。
Ｆ：そうだね。これだと、もれなく数えていないのかな、ダブって数えているのかな。
Ｉ：具体的に書いてみれば分かるかもしれないよ。
例えば、全体は、7 人が一列に並ぶから、○○○○○○○で、男子、女子の区別がないから 7！通りになるよね。これにはもれもなく、ダブってもないから大丈夫だよね。
Ｈ：ここまでは問題ないよね。だとすると、5！×3！の方だよね、きっと。
Ｉ：これは、「男男女女女男男」のように女子３人が隣り合う並び方だよね。女子３人を１人と考えると全部で５人だから５！通りで、女子３人の並び方は３！通りだから、かけ算すればいいんだよね。おかしいかな。
Ｇ：そうか、わかった。これは、女子３人が隣同士になる場合しか考えていないんだ。
Ｆ：それが何か変かな。
Ｇ：だって、「男女男女女男男」のように女子２人が隣同士になることもあるんじゃないの。問題は、「女子同士が隣り合わない並び方」だったから、これも引かないといけないんだよ。
Ｆ：そうか、思いつかなかったけど、女子が３人いるから、2 人が隣同士で、もう１人が離れて並ぶことがあるのか。
Ｈ：だとすると、全体から、女子３人が隣同士で並ぶときと、女子２人が隣同士で並ぶ時を引けばいいんだね。そうすると、全体と、女子３人が隣同士で並ぶときはできているから、女子２人が隣同士で並ぶ場合を求めればいいんだね。
Ｉ：ということは、女子２人の選び方は、並び方も考えると $_3\mathrm{P}_2$ 通りで、残りの女子１人と隣同士の女子２人と男子４人の並べ方は６！通りだから、それをかければいいのかな。
Ｇ：でもそれだと、男女女女男男男のように、女子が３人並んでしまうことがあるんじゃない。
Ｉ：わかった！また、そこから女子３人が隣り合って並ぶこと引けばいいんじゃない。
そうすると、
$$7! - (5! \times 3!) - ({}_3\mathrm{P}_2 \times 6! - 5! \times 3!) = 720 \text{（通り）}$$
となるのかな。

このグループでは、どこが間違っているか、なぜ間違っているかまでは確認できたが、課題を解決するまでに至らなかった。しかし、場合の数を求めるときに、具体的な場面を考えて、もれなく数えているか、重複なく数えているかを確認することができた。このように、場合の数を求めるときには、具体的な場面を書き出しながら、確認すると有効であることが多い。グループでの話し合いの結果を聞いていると、多くのグループでそのことに気付き、取り組んでいた。その結果、すべての並び方から女子３人が隣り合う並び方を引く解法には誤りがあることにすべてのグループで気付いたが、課題を解決できたのは、最初に正答にたどり着いた生徒（問題(4)　生徒の解答１）がいるグループだけであった。

また、「問題(4)　生徒の解答３」を考えた生徒がいるグループでは、当該生徒の解答の検討に手こずってしまった。この解法において、もれなく数えているか、重複なく数えているかを吟味する際に、具体的な場面を考えながら進めていたが、数えもれを示す場面を発見するまでには至らなかった。

授業では、各グループで考えた解法を発表させ、それぞれの解法の問題点を検討した。発表された解法は、前述したグループの解答、問題(4)生徒の解答１、問題(4)生徒の解答３の３種類だったので、それぞれ１つずつ取り上げた。正答以外の解答では、もれなく数えたり、重複なく数えたりしているかどうかを検討することが難しく、間違っている具体的な場面を考え出すことができなかった。検討の結果、男子を並べその間に女子３人を並べる解法（問題(4)生徒の解答１）が、もれなく数えたり、重複なく数えたりすることを検討するのに一番分かりやすいという結論になった。

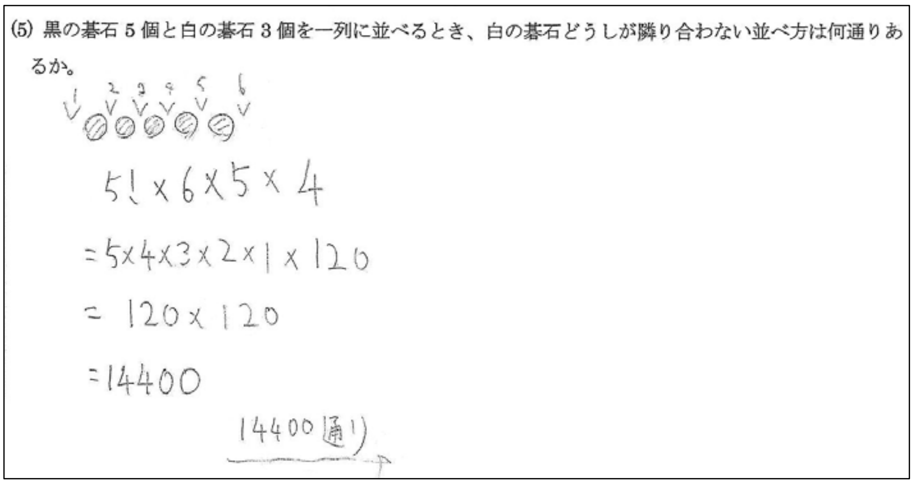
（４）問題(5)の取組状況について

問題(4)の検討が終了した後に、問題(5)に取り組ませた。問題(4)で、男子を並べその間に女子３人を並べる解法が分かりやすいと感じた生徒は、同じ解法で問題(5)に取り組むことが予想される。その中で、何人の生徒が人を並べることと碁石を並べることの違いに気付くのであろうか。授業後にワークシートを回収し、解答状況を確認したところ、下のとおりとなり、正解者はいなかった。解法は正しかったが、人と碁石を区別することはできなかった。また、問題(4)で十分吟味したにもかかわらず、すべての並び方から白の碁石３個が隣り合う並び方を引く解法を試みた生徒も８人いた。また、図だけを書いた生徒はすべて、黒の碁石を並べ、その間に白の碁石を並べた図であった。図は書けたが立式することができなかった。

	解　答　状　況		
問題(5)	誤答	黒の碁石を並べ、その間に白の碁石を並べる（5！×6×5×4）	20名
		すべての並び方から白の碁石３個が隣り合う並び方を引く（8！－6！×3！）	8名
		図だけが示されている	6名

次に示すものは、誤答であった生徒の解答のうち、黒の碁石を並べ、その間に白の碁石を並べる（5！×6×5×4）解法と、すべての並び方から白の碁石３個が隣り合う並び方を引く（8！－6！×3！）解法である。

問題(5)　生徒の解答１



問題(5)　生徒の解答２

(5) 黒の碁石５個と白の碁石３個を一列に並べるとき、白の碁石どうしが隣り合わない並べ方は何通りあるか。

●●●●●○○○

(全体)－(隣り合う並び方)＝(隣り合わない並び方)

$8!-6!\times3! = 40320-4320$

$= 36000$

A　36000通り

正解にたどり着いた生徒が誰もいないことを確認してから、解答を黒板に書かずに正しい結果（20 通り）だけを伝え、自分たちの解答の間違いをグループごとに話し合わせた。次は、そのときのある１つのグループのやりとりである。

Ｊ：どうして、たったの 20 通りしかないの！これ！
　　僕は、さっきの問題(4)と同じ方法でやったんだけど、みんなはどうしたの。
Ｋ：僕は、全体から隣り合う並び方を引いてやってみた。
Ｌ：私は、Ｊ君と同じようにやったわ。
Ｍ：私もそう。
Ｊ：K君のやり方だと、さっきと同じように、2 個の白が隣同士になることもあるから、それを考えないといけないんじゃないかな。
Ｋ：そうか、そうだったね。とすると、Ｊ君たちのようなやり方になるよね。でも、今度はそれが何でだめなんだろう。
Ｌ：5 個の黒の碁石を並べて、その間に 3 個の白の碁石を置けばいいんだから、おかしくないよね。黒の碁石の並べ方は、5！通りだし、3 個の白の碁石の置き方は、6 カ所から順番を考えて３カ所選べばいいんだから、${}_6P_3$通りになるはずよね。
Ｍ：確かに、もれなく数えたり、ダブりなく数えたりしているはずだけど…。全然数字が違うと言うことは、根本的に何かが違っているのかな。
一同：…
教師：今までの問題と問題(5)の違いを考えるといいアイディアが浮かぶかもしれないよ。
Ｊ：違いといっても、数字が違うことはあまり関係ないだろうから、そうすると並べるものがさっきまでは人だったけど、今度は碁石に変わったよね、そこに違いがあるのかな。
Ｍ：そうか、人を並べるときは、例えば、ＡさんとＢさんが入れ替わると違う並び方だけど、黒の碁石が入れ替わっても同じということなんじゃない。
Ｊ：そうか、それが違うのかな。そうすると、20 通りぐらいになるのかな。
Ｌ：そうすると、同じように考えていって求めてみると、5 個の黒の碁石の並べ方を考えて、その間に 3 個の白の碁石を並べればいいから…。
　　えっ、黒の碁石の並べ方って何通りあるの？
Ｋ：もしかして、１通りだったりして。
Ｊ：そうだよ。1 通りしかないんだよ。だって、入れ替えても同じだし、もれもないし、ダブりもないよね。
Ｍ：そうすると、3 個の白の並べ方は、順番を考えないから組合せになって、${}_6C_3$通りでいいのかな。
Ｌ：そうか、そうすると $1\times{}_6C_3$通りだから、計算すると…、20 通りだ。
Ｊ：やった！解決した！
　　でも、同じように並べる問題でも、並べるものが変わるだけでこんなに変わるんだね。

このグループでは、なかなか解決の糸口を見いだすことができなかったので、教師が「違いを考える」ことを助言すると、そこから解決の糸口を見いだした。会話として表現すると、わずかではあるが、時間にすると15分程度は試行錯誤を繰り返していた。今までの学習との違いが、新たにアイディアの創出になることは、まま起こり得る。生徒が立ち往生しているときには、教師の適切な助言で議論が進むことがある。この場合も、タイミングと助言の出し方が、グループ学習のポイントとなった。

計算上はもれなく数えたり、重複なく数えたりしていても、何を並べるか、何を選ぶかによって立式が異なることがある。ここでは、それを実感させたかった。ほとんどすべてのグループで解決までたどり着くことができたが、助言を必要としなかったグループは１グループだけであった。しかし、今回の演習を通して、もれなく数える、重複なく数える、何を数えるのかを考えたことで、今後、様々な問題に取り組むときにその成果が現れるのではないかと思われる。

（５）振り返りシートから

授業終了後に振り返りシートを記入させた。結果は以下のとおりである。

○選択肢による質問

	質　問　項　目	4	3	2	1
1	問題(4)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	23 (67.6%)	10 (29.4%)	1 (2.9%)	0 (0.0%)
2	問題(5)の誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた。	22 (64.7%)	10 (29.4%)	2 (5.9%)	0 (0.0%)
3	問題(3)では、多様な解き方を理解できた。	15 (44.1%)	13 (38.2%)	4 (11.8%)	2 (5.9%)
4	順列と組合せの違いを理解できた。	6 (17.6%)	20 (58.8%)	7 (20.6%)	1 (2.9%)
5	誤答に対して、なぜ間違っているかを考えることにより、その問題自体の理解が深まった。	16 (47.1%)	14 (41.2%)	3 (8.8%)	1 (2.9%)

４…あてはまる　３…だいたいあてはまる　２…あまりあてはまらない　１…あてはまらない

○自由記述による質問

６　今日の授業で分かったことを書いてください。（主な意見）

・どうして間違ったのかと考えることが大切だということが分かりました。
・一人では分からないことが、みんなで考えると分かった。すごい。
・場合の数を求めるときは、もれなくダブりなく数えることが大切なことが分かった。
・ワンパターンで考えるのではなく、様々な解き方で考え、自分は何を間違っているのかをよく考えることが大切だと気付いた。
・１つの問題にもいろいろな解き方があることが分かった。
・順列と組合せがゴチャゴチャになっていたが、今回の授業でその考え方が少し分かるようになった。
・同じ「並べる」問題なのに、順列で考えたり、組合せで考えたりすることがあるとは思わなかった。これからは、よく考えて求めたい。

等

「誤答に対して、どうして間違っているのか理解できた」という１、２の質問に対して、９割以上の生徒から肯定的な回答が得られた。また、「授業で分かったこと（自由記述）」で

は、次のように、

「どうして間違ったのかと考えることが大切だということが分かりました。」
「場合の数を求めるときは、もれなくダブりなく数えることが大切なことが分かった。」

という記述が多かった。順列か組合せかを判断するだけで求められる場合は別として、やや複雑になった問題において場合の数を求める際には、もれなく数えたり、重複なく数えたりすることに留意することが重要である。そのために、具体的な場面をイメージしながら考えたことは、生徒たちにとって貴重な経験であったと思われる。

また、「授業で分かったこと（自由記述）」にあるように、「一人では分からないことが、みんなで考えると分かった。すごい。」という意見があった。１人で考えているとすぐにあきらめてしまう生徒にとって、グループで取り組んだことは有効に働いたと考えられる。友人の意見を聞いたり、自らの意見を述べたりすることで考えを深め、考え方を身に付けていくことができたのではないかと思われる。クラス全体で授業に取り組んでいるときには、意見があっても発表することができない生徒がいる。このような生徒であっても、数名のグループの中では意見を述べることが可能となる。授業の時間はかかるが、考え方を身に付けるためには有効な手段となる。

また、本時のもう１つの目標である「順列と組合せの違いについて理解を深める」ことについては、「順列と組合せの違いを理解できた」という４の質問に対して８割程度の生徒が肯定的に解答した。また、「授業で分かったこと（自由記述）」では、「順列と組合せがゴチャゴチャになっていたが、今回の授業でその考え方が少し分かるようになった。」という意見がいくつかあった。問題⑷と問題⑸で同じように並べる場合を考える際に、並べるものが変わると、その考え方が変わることに、生徒は新鮮な驚きを感じていた。「『並べる』は順列、『選ぶ』は組合せ」と短絡的に覚えていた生徒にとっては、ショッキングな問題であったようだ。まだまだ十分ではないところもあるが、順列と組合せの違いを再度確認することができた。

４　実践を振り返って

生徒にとって「分かる授業」を実践することは、教師としては最大のテーマであり、そして、永遠の課題である。何とか分かってもらおうと思って指導しても、なかなか生徒にはその意が伝わらず、分かってもらえないことが多々ある。今回の実践を通して、分かる授業を実践するためのポイントを２つ確認することができた。

１つは、ねらいを明確にすることである。ねらいの明確化は常に心がけなければならないことであるが、その際、留意しなければならないことは、知識だけを理解させようとするのではなく、考え方を身に付けさせることをねらいとする授業を実践することである。時に生徒は、公式を覚え、解法を覚えるだけに陥ることがある。そのように身に付けた公式や解法は、活用することはできない。生きた知識となるためには、考え方を身に付けさせることが重要であり、それは、生徒自身が問題を多く解くことで身に付けるまで待つのではなく、積極的に仕掛けを用意して、その素地を作ることが大切となる。

もう１つは、生徒が実感を伴って分かる場面を設定することである。本事例における取組では、自分自身の解答をもとに、グループで協議することで、どこが間違っているか、なぜ間違っているかを検討した。一方的に示されただけでは、実感を伴って分かることにはならない。自分自身で考え、悩むからこそ分かることに結びつくのではないだろうか。１人で考えることができる生徒にとっては、グループで協議することは煩わしいと感じることもあるかもしれない。しかし、友人からの指摘や意見が刺激となり、実感を伴って分かることに結びつき、また、できる生徒にとっても、違った視点からの意見が新鮮に感じることがある。したがって、適切な場面を設定し、協議させることは大変意義深いものになる。また、協議させる際には、場面

を設定するだけではなく何を協議させるかも重要になる。意図的に問題を設定することで、協議の成果が変わってくる。何を考えさせたいのか、何を協議させたいのか、すなわち、前出したねらいを明確にした上で、問題の設定を工夫して、取り組むことが大切になる。

＜参考文献＞

高等学校学習指導要領解説　数学編・理数編　文部科学省　平成 11 年 12 月
高等学校学習指導要領解説　数学編　文部科学省　平成 21 年 7 月
高等学校における授業改善のための評価の在り方　奈良県立教育研究所　平成 16 年 3 月