

高等学校における教科指導の充実

理 科
《物理領域》

思考力・表現力を高める授業を目指して
[熱力学]

栃木県総合教育センター
平成22年 3 月

ま え が き

総合教育センターでは、基礎・基本の確実な定着を図るための授業改善を目指して、教科指導の在り方について研究し、その成果を普及することにより、生徒の学力の向上に資することを目的に、平成17年度より、「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」に取り組んでいます。

近年の教育課程実施状況調査や学力に関する国際的な調査では、日本の児童生徒の学力の状況や学習に対する意識などが明らかにされ、文部科学省等からも学力向上のための様々な対策が打ち出されたり提言がなされたりしています。

また、平成19年12月に公表された、OECD生徒の学習到達度調査（PISA2006年）では、科学的リテラシーをはじめ、数学的リテラシー、読解力のそれぞれについて問題点が指摘されています。

さらに、平成20年12月には、国際教育到達度評価学会（IEA）が行った国際数学・理科教育動向調査の2007年調査（TIMSS2007）の結果が公表され、学力低下に歯止めがかかったという分析がある一方で、パターン化された指導の弊害とも見られる結果も一部に見られ、思考力の育成に課題があることも指摘されています。

これらの調査の分析結果を踏まえ、中央教育審議会答申を経て、平成21年3月には、高等学校の新学習指導要領が公示されました。数学と理科が24年度から、国語、地理歴史、公民、外国語が25年度から学年進行で実施されます。今回の改訂の主な改善事項として、「言語活動の充実」、「理数教育の充実」が示されました。これらは、先に挙げた各種調査で、思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式の問題、知識・技能を活用する問題に課題が見られたことなどに対する改善策でもあります。

本調査研究においては、今年度、国語科、地理歴史科、数学科、理科、外国語科（英語）の各教科で、各種調査の結果から指摘されている課題と新学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえ、その解決を図るための授業改善について取り組みました。研究の成果をまとめた本冊子を有効に御活用いただければ幸いです。

最後に、調査研究を進めるにあたり、御協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

平成22年3月

栃木県総合教育センター所長

瓦 井 千 尋

目 次

研究の概要	1
事例Ⅰ 実験「熱伝導を利用した比熱の測定」	4
事例Ⅱ 観察「空気中、水中の微粒子が行うブラウン運動」	8
事例Ⅲ 実験「ペランの方法によるアボガドロ数の測定」	11
事例Ⅳ ものづくり「スターリングエンジンの仕組みを利用したおもちゃの製作」	16
事例Ⅴ ものづくり「スターリングクーラーの製作」	20
事例Ⅵ ものづくり「ジクロロメタンを用いたヒートポンプモデルの製作」	23
事例Ⅶ 実験「温度・圧力センサを用いたボイルの法則の検証」	25
事例Ⅷ 学習課題「熱力学第2法則についての理解を深めよう」	29

研究の概要

1 調査研究の背景

平成21年3月9日に、新しい高等学校学習指導要領が公示された。今回の改訂のポイントとして、次のように、**言語活動の充実、学習習慣の確立**が挙げられる。

＜高等学校学習指導要領 第1章 総則（抜粋）＞

第1款 1 学校の教育活動を進めるに当たっては、各学校において、生徒に生きる力をはぐくむことを目指し、創意工夫を生かした特色ある教育活動を展開する中で、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に習得させ、これらを活用して課題を解決するために必要な思考力、判断力、表現力その他の能力をはぐくむとともに、主体的に学習に取り組む態度を養い、個性を生かす教育の充実に努めなければならない。その際、生徒の発達段階を考慮して、生徒の言語活動を充実するとともに、家庭との連携を図りながら、生徒の学習習慣が確立するよう配慮しなければならない。

第5款 5 教育課程の実施等に当たって配慮すべき事項

(1) 各教科・科目等の指導に当たっては、生徒の思考力、判断力、表現力等をはぐくむ観点から、基礎的・基本的な知識及び技能の活用を図る学習活動を重視するとともに、言語に対する関心や理解を深め、言語に関する能力の育成を図る上で必要な言語環境を整え、生徒の言語活動を充実すること。

各教科における言語活動として、以下のような具体的事例を工夫していくことが求められる。

＜平成20年1月中央教育審議会答申（抜粋）＞

- ・観察・実験や社会見学のレポート作成において、視点を明確にして、観察したり見学したりした事象の差異点や共通点をとらえて記録・報告する。（理・社）
- ・比較や分類、関連付けといった考えるための技法、帰納的な考え方や演繹的な考え方などを活用して説明する。（数・理）
- ・仮説を立てて観察・実験を行い、その結果を評価し、まとめて表現する。（理）
- ・体験活動を振り返り、そこから学んだことを記述し、まとめたものを発表し合う。（特別活動・総合的な学習の時間）
- ・討論・討議などにより意見の異なる人を説得したり、協同的に議論して集団としての意見をまとめたりする。（特別活動・総合的な学習の時間）

以上の経緯を踏まえ、本調査研究では、学習指導要領の改訂の趣旨を踏まえるとともに、各種調査等から指摘されている各教科の指導上の課題について、その解決を図るための指導の工夫改善を目指して授業実践に取り組んだ。また、3回の調査研究委員会を通して、評価の観点を踏まえた教科指導の在り方について、各教科ごとに研究協議を行った。本書はそれらの取組を授業実践を中心に報告するものである。

2 高等学校理科における新学習指導要領への対応

平成20年1月の中央教育審議会答申においては、学習指導要領改訂の基本的な考え方が示されるとともに、各教科等の改善の基本方針や主な改善事項が示され、このたびの高等学校理科の改訂はこれらを踏まえて行われたものである。

この答申において、学習指導要領改訂の基本的な考え方について、「生きる力」という理念を共有しながら、基礎的・基本的な知識・技能の習得と思考力・判断力・表現力等の育成を両立させ、確かな学力を確立するとともに、学習意欲の向上や学習習慣の確立、豊かな心や健やかな体の育成のための指導の充実をねらいとすることが示された。特に今回は、教育内容に関する主な改善事項として、言語活動の充実、理数教育の充実などが示された。

答申の中で、高等学校理科の改善の具体的事項が示された。以下は、その一部であり、(ア)については、理科の改善の基本方針の「(エ)科学的な知識の概念の定着を図り、科学的な見方や考え方を育成するため、観察・実験や自然体験、科学的な体験を一層重視する方向で改善する。」及び「(カ)理科を学ぶことの意義や有用性を実感する機会をもたせ、科学への関心を高める観点から、実社会・実生活との関連を重視する内容を充実する方向で改善を図る。また、持続可能な社会の構築が求められている状況に鑑み、理科についても、環境教育の充実を図る方向で改善する。」を具体化したものであり、また、高等学校理科の改善の具体的事項(キ)は、「言語活動の充実」を受け、それを明確化したものである。

(ii) 改善の具体的事項

(高等学校)

探求的な学習を重視し、中学校理科の学習の成果を踏まえて自然科学の複数の領域を学び、基礎的な科学的素養を幅広く養い、科学に対する関心をもち続ける態度を育てるとともに、生徒一人一人の能力・適性・興味・関心、進路希望等に応じて深く学び、自然を探究する能力や態度を高めることができるよう、科目の構成及び内容等を次のように改善する。

(ア) 科学技術が発展し、実社会・実生活を豊かにしてきたことについて、身近な事物・現象に関する観察・実験などを通して理解させ、科学的な見方や考え方を養うとともに、自然や科学に関する興味・関心を高める新たな科目「科学と人間生活」を設ける。

「科学と人間生活」は、科学の発展、生活の中の科学、科学と人間生活などで構成する。

(略)

(キ) 科学的な思考力・表現力の育成を図る観点から、観察・実験、探究活動などにおいて、結果を分析し解釈して自らの考えを導き出し、それらを表現するなどの学習活動を一層重視する。

本調査研究では、高等学校理科の改善の具体的事項(ア)及び(キ)の趣旨を踏まえ、物理領域の分野の中でも、特に、用語の正確な定着が求められるとともに、文章によって論理を展開する部分の多い「熱力学」をテーマに、実験・観察を重視し、表現力の育成を目指した授業展開の研究に取り組み、次の八つの事例を作成した。

- 事例Ⅰ 実験「熱伝導を利用した比熱の測定」
- 事例Ⅱ 観察「空気中、水中の微粒子が行うブラウン運動」
- 事例Ⅲ 実験「ペランの方法によるアボガドロ数の測定」
- 事例Ⅳ ものづくり「スターリングエンジンの仕組みを利用したおもちゃの製作」
- 事例Ⅴ ものづくり「スターリングクーラーの製作」
- 事例Ⅵ ものづくり「ジクロロメタンを用いたヒートポンプモデルの製作」
- 事例Ⅶ 実験「温度・圧力センサを用いたボイルの法則の検証」
- 事例Ⅷ 学習課題「熱力学第2法則についての理解を深めよう」

事例Ⅰから事例Ⅶは、比較的入手しやすい材料を用いた実験・観察の例である。また、事例Ⅷは、事例Ⅰから事例Ⅶに関連した学習プリントであり、論理的思考力、読解力、文章表現力の向上をねらいとしたものである。生徒の実態に合わせ、これらを適宜組み合わせて活用していただきたい。

〈研究協力委員〉

栃木県立宇都宮白楊高等学校 教 諭 齋 藤 真 史

〈研究委員〉

栃木県総合教育センター研修部 副 主 幹 手 塚 貴 志

事例Ⅰ 実験「熱伝導を利用した比熱の測定」

1 ねらい

比熱の分かっている金属でできた物体Aと、比熱の分からない金属でできた物体Bに熱電対の温度センサーを取り付ける。物体Aのみを湯の中で温めてから、物体Bと接触させ、両物体が熱平衡に達するまでの、それぞれの温度を自動計測して温度変化の様子をグラフに表すとともに、その結果から物体Bの金属の比熱を求める。

2 準備

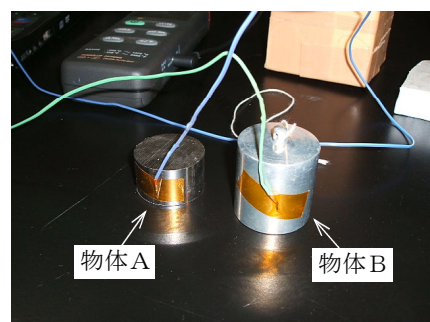
断熱容器（発泡ポリスチレンの板とガムテープを用いて自作したもの）、電子天秤、アルミニウム円柱（物体A）、ステンレス円柱（物体B）、ビーカーに入った湯（80℃程度）、4点式デジタル温度計FUS0-304（株式会社FUS0）、パソコン用の温度測定ソフトTestLink SE-309（株式会社FUS0）

3 実験の手順

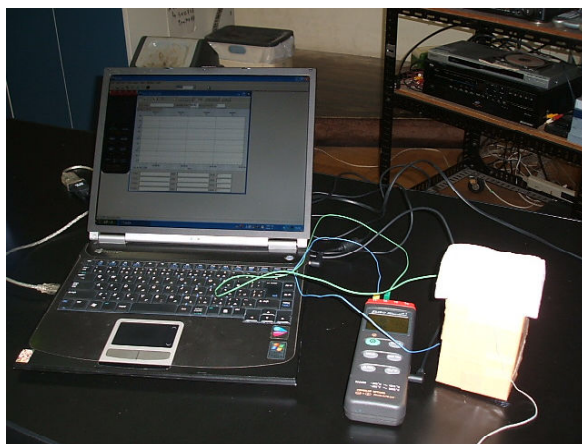
- (1) 物体A、Bの質量を電子天秤で量る。
- (2) 物体A、B側面に、それぞれ熱電対を取り付ける。
- (3) 物体Aをビーカーの湯の中に入れ、物体Bを断熱容器の中に入れる。
- (4) コンピュータで温度データの取り込みを開始する。
- (5) 物体A、Bの温度がいずれも安定したら、そのときの温度 T_A 、 T_B を記録する。
- (6) 物体Aを湯から取り出して断熱容器に入れ、容器の蓋を閉める。
- (7) 両物体の温度変化の様子を、パソコン画面上のグラフで観察する。
- (8) 両物体の温度が等しくなったら、温度データの取り込みを終了し、グラフをプリントアウトする。
- (9) グラフから、両物体が熱平衡に達したときの温度 T を読みとる。
- (10) T_A 、 T_B 、 T の値をもとに、物体Bの比熱を求める。
- (11) (8) で得られた温度変化を表すグラフについて、任意の時刻における両物体の温度曲線の勾配の比と、両物体の比熱との関係を考察する。



【自作した断熱容器】

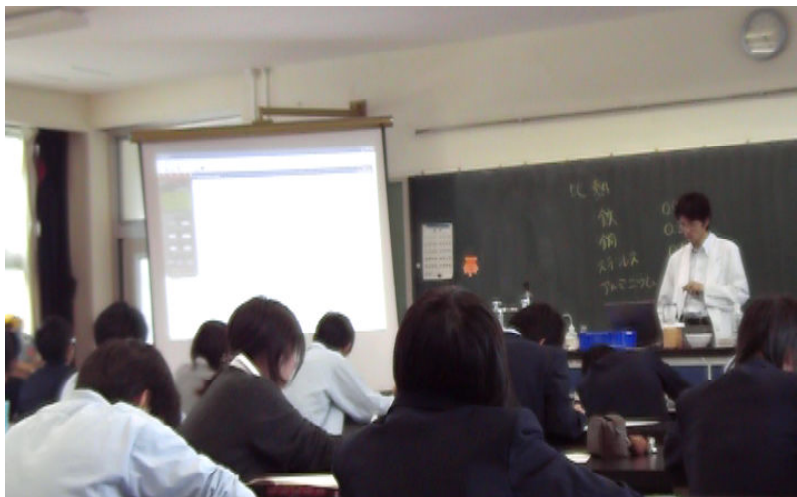


【熱電対を取り付けた物体A、B】



【温度データ取り込み中の様子】

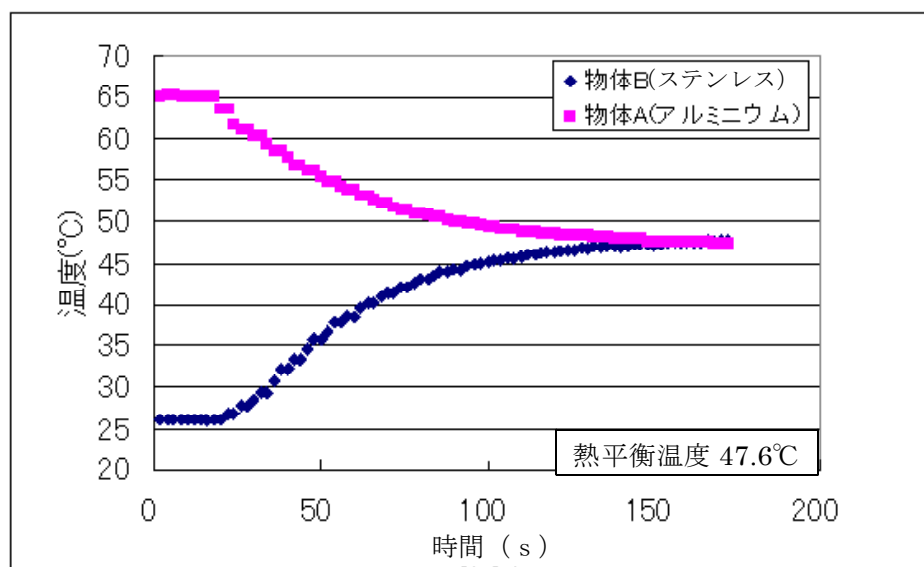
4 実験結果



【授業風景】

物体Aとして、アルミニウム製の円柱を用い、物体Bとして、ステンレス(SUS304)製の円柱を用いたときの結果を示す。

	質量	比熱	接触前の温度
物体A (アルミニウム)	99 g	0.90 J/(g・K)	65.0 °C
物体B (ステンレス)	145 g	—	26.0 °C



熱量の保存則より、物体Bの比熱を求める。物体A、Bの質量をそれぞれ m_A 、 m_B とし、物体A、Bの比熱をそれぞれ、 c_A 、 c_B とすると、熱量保存の法則より、

$$m_A \times c_A \times \Delta T_A = m_B \times c_B \times \Delta T_B$$

$$99 \times 0.90 \times (65 - 47.6) = 145 \times c_B \times (47.6 - 26)$$

$$c_B = 0.50 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$$

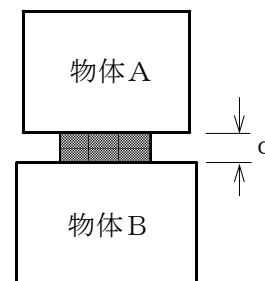
物体Bはステンレス(SUS304)で、文献によると比熱は0.50J/(g・K)であるから、十分精度の高い実験結果が得られたものとする。

5 理論的な温度曲線について

温度の異なる物体A、Bを接触させてから熱平衡に達するまでの、両物体の温度と時間の関係を理論的に、厳密に求めるのは難しい。そこで、次のようなモデルで現象を単純化し、温度曲線の概形を求めた。ある程度、実測値に近い結果が得られたので、学習の進んでいる生徒に対してグラフの概形を説明する際の参考にしていきたい。

〔モデルについて〕

接触面は溶接してあるわけではないので、金属同士が完全に密着しておらず、顕微鏡レベルではある程度隙間があるはずであるから、実質的な接触面積は物体A、Bの断面積より小さいと考えられ、物体A、Bの内部に比べて接触面付近の温度勾配は大きくなるであろう。そこで、物体A、Bの内部の温度勾配を無視する。また、接触面を厚さ d 、面積 S で、熱伝導率 K の板で表し、温度勾配はこの板の部分だけに存在するものとする。



〔計算〕

時刻 t における物体A、Bの温度を T_A 、 T_B ($T_A > T_B$ とすると)、微小時間 Δt 経過後の時刻 $t + \Delta t$ におけるA、Bの温度を $T_A + \Delta T_A$ 、 $T_B + \Delta T_B$ とすると、この間に板を通して移動する熱 ΔQ は両物体の温度差 ($T_A - T_B$) に比例し、

$$\Delta Q = \frac{KS}{d}(T_A - T_B)\Delta t \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。また、物体A、Bの質量を m_A 、 m_B 、比熱を c_A 、 c_B とすると、熱量保存の法則より、

$$\Delta Q = -m_A c_A \Delta T_A = m_B c_B \Delta T_B \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。これらの式より ΔQ を消去すると、

$$\frac{\Delta T_A - \Delta T_B}{\Delta t} = -\frac{m_A c_A + m_B c_B}{m_A m_B c_A c_B} \cdot \frac{KS}{d}(T_A - T_B)$$

という関係が得られる。ここで、 $x = (T_A - T_B)$ とおくと、 $\Delta x = (\Delta T_A - \Delta T_B)$ であり、これらを上式に代入すると、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{m_A c_A + m_B c_B}{m_A m_B c_A c_B} \cdot \frac{KS}{d} \cdot x$$

となり、

$$C = \frac{m_A c_A + m_B c_B}{m_A m_B c_A c_B} \cdot \frac{KS}{d} \quad \dots \textcircled{3}$$

とおいて、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{dx}{dt} = -Cx$$

という変数分離形の微分方程式が得られ、 C は時間 t に依らないから、

$$\int \frac{dx}{x} = -C \int dt$$

と表せる。積分を実行して、

$$\log_e x = -Ct + C' \quad (C' \text{ は定数}) \quad \therefore x = \alpha e^{-Ct} \quad (\text{ただし、}\alpha = e^{C'})$$

両物体を接触させた瞬間を $t=0$ とすると、

$$t=0 \text{ のとき、} T_A = 65.0、T_B = 26.0 \text{ であるから、} x = (65.0 - 26.0) = 39.0$$

これを上式に代入すると、 $\alpha = 39.0$ となる。

また、 $t=50s$ のとき、 $T_A = 52.2^\circ\text{C}$ 、 $T_B = 40.8^\circ\text{C}$ であったため、

$$(52.2 - 40.8) = 39.0 \times e^{-C \times 50} = 39.0 \times (e^C)^{-50} \quad \therefore e^C = \left(\frac{11.4}{39.0} \right)^{-\frac{1}{50}} = 1.0249$$

両辺の対数をとって、

$$C = \log_e 1.0249 = 0.0246$$

これを、③式に代入し、さらに、

$$m_A = 99 \text{ g}, m_B = 145 \text{ g}, c_A = 0.90 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}, c_B = 0.50 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$$

を代入すると、

$$0.0246 = \frac{99 \times 0.90 + 145 \times 0.50}{99 \times 145 \times 0.90 \times 0.50} \cdot \frac{KS}{d} \quad \therefore \frac{KS}{d} = 0.9838$$

以上より、

$$T_A = -\frac{0.9838}{99 \times 0.90} \times 39 \times \int e^{-0.0246 \times t} dt = 17.5 \times e^{-0.0246 \times t} + C''$$

ここで、 $t=0$ のとき、 $T_A = 65.0 \text{ }^\circ\text{C}$ であるから、上式に代入して、

$$65.0 = 17.5 \times 1 + C'' \quad \therefore C'' = 47.5$$

よって、

$$T_A = 17.5 \times e^{-0.0246 \times t} + 47.5 \quad \dots \textcircled{4}$$

T_B についても同様に、

$$T_B = 0.5292 \times \int e^{-0.0246 \times t} dt = -21.5 \times e^{-0.0246 \times t} + C'''$$

$t=0$ のとき、 $T_B = 26.0 \text{ }^\circ\text{C}$ であるから、上式に代入して、

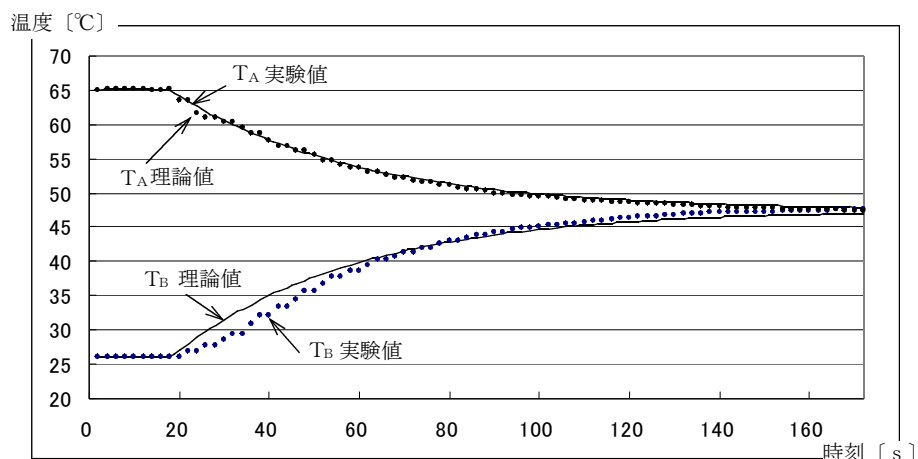
$$26.0 = -21.5 \times 1 + C''' \quad \therefore C''' = 47.5$$

よって、

$$T_B = -21.5 \times e^{-0.0246 \times t} + 47.5 \quad \dots \textcircled{5}$$

以上のようにして得られた④、⑤式を用いて、時刻 t と物体 A、B の温度の関係を求めた。計算結果と実験値と併せて、以下の表とグラフに示す。ただし、物体 A、B が接触した時刻は、実験値から 18 s と判断し、この時刻を $t=0$ として理論値を計算した。

時刻 [s]	18	38	58	78	98	118	138	158
T_A 理論値 [$^\circ\text{C}$]	65.0	58.2	54.0	51.5	49.9	49.0	48.4	48.1
T_A 実験値 [$^\circ\text{C}$]	65.1	58.6	53.7	51.1	49.6	48.7	48.0	47.7
T_B 理論値 [$^\circ\text{C}$]	26.0	34.4	39.5	42.6	44.5	45.7	46.4	46.8
T_B 実験値 [$^\circ\text{C}$]	26.0	32.1	38.6	42.5	44.9	46.4	47.1	47.4



事例Ⅱ 観察「空気中、水中の微粒子が行うブラウン運動」

1 ねらい

空気中の煙の粒子や水中のラテックス球がブラウン運動を行っている様子を観察し、物質を構成する分子や原子が熱運動していることを実感する。

2 準備

顕微鏡、線香、注射器、He-Neレーザー、DV用カセットケースを用いて自作した観察用セル、ミリカン実験用 $1\mu\text{m}$ ラテックス球、スライドガラス、カバーガラス、スポット

3 実験の手順

(1) 線香の煙に含まれる粒子の観察

- ①線香の煙を注射器内に充填する。
- ②DVカセットケースを用いて作成した観察用セルに、注射器内の煙を注入する。
- ③煙が封入された観察用セルを顕微鏡のステージの上に置く。
- ④観察用セルの側面からレーザー光を当てる。
- ⑤顕微鏡を使って、煙粒子のブラウン運動を観察する。

(2) 水中のラテックス球の観察

- ①ラテックス球の水溶液を、スポットを用いてスライドガラス上に適量置き、カバーガラスをのせる。
- ②スライドガラスを顕微鏡ステージに置き、ブラウン運動を観察する。

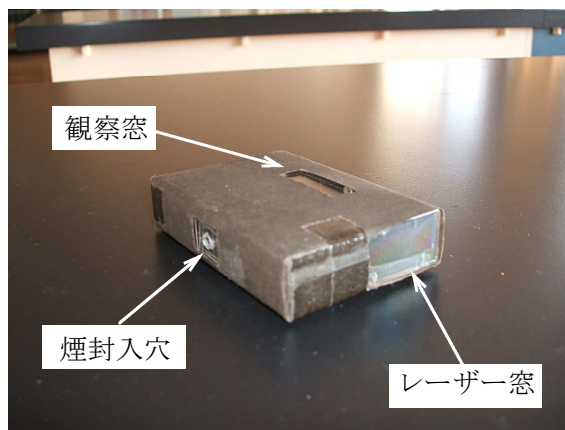
4 煙のブラウン運動観察用セルの作成法

(1) 材料

DV用カセットケース、黒い紙、ドリル、粘着テープ

(2) 作り方

- ①カセットケースの側面に煙封入用の穴をドリルで開ける。
- ②カセットケースの隙間を、粘着テープ等で塞ぐ。
- ③カセットケース全体を黒い紙で覆う。
- ④レーザー光を入射するための窓と、顕微鏡で観察するための窓を開ける。



5 実験プリント

ブラウン運動の観察

____年____組 名前_____

○目 的

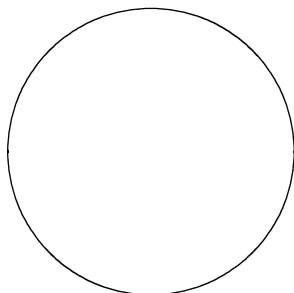
○ブラウン運動が起こる理由について

- ・物質を構成している分子や原子は、固体、液体、気体とも、温度に応じた激しきで不規則な運動を行っており、この運動を（ ）とよぶ。
- ・ブラウン運動は、液体や気体中に顕微鏡で観察できる程度の微粒子があるとき、微粒子が分子や原子から絶えず（ ）を受けることによって起こる現象で、1827年に植物学者のロバート・ブラウンによって発見された。
- ・ブラウン運動の詳しい理論は、1905年に（ ）によって発表され、その正しさは1908年にペランによって実験的に検証された。この実験によって原子の存在は疑いのないものとなり、ペランは1926年のノーベル賞を受賞した。

○実験の準備 顕微鏡、スライドガラス、カバーガラス、 $1\mu\text{m}$ のラテックス球水溶液

○観察1 煙の粒子の観察（プロジェクターで投影された映像を観察する）

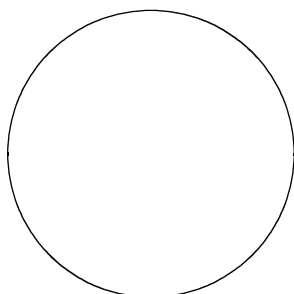
スケッチ



どのような運動をしていたか。文章で表現してみよう。

○観察2 ラテックス球（直径 $1\mu\text{m}$ ）の顕微鏡観察

スケッチ



どのような運動をしていたか。文章で表現してみよう。

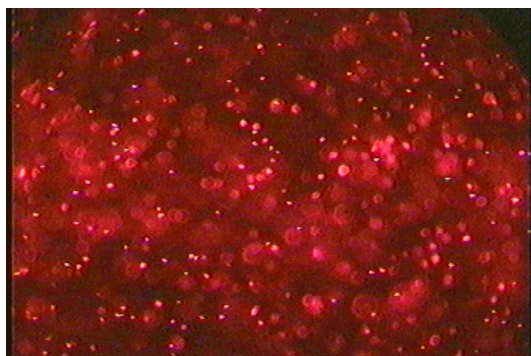
○感 想

6 結 果

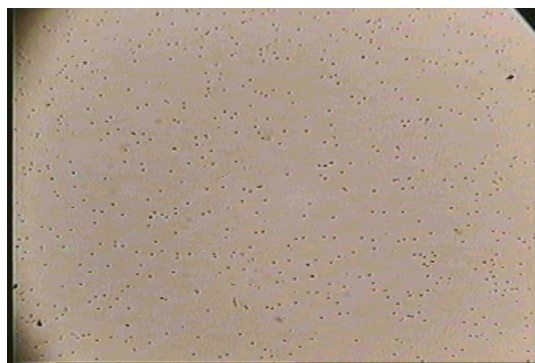
「線香の煙に含まれる粒子の観察」に関しては、生徒実験で行うのは困難だったため、演示実験とし、顕微鏡用CCDカメラで撮影した画像をプロジェクターでスクリーンに映し、生徒に観察させた。「水中のラテックス球の観察」に関してはグループ実験とし、生徒に顕微鏡で観察させた。



【授 業 風 景】



【煙粒子のブラウン運動】



【ラテックス球のブラウン運動】

<実験プリントに記入された内容例>

○「どのような運動をしていたか」の問いに対し

- ・ 不規則に揺れ動く
- ・ ジグザクに動いていた
- ・ 右下に動いていった
- ・ 粒がゆれながら動いていた
- ・ こきざみに動いていた
- ・ 細かく振動している感じ
- ・ ブルブル震えていた

事例Ⅲ 実験「ペランの方法によるアボガドロ数の測定」

1 ねらい

アインシュタインによるブラウン運動の理論に基づき、大きさの分かっているラテックス球のブラウン運動について、時間と変位の関係を調べることにより、アボガドロ数を測定する。

2 準備

顕微鏡、顕微鏡用CCDカメラ、ミリカン実験用 $1\mu\text{m}$ ラテックス球、VHSビデオデッキ、スライドガラス（マイクロメーター付）、カバーガラス、PC、ビデオキャプチャー、測長ソフト「挟むものさし Ver1.15」、注射器、スポイト

3 原理

水中にあって、ブラウン運動をする質量 m の粒子の運動を考える。この粒子の運動は3次元であるが、ここでは簡単のために x 方向の運動のみを考える。粒子は、多数の水分子の衝突による不規則な力 F と、速さに比例する抵抗力を水から受けているものとし、抵抗力の比例定数を μ とすると、この粒子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - \mu \frac{dx}{dt}$$

となり、この式の両辺に x をかけると、

$$mx \frac{d^2 x}{dt^2} = Fx - \mu x \frac{dx}{dt} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、

$$\frac{d[x(dx/dt)]}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x \frac{d^2 x}{dt^2}$$

であるから、式①の左辺は、

$$mx \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

となり、右辺の第2項は、

$$\frac{d(x^2)}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \quad \therefore -\mu x \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{2} \frac{d(x^2)}{dt}$$

したがって、式①は、

$$m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Fx - \frac{\mu}{2} \frac{d(x^2)}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

次に、ブラウン運動をする多くの粒子について、この式全体の平均を考える。

まず、左辺の第1項に着目する。粒子の位置と速度の積は時間とともに変化しないと考えられるから、この項を多数の粒子について平均したものは0である。というのは、粒子は絶えず不規則な運動をしており、ある位置に1つの粒子があるとき、それ以前の粒子の位置や速度に関する情報は、完全に失われているからである。

$v = \frac{dx}{dt}$ とし、 v^2 の平均を $\overline{v^2}$ とすると、左辺の第2項の平均値は、 $-m\overline{v^2}$ と表され、気体分子運動論より、絶対温度 T の物質を構成する分子や原子の、1方向当たりの平均運動エネルギーは、アボガドロ数 N_A 、気体定数 R を用いて、

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{RT}{2N_A} \quad (\text{ただし、} v \text{ は1次元})$$

と表され、このような平均運動エネルギーをもつ多数の水分子からの衝突を受けてブラウン運動をしている粒子についても、この関係が成り立っているはずだから、

$$-m \overline{v^2} = -\frac{RT}{N_A}$$

が成り立つと考えられる。

次に、右辺の第1項の平均値を考える。 F は不規則な力であり、 F の大きさや向きは、粒子の位置 x と無関係であるから、それらの積 Fx を多数の粒子に対して平均したものは0となる。

以上より、②式を多数の粒子について平均することにより、

$$m \overline{v^2} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{d(\overline{x^2})}{dt} \quad \therefore \overline{x^2} = \int \frac{2}{\mu} \cdot \frac{RT}{N_A} dt$$

という式が得られる。ここで、時刻 $t=0$ のとき $x=0$ とすると、

$$\overline{x^2} = \frac{2RT}{\mu N_A} \cdot t$$

と表され、変位の2乗が時間 t に比例することが分かる。

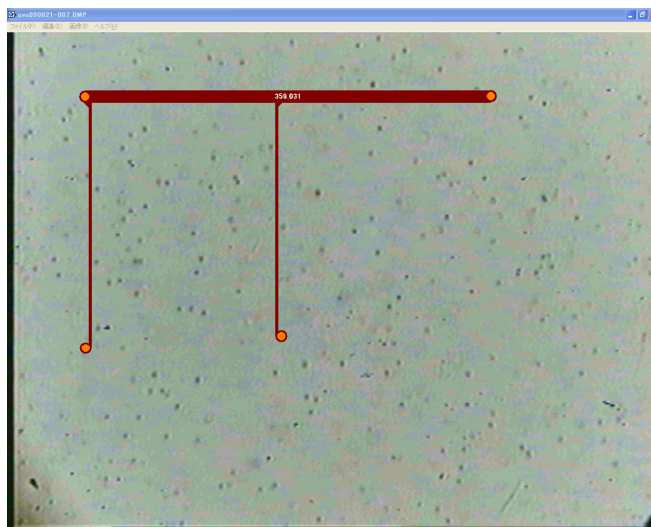
また、粒子が水から受ける抵抗力の係数 μ は、粒子が半径 a の球のとき、 $\mu=6\pi\eta a$ （ただし、 η は水の粘性率）で与えられることが知られているから、これを上式に代入すると、

$$\overline{x^2} = \frac{2RT}{6\pi\eta a N_A} \cdot t = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} \cdot t \quad \dots \textcircled{3}$$

という関係式が得られ、一定時間 t における粒子の変位の2乗 x^2 を多数測定し、その平均値 $\overline{x^2}$ を用いることによって、アボガドロ数を求めることができる。

4 実験の手順

- (1) スポイトを使ってラテックス球溶液を、スライドガラス上に適量置き、カバーガラスをのせる。
- (2) スライドガラスを顕微鏡ステージに置く。
- (3) 顕微鏡に取り付けたCCDカメラからの画像をディスプレイで見ながら、測定に適した位置にあるラテックス球にピントを合わせる。
- (4) ラテックス球の運動の様子を、ビデオで数分間録画する。
- (5) ビデオキャプチャーを用いて、(4)で録画された画像データを、PCに取り込む。
- (6) PCに取り込まれた画像をコマ送りしながら、測長ソフトを用いることにより、着目したラテックス球について、画面上の x 座標を1 s 毎に、2分間測定する。
- (7) スライドガラスに刻まれたゲージを用いて(6)で得られたデータの校正を行う。

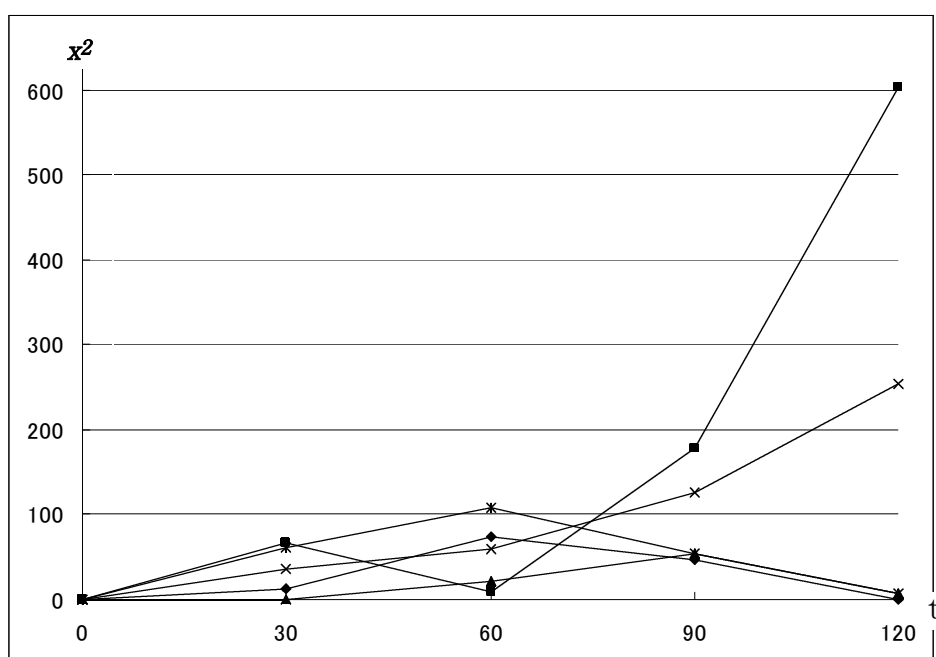


5 実験結果の例

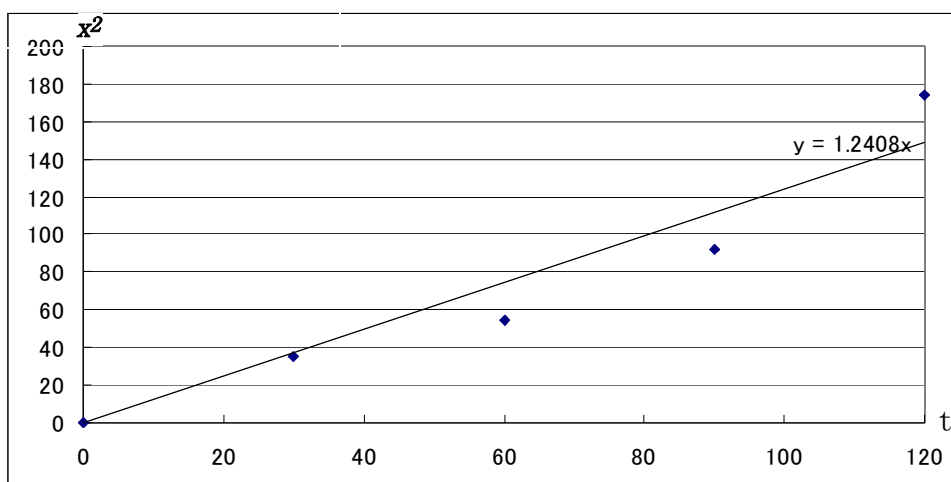
PCに取り込まれた画像をコマ送りしながら再生し、5つのラテックス球（粒子1～粒子5）について、その水平方向の変位 x を30 s 毎に測定した。次の表は、時刻 t と x 、 x^2 の関係をまとめたものである。

t[s]	粒子1		粒子2		粒子3		粒子4		粒子5	
	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-3.45	11.9	-8.19	67.1	-0.43	0.19	-6.04	36.4	7.77	60.37
60	-8.62	74.3	-3.01	9.06	4.74	22.5	-7.75	60.1	10.4	107.2
90	-6.89	47.5	-13.4	178.5	7.33	53.7	-11.2	125.5	7.34	53.9
120	-0.85	0.71	-24.5	602.5	-2.59	6.73	-15.9	254.3	2.59	6.73

また、時刻 t と x^2 の関係をグラフに表すと、以下のようになり、粒子によって運動の様子は大きく異なっていることが分かる。



次に、5つの粒子について x^2 の平均 $\overline{x^2}$ と時刻 t の関係をグラフに示す。



このグラフを見ると、アインシュタインの理論通り、 $\overline{x^2}$ が時刻 t に比例する傾向があるため、個々の粒子はランダムな運動をしていることが窺われる。また、最小二乗法による直線フィッティングを行うと、その傾きは $1.24 \text{ } (\mu\text{m})^2/\text{s}$ であった。次に、この値を用いてアボガドロ数を求める過程を示す。

アボガドロ数 N_A と $\overline{x^2}$ の関係は次の式（3 原理 ③）で表され、

$$\overline{x^2} = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} \cdot t$$

右辺の t の係数を $1.24 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。実験時の気温 18°C のときの水の粘性係数は、理科年表を参照して $\eta = 1.05 \times 10^{-3}$ とし、 $R = 8.31 \text{ J}\cdot\text{s}$ 、 $a = 0.50 \times 10^{-6} \text{ m}$ を代入すると、

$$1.24 \times 10^{-12} = \frac{8.31 \times 291}{3 \times 3.14 \times 1.05 \times 10^{-3} \times 0.50 \times 10^{-6} \times N_A}$$

となり、アボガドロ数として、

$$N_A = 3.94 \times 10^{23}$$

が得られた。データの数が少ないため、誤差が大きいもののオーダーは合っており、気体分子運動論の正しさを示す結果と考える。

さらに25個のラテックス球（粒子6～粒子30）について、その水平方向の変位 x を30 s 毎に測定した。次の表は、時刻 t と x 、 x^2 の関係をまとめたものである。

t[s]	粒子6		粒子7		粒子8		粒子9		粒子10	
	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	6.04	36.5	-3.89	15.1	3.44	11.9	-1.29	1.67	10.8	116
60	0.00	0.00	-6.91	47.7	-3.03	9.16	-0.02	0.00	4.74	22.5
90	-6.04	36.5	-9.49	90.1	-1.30	1.70	2.15	4.62	8.19	67.1
120	-6.47	41.9	-15.5	241	1.28	1.65	0.00	0.00	-1.7	2.99

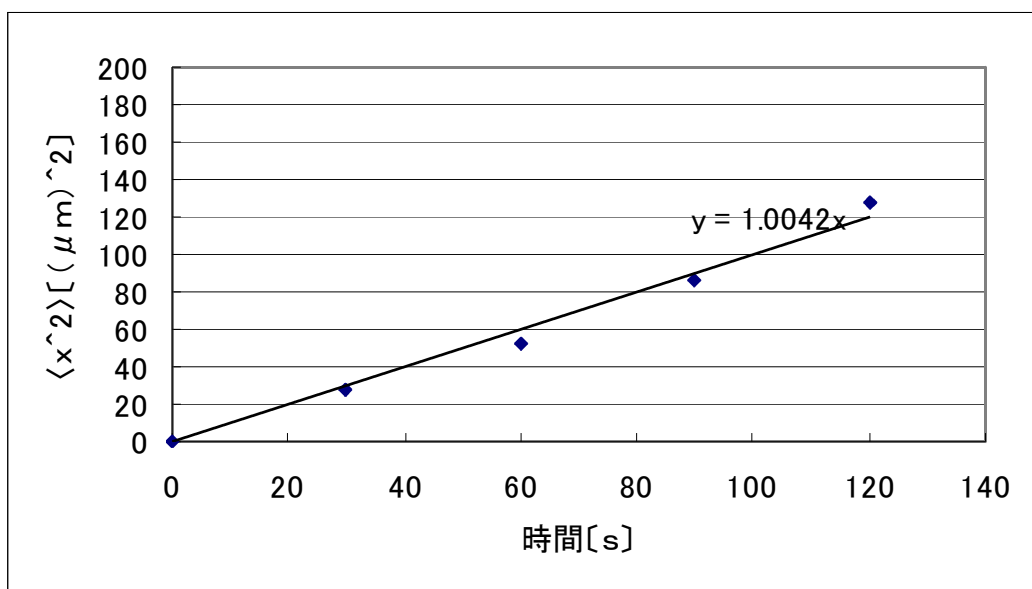
t[s]	粒子11		粒子12		粒子13		粒子14		粒子15	
	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	10.8	116	7.32	53.6	0.86	0.75	-3.45	11.9	-0.9	0.748
60	6.46	41.7	7.32	53.6	2.60	6.76	3.02	9.13	-3.0	9.19
90	11.2	125	19.4	376	-5.17	26.7	7.34	53.8	-3.9	15.2
120	13.4	178	22.0	483	-16.0	255	0.441	0.194	-13	157

t[s]	粒子16		粒子17		粒子18		粒子19		粒子20	
	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-5.18	26.9	0.419	0.175	0.41	0.17	2.17	4.71	-2.2	4.65
60	-7.78	60.5	6.02	36.2	0.41	0.17	0.45	0.21	-4.3	18.7
90	-6.92	47.9	17.6	311	5.57	31.0	8.21	67.4	6.01	36.1
120	-0.89	0.78	11.6	135	4.28	18.3	9.93	98.6	11.6	135

t[s]	粒子21		粒子22		粒子23		粒子24		粒子25	
	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2	$x[\mu\text{m}]$	x^2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	6.46	41.8	2.15	4.63	0.01	0.00	-3.88	15.1	1.73	2.98
60	13.8	190	11.2	125	-3.87	15.0	0.86	0.74	3.88	15.1
90	18.5	344	13.8	190	-0.42	0.18	-2.58	6.68	-1.7	3.00
120	13.4	179	9.90	98.0	-15.5	241	-3.88	15.1	-15	216

t[s]	粒子26		粒子27		粒子28		粒子29		粒子30	
	x[μm]	x ²	x[μm]	x ²	x[μm]	x ²	x[μm]	x ²	x[μm]	x ²
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-1.73	3.00	-0.86	0.74	-0.87	0.75	7.32	53.7	-11	116
60	-3.45	11.9	9.92	98.5	-12.9	168	14.2	202	-13	168
90	-3.88	15.1	9.06	82.0	-9.06	82.1	9.48	89.9	-4.8	22.8
120	-5.19	26.9	16.8	283	0.43	0.18	11.6	135	-5.7	31.9

次に、30個の粒子（粒子1～粒子30）について、 x^2 の平均 $\overline{x^2}$ と時刻 t の関係をグラフに示す。



5個の粒子（粒子1～粒子5）のグラフと比較すると、 $\overline{x^2}$ が時刻 t に比例する傾向がさらに明確になっており、最小二乗法による直線フィッティングを行うと、30 s、60 s、90 s、120 s のデータはいずれも原点を通る、傾き $1.00 (\mu\text{m})^2/\text{s}$ の直線に接近している。この結果を用いてアボガドロ数を求めると、

$$N_A = 4.89 \times 10^{23}$$

が得られた。真の値と比較すると、なお20%弱のずれがあるが、4つのデータが同一直線によくフィットしていることから、その原因は各粒子の位置の読み取り誤差よりも、温度測定 of 精度不足に伴う水の粘性率の誤差、ラテックス球半径のカタログデータに含まれる誤差の影響が大きいと考えられる。

さらに信頼性の高い結果を得るためには、ペランがアインシュタインのブラウン運動理論を検証する際に行ったように、コロイド粒子の種類や半径を変えたり、水以外の液体を用いたりしても、得られるアボガドロ数の値に変化がないことを確かめることが考えられる。

顕微鏡用のCCDカメラ以外、高価な材料は必要がなく、理論式を導く過程も、学習の進んでいる生徒であれば十分理解することが可能であるので、部活動等で取り組む探求活動の素材として適していると考えられる。

6 参考文献

- ・「だれが原子をみたか」江沢洋
- ・「ブラウン運動の定量解析」日本物理学会
- ・「ブラウン運動と原子の実在」慶応大学日吉物理学教室
- ・ファイマン物理学 第2巻

事例Ⅳ ものづくり「スターリングエンジンの仕組みを利用したおもちゃの製作」

1 準備

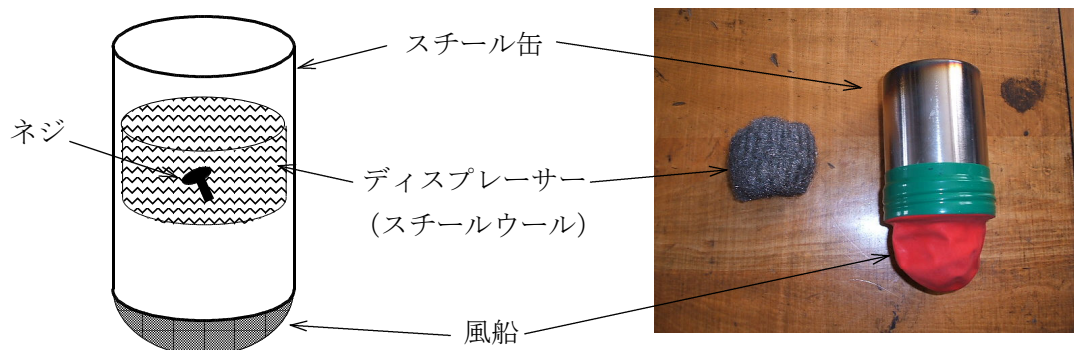
スチール缶(コショウ用の缶を利用)、風船、ビニールテープ、ステンレス板、スチールウール、プラモデル用タイヤまたはハンガー、トーチバーナー

2 ねらい

スチール製の空き缶を用いてスターリングエンジンを製作し、動作させることにより、熱機関に関する理解を深める。

3 製作の手順

- (1) スチール缶の中に入れるディスプレイサーをスチールウールで作る。スチールウールのサイズはスチール缶の内径より少し小さめにし、スチール缶内部でスムーズに運動できるようにする。また、スチールウールだけでは慣性が小さく、スチール缶に対する相対運動が起りにくいので、スチールウールの中に小さなネジ等を入れる。
- (2) スチール缶の中にディスプレイサーを入れ、缶の蓋(プラスチック製)をする。缶の蓋には、空気が出入りできるような穴を開けておく。
- (3) スチール缶の蓋に風船をかぶせ、空気が漏れないようにビニールテープをしっかりと巻く。風船の口はそのままでは小さく缶にかぶせることができないので、はさみで口を広げておく。
- (4) 風船を取り付けたスチール缶を、写真のようにハンガーまたはタイヤの付いたフレームに固定する。



【タイヤを使用したタイプ】



【ハンガーを使用したタイプ】

4 動作原理

スチール缶の上部をトーチバーナー等で十分加熱してから、スチール缶を持ち上げ、手をはなすと、スチール缶は床と繰り返し衝突するが、ディスプレイサーであるスチールウールがスチール缶に対して相対運動を行うため、スチール缶内部の圧力が変動し、風船部の体積が変動する。この運動が持続するのは、スチール缶が床に衝突する際、その直後に風船部の体積が急激に増加し、スチール缶に対して正の仕事をするためである。なお、スチール缶に対してディスプレイサーが相対運動を行う理由として、以下の①、②が考えられる。

①スチール缶が床と衝突すると、スチール缶とディスプレイサーは共に上向き速度を得るが、スチール缶よりスチールウールの方がよく反発するため、ディスプレイサーはスチール缶に対して上に移動する。

②右の図のように、ハンガーやフレームを長さ L 、質量 m の様な棒で表し、スチール缶を質量 M の小物体で表したモデルとし、スチール缶に対するディスプレイサーの相対加速度について考える。床面と棒のなす角が θ の瞬間の、棒の回転運動の運動方程式は、全体の慣性モーメントを I とすると、

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = mg \cdot \frac{L}{2} \cos\theta + MgL \cos\theta$$

となり、 $I = \frac{1}{3}mL^2 + ML^2$ を代入して角

加速度を求めると、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\frac{1}{2}m + M}{\left(\frac{1}{3}m + M\right)L} g \cos\theta$$

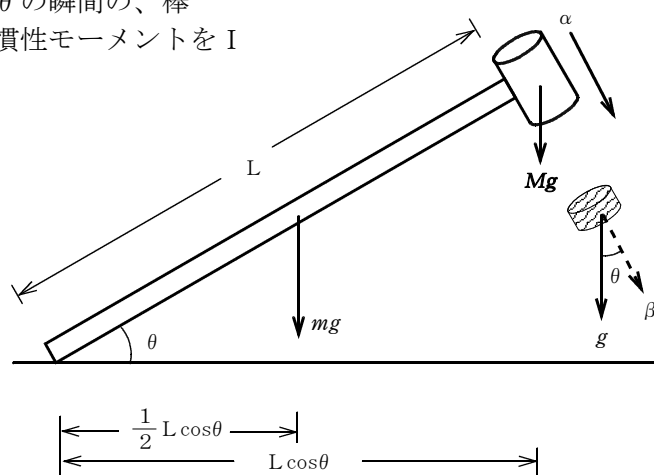
で、缶の加速度の円周方向の成分を

α とすると、

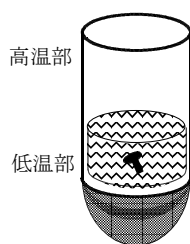
$$\alpha = L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3m + 6M}{2m + 6M} \cdot g \cos\theta$$

である。一方、ディスプレイサーの加速度の円周方向の成分 β は、摩擦や空気抵抗を無視すると、 $\alpha > \beta$ であるから、 $\beta = g \cos\theta$ であり、缶に対するディスプレイサーの加速度の円周方向の成分は、反時計回りの向きであることが分かる。

次に、このエンジンのサイクルを示す。



(I) 膨張



○スチール缶が着地すると、ディスプレイサーも下部に移動する。



○空気の大部分が高温部に移動し、スチール缶内部の圧力が增加するため風船がふくらみ、その反動でスチール缶がジャンプする。



(II) 収縮



○スチール缶が上昇するとき、ディスプレイサーはスチール缶の上部へ移動する。



○空気の大部分が低温部に移動し、スチール缶内部の圧力が減少するため、風船がしぼむ。

その後は(I)、(II)を繰り返す。

5 市販のスターリングエンジンキットについて

(1) 概要

「大人の科学vol.10」(学研)の付録キットである「低温度差スターリングエンジン」を組み立て、演示実験で用いたところ、熱機関の原理を説明する際に大変効果的であった。

このスターリングエンジンは、容器の上部と下部に約20℃以上の温度差を与えることで動作し、寒い日であれば手で下部を暖めるだけで動作する。温かい教室においても、湯を入れたマグカップの上に置いて下部を加熱したり、上部を氷で冷却したりすることによって、長時間、勢いよく動作させることができる。



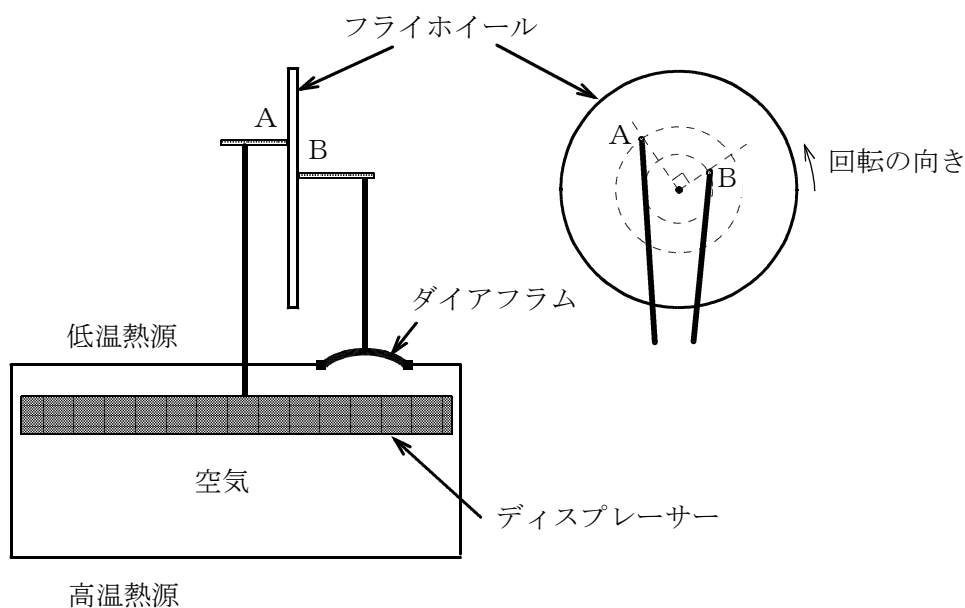
【マグカップの湯で下部を加熱】



【上部を氷で冷却】

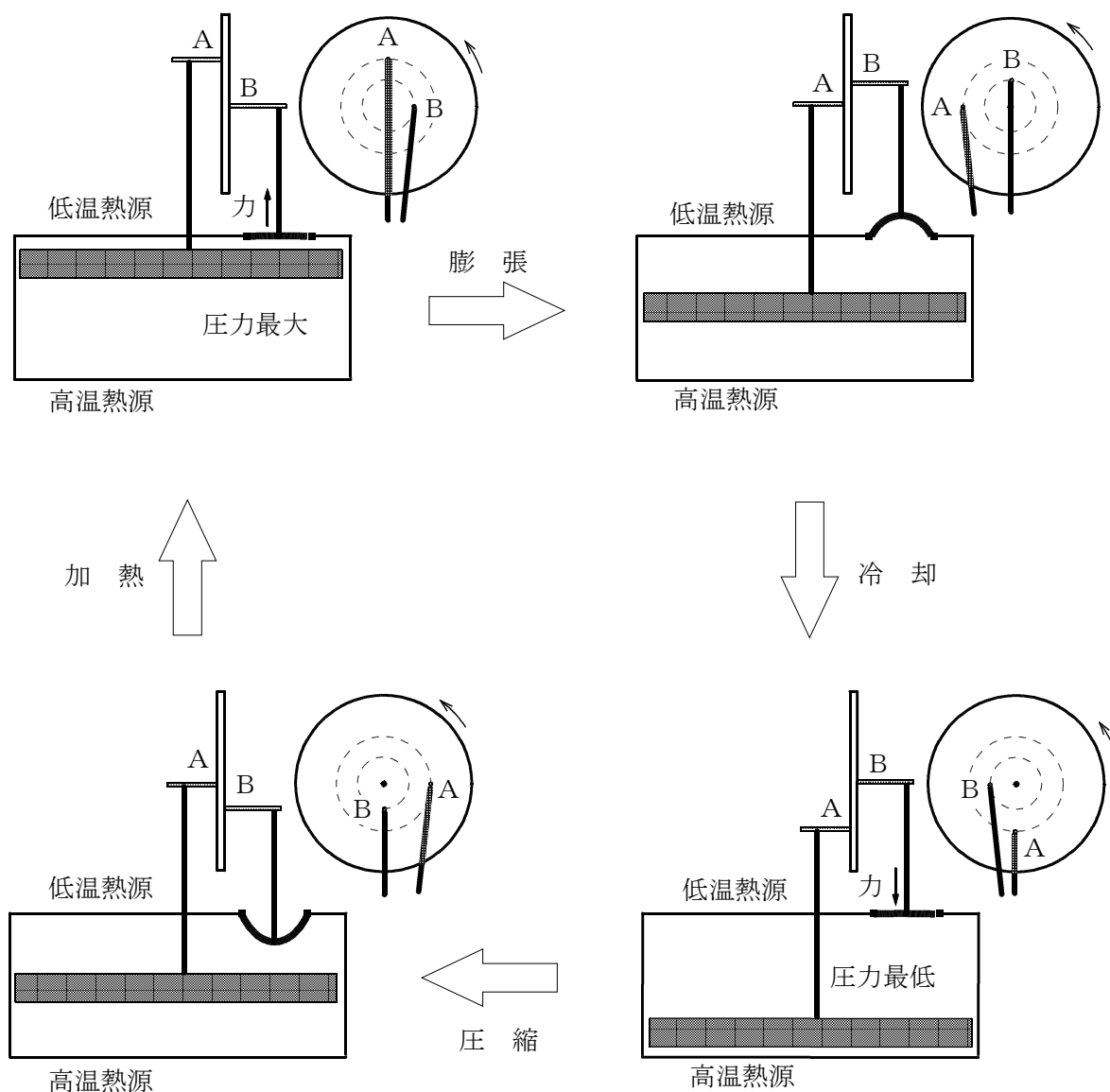
(2) 構造

このスターリングエンジンは、図のように、空気を閉じ込める容器、内部の圧力変化に応じて上下し、フライホイールにトルク（力のモーメント）を与えるダイアフラム（パワーピストン）、フライホイールの回転に連動して、空気を高温部と低温部の間で移動させるディスプレイサー（置換器）から成っている。ダイアフラムとディスプレイサーは位相差90°で上下するようにフライホイールに取り付けられている。



(3) 動作原理

図のように、フライホイールの回転に伴ってディスプレイサーが上下に動き、容器内の空気が高温部と低温部の間で移動を繰り返すことによって、圧力の変動が生まれる。ディスプレイサーと90°の位相差で上下運動するダイヤフラム（パワーピストン）は、この圧力変動を受け、フライホイールに常に同じ向きのトルクを与えるため、フライホイールの回転が持続するようになっている。



6 参考文献・URL等

- ・学研 大人の科学 vol.10
- ・<http://members.jcom.home.ne.jp/kobysh/experiment/Cooler/cooler1.html>
- ・<http://members.jcom.home.ne.jp/kobysh/experiment/P-can/pcan.html>
- ・テレビ東京「ロボつく 空想科学バラエティ」 2009年6月7日放送

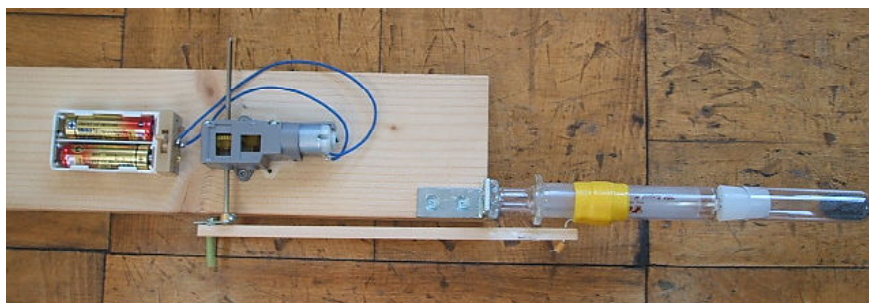
事例Ⅴ ものづくり「スターリングクーラーの製作」

1 ねらい

温度差を与えることで仕事をするスターリングエンジンは、逆に外部から仕事を加えることにより、低温部から高温部に熱を移動させることができる。このしくみを利用した冷却装置を製作することにより、ヒートポンプや可逆機関についての理解を深める。

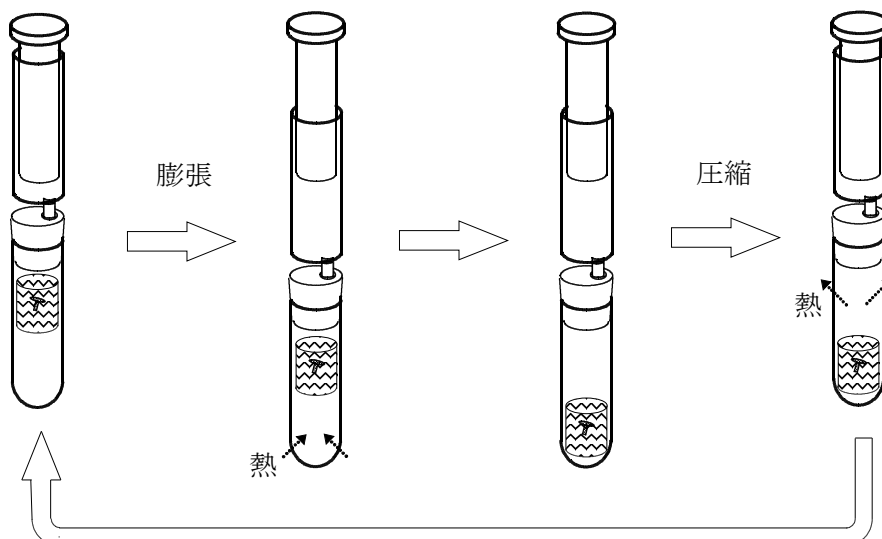
2 動作原理

今回製作した装置は、茨城県立中央高等学校教諭の小林義行先生が、インターネットのサイト (<http://members.jcom.home.ne.jp/kobysh/experiment/Cooler/cooler1.html>) で紹介されているものである。



上の写真は床の上に水平に置かれたスターリングクーラーで、動作させる際には、試験管部分が下、電池が上になるように、木の板を鉛直に固定する。

モーターが回転すると、3速クランクギヤーにより、注射器のシリンダーと試験管が一体となって上下に振動する。このとき、注射器のピストンは動かないため、内部に封じ込められた空気が膨張したり圧縮されたりするため、外部と熱のやりとりをする。下の図は、このときの試験管、注射器、ディスプレイサーの運動の様子を表したものであり、内部の空気が膨張するときにはディスプレイサーが試験管の上部にあるため、試験管の下部に多くの空気があり、試験管の下部の器壁を通して外部からの熱が吸収される。同様に、内部の空気が圧縮されるときにはディスプレイサーは試験管の下部にあり、試験管の上部の空気から器壁を通して、外部への熱の放出が行われる。したがって、この装置はモーターによる仕事によって、試験管の下部から熱を吸収し、試験管の上部に熱を放出するヒートポンプとしてはたらくが、これは高温熱源から熱を吸収し、低温熱源に熱を放出することで仕事をするスターリングエンジンの逆運転に相当する。



3 準備

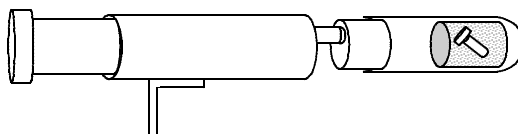
試験管、ゴム栓、注射器(20cc)、スチールウール、ねじ、木材、熱伝対温度計、ステンレス線(φ16mm)、針金、3速クランクギヤーボックス(田宮模型)、電池ボックス、L字金具

4 製作の手順

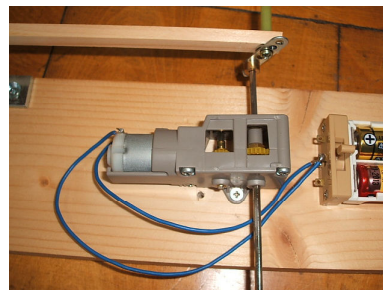
- (1) 試験管をダイヤモンドカッター等で切り取り、6cm程度にする。試験管の中にはスチールウールで作ったディスプレイサーを入れる。スチールウールだけでは軽すぎるので中にねじ等を入れる。ゴム栓に注射器の先端が入るくらいの穴を開けて、試験管に栓をする。



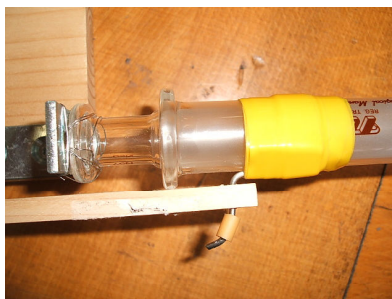
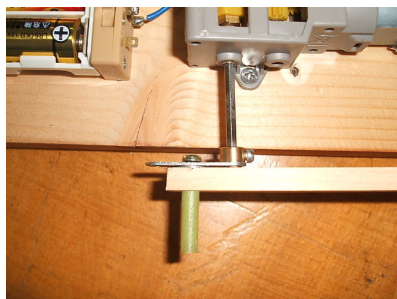
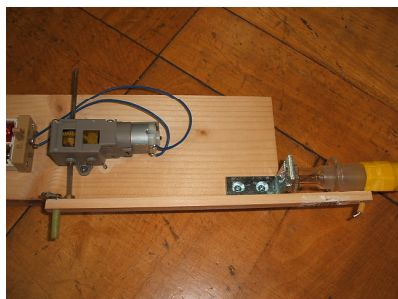
- (2) 図のように、ステンレス棒をL字に曲げて注射器に取り付け、注射器の先端を(1)のゴム栓の穴に差し込む。



- (3) 写真のように、L字金具と針金を用いて注射器と木の板を接続する。板には、模型工作用の3速クランクギヤーボックスを取り付ける。(ギヤ比は16.6:1)



- (5) 写真のように、木の棒を使用して3速ギヤーボックスの回転軸と注射器を接続する。



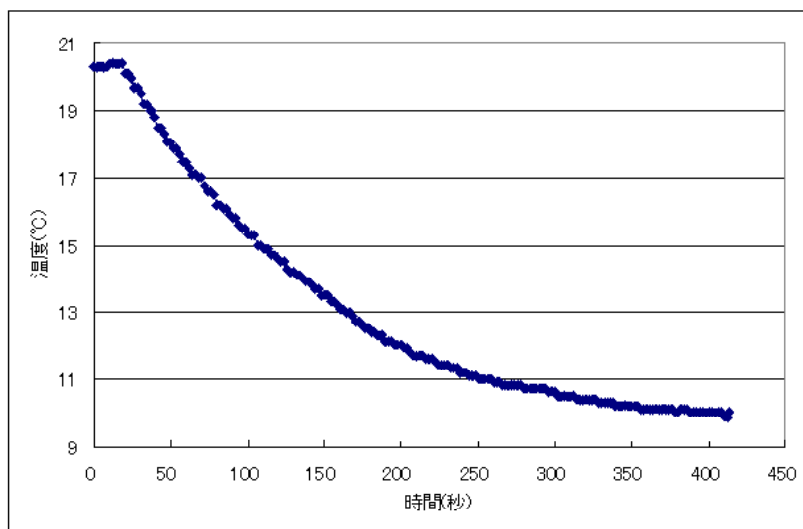
- (6) 温度測定用の熱電対を試験管の先端に取り付ける。その上を発泡スチロール等で覆い、断熱する。



- (7) 装置を動作させ、熱電対による温度データを取り込む。

5 結果

右のグラフは、試験管の下部に取り付けた熱電対で測定した温度と、時刻の関係を表したものである。時刻18 sに動作を開始したところ、5分間で約10℃の温度低下が観測できた。



6 参考文献・URL等

- ・学研「大人の科学vol.10」
- ・<http://members.jcom.home.ne.jp/kobysh/experiment/Cooler/cooler1.html>
- ・<http://members.jcom.home.ne.jp/kobysh/experiment/P-can/pcan.html>
- ・テレビ東京「ロボつく 空想科学バラエティ」(2009年6月7日放送)

事例Ⅵ ものづくり「ジクロロメタンを用いたヒートポンプモデルの製作」

1 実験のねらい

真空ポンプとジクロロメタンを用いたヒートポンプのモデルを製作し、動作させることにより、熱力学第1法則に関する理解を深めるとともに、冷蔵庫やエアコンの動作原理を理解する。

2 装置について

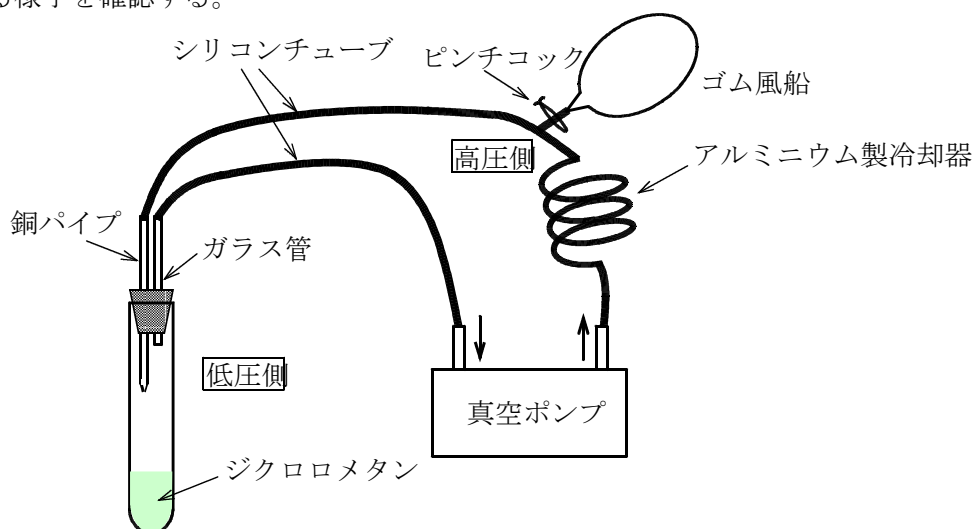
今回製作した装置は、茨城県立中央高等学校教諭の小林義行先生が、インターネットのサイト <http://members.jcom.home.ne.jp/kobysh/experiment/Cooler/DCM.html> で紹介されているものであり、小林先生にご指導を受けながら製作したものである。

3 準備

ダイヤフラム真空ポンプ(アルバック製DA-15D)、ジクロロメタン(アクリル用接着剤)、4点式デジタル温度計FUSO-304(株式会社FUSO)、試験管(破裂防止のため、傷がないことを確認しておく)、シリコンチューブ、シリコン栓、ゴム風船、チューブコネクター、アルミパイプ

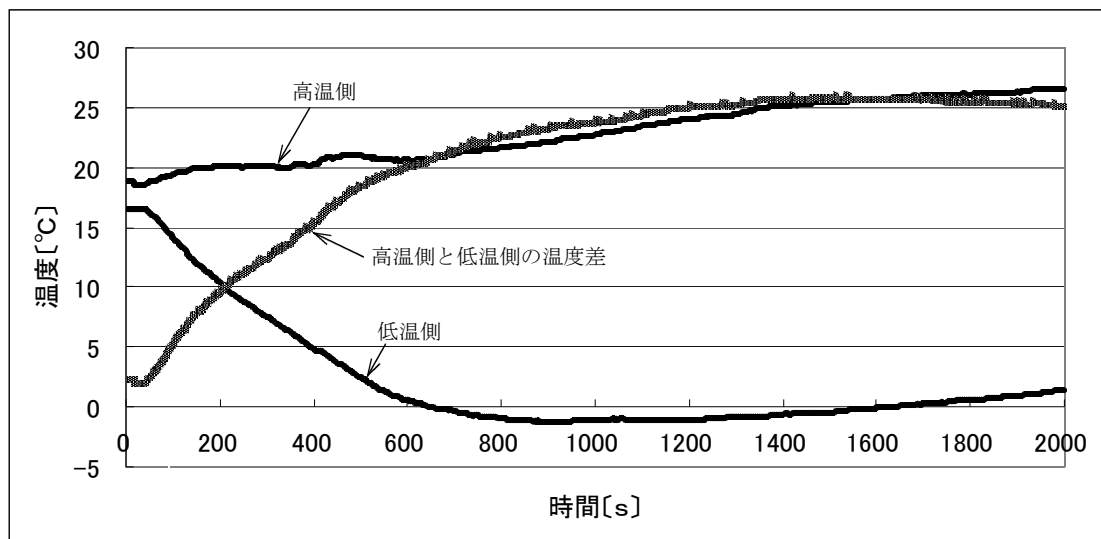
4 実験の手順

- (1) 図のように、ジクロロメタン20~30mlの入った試験管、銅製パイプ、アルミニウム製冷却器、ゴム風船、真空ポンプ、ガラス管をシリコンチューブで接続する。銅パイプの先端の穴はペンチなどでつぶして細くし、銅パイプの両端に適当な圧力差が生じるようにする。
- (2) 低温になる試験管の先端と、高温になる真空ポンプの排気出口付近に熱伝対温度計を取り付ける。なお、熱伝対周辺は発泡スチロールなどで覆い、断熱しておく。
- (3) 真空ポンプの電源を入れると、圧力調整のためのゴム風船が膨らみだす。風船が膨らみきったところで、液化したジクロロメタンが風船側に流れないように、ピンチコックで密閉する。
- (4) 熱電対を用いて、低温側と高温側の温度変化をモニタする。
- (5) 試験管内部を観察し、ジクロロメタンが沸騰している様子や、銅パイプの出口付近で液化している様子を確認する。

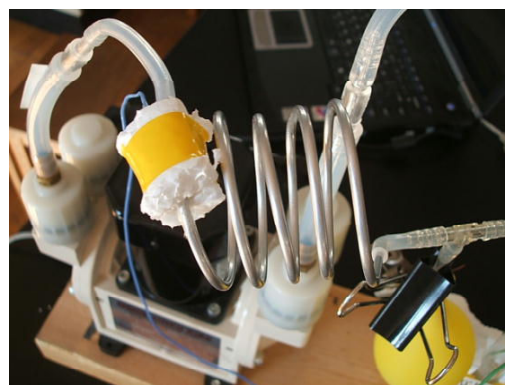


5 実験結果

低温側（試験管の底部）と高温側（アルミ冷却器の手前の部分）の温度変化を示したグラフを以下に示す。装置を作動させると、高温側と低温側の温度差はしだいに大きくなっていくが、約1300 s以降は、約25℃でほぼ安定する。



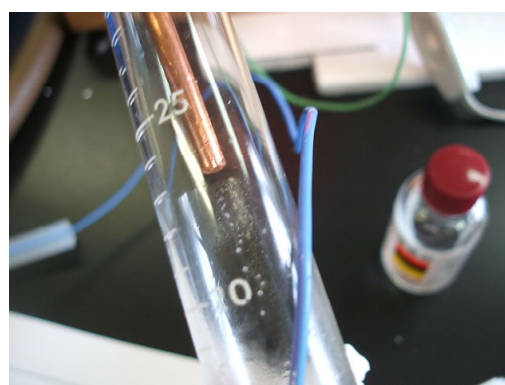
【組み立てられた装置】



【アルミパイプを曲げてつくった冷却器】



【ジクロロメタンが沸騰している様子】



【ジクロロメタンが液化している様子】

6 ジクロロメタンの取扱上の留意点

冷媒として用いるジクロロメタンは、アクリルの接着剤として、ホームセンター等で販売されているが、沸点40℃で大変気化しやすい液体である。人体に対する毒性としては、皮膚や目に接触すると炎症を引き起こすことがある他、蒸気を大量に吸引すると麻酔作用があり、慢性的には肝機能障害を起こすこと等が知られている。動物実験により発ガン性も示唆されているため、実験中は蒸気を吸い込まないように、特に注意する必要がある。

事例Ⅶ 実験「温度・圧力センサを用いたボイルの法則の検証」

1 ねらい

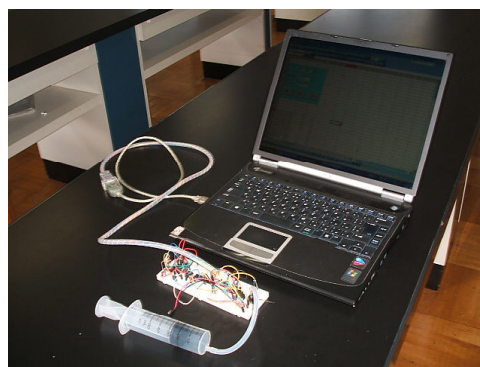
温度・圧力センサとワンチップマイコンを用いて、気体の温度と圧力のデータをP Cに取り込む装置を自作し、ボイルの法則が成り立っていることを検証する。

2 準備

注射器(60ml)、P C、ゴム管(内径φ3mm)、温度・圧力自動計測装置(温度センサ、圧力センサ、ワンチップマイコンを用いて自作したもの)

3 実験の手順

- (1) 注射器のメモリを50mlに合わせ圧力センサに接続する。
- (2) 注射器を手で押し44mlに合わせ、その時の圧力を測定する。測定はPCで連続10回測定し、その平均値をプリントに記入する。
- (3) 体積を2mlステップで増やしながら(2)の操作を繰り返す。ただし、体積を変化させた後、注射器内部の温度が室温と等しくなるまで待ってから圧力の測定を行う。
- (4) 体積と圧力の関係について、P Cでグラフをかく。



【実験装置】

4 温度・圧力自動計測装置の製作

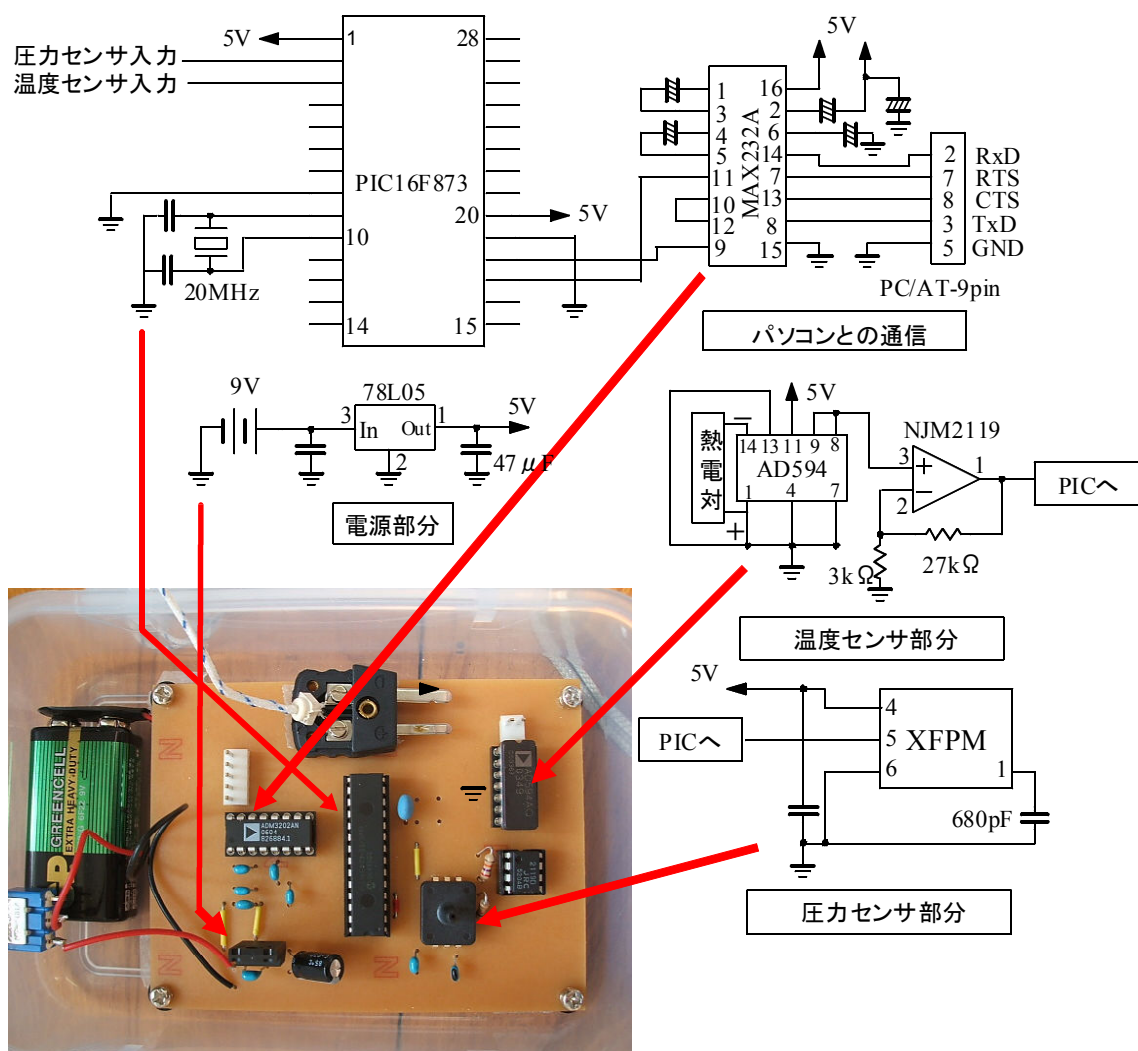
(1) 使用部品

- ・ワンチップマイコン PIC16F873
- ・3端子レギュレータ 78L05
- ・圧力センサ XFPM-115KPA
- ・J型熱電対センサ
- ・熱電対センサ用AMP AD594
- ・セラロック 20MHz
- ・積層セラミックコンデンサ $0.1\mu\text{F} \times 8$
- ・セラミックコンデンサ $0.01\mu\text{F}$ 、 $680\mu\text{F}$
- ・電解コンデンサ $47\mu\text{F}$
- ・抵抗 3Ω 、 27Ω
- ・乾電池 006P (9V)、電池ホルダ
- ・単電源オペアンプ NJM2119
- ・RS232C変換用IC MAX232A

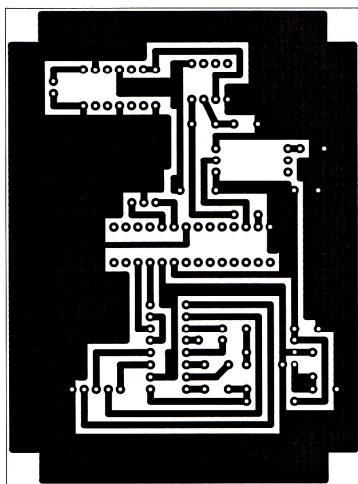


【圧力センサ】

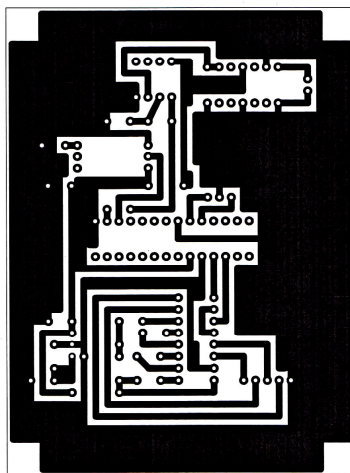
(2) 回路図



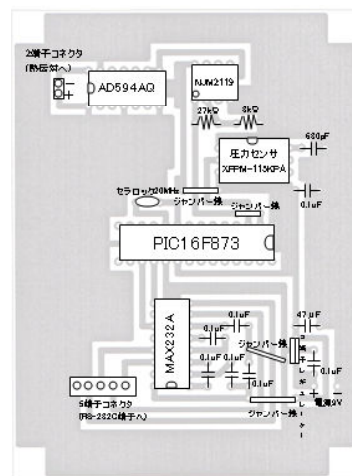
(3) プリント基板用パターンと部品配置図



(表面)



(裏面)



(部品配置図)

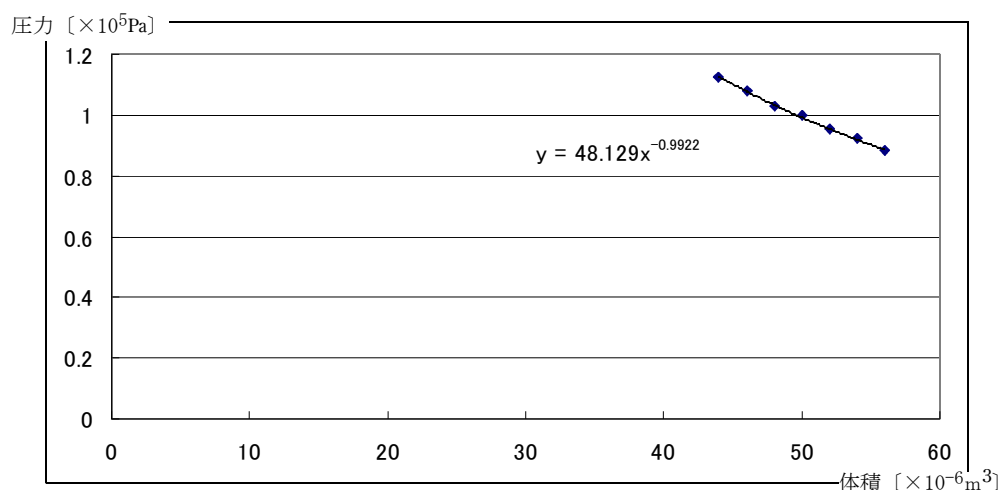
5 実験結果

体積 [$\times 10^{-6} \text{m}^3$]	44	46	48	50	52	54	56
圧力 [$\times 10^5 \text{Pa}$]	1.126	1.077	1.031	0.9969	0.9544	0.9226	0.8831
PV [J]	5.0	5.0	4.9	5.0	5.0	5.0	4.9

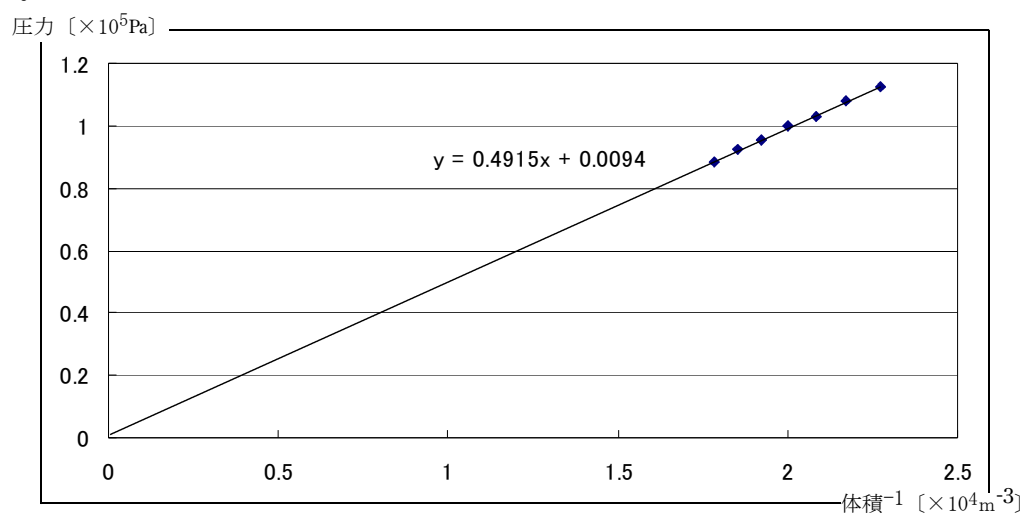
※表内の圧力は、それぞれ10回ずつ測定して得たデータの平均値

※ゴム管部分（内径3mm、長さ15cm）の空気の体積は、約 $1 \times 10^{-6} \text{m}^3$ と小さいため、無視した。

次のグラフは、圧力と体積の関係を表したものであり、体積の変域が小さいため、データが双曲線に沿って並んでいることは確認しにくいですが、エクセルによる近似関数は、圧力が体積の -0.9922 乗に比例する形であり、ほぼ反比例のグラフであることを示している。



次のグラフは、圧力と体積の逆数の関係を表したものであり、ほぼ、原点を通る直線となっている。



6 実験プリント

ボイルの法則の検証

____年 ____組 名前 _____

○目的

○実験の準備 圧力・温度センサ、注射器(60ml)、PC、ゴム管(内径φ3mm)

○手順

- 1 注射器のメモリを体積50mlに合わせ圧力センサにつなげる。
※ゴムチューブ内の空気の体積は省略する。
- 2 注射器を手で押し44mlに合わせ、その時の圧力を測定する。
※測定はPCで10回行い、その平均値をプリントに記入する。
- 3 体積値を2mlずつ増やしながら、手順2を数回繰り返す。
- 4 体積と圧力の関係について、P Cでグラフをかく。

○結果

体積 [$\times 10^{-6} \text{m}^3$]							
圧力 [$\times 10^5 \text{Pa}$]							
P V [J]							

○感想

事例Ⅷ 学習課題「熱力学第2法則についての理解を深めよう」

1 ねらい

学習プリントを用いた演習を通して、熱伝導や熱力学の第2法則に関する理解を深めるとともに、論理的思考力、読解力、文章表現力を向上させる。

2 学習プリントごとの目的

学習プリント1「熱と温度」

熱、温度、内部エネルギーという用語の正確な意味を確認させるとともに、熱伝導が高温の物体から低温の物体への向きにしか起きない理由を、原子どうしの衝突から考察させる。熱伝導というマクロな熱現象が、莫大な数の分子原子の衝突というミクロな運動の結果としてもたらされることを簡単な数式を用いて証明させることで、統計力学の考え方につながるような、基礎的な概念を形成しようとするものである。

事例Ⅰ「熱伝導を利用した比熱の測定」、事例Ⅱ「空気中、水中の微粒子が行うブラウン運動」、事例Ⅲ「ペランの方法によるアボガドロ数の測定」と組み合わせて学習することも考えられる。

学習プリント2「熱力学の第2法則」

高等学校の物理の教科書に記載されている基本法則は、ほとんどが数式で表現されているが、熱力学の第2法則は、高等学校の数学では表現が難しいため、数式でなく文章で表現されている。ここでは、第2法則の様々な文章表現のうち、代表的な二つである「トムソンの原理」と「クラウジウスの原理」を取り上げ、命題と論理に関する数学の手法を用いて、この二つの表現が物理学的に同値であることを証明し、熱力学の第2法則に関する理解を深めるとともに、読解力、文章表現力を向上させることを目的とする。

事例Ⅳ「スターリングエンジンの仕組みを利用したおもちゃの製作」と組み合わせて学習することも考えられる。

学習プリント3「熱機関の効率」

熱力学の第2法則を用いて、「カルノーの定理」を証明するとともに、熱機関の最大効率を与える「カルノーサイクル」について、熱力学の第1法則を用いて考察し、熱効率が熱源の温度だけで決まることを理解する。

事例Ⅳ「スターリングエンジンの仕組みを利用したおもちゃの製作」、事例Ⅴ「スターリングクーラーの製作」、事例Ⅵ「ジクロロメタンを用いたヒートポンプモデルの製作」と組み合わせて学習することも考えられる。

学習プリント1 「熱と温度」

※イタリック体 は、解答例を表す。

熱と温度に関する次の文章を読んで、下の(1)から(4)の問いに答えなさい。

物体を構成している原子、分子、イオン等の粒子は、目には見えないが絶えず不規則な運動をしている。この運動は熱運動とよばれ、物体の温度は、①熱運動の激しさの程度を表している。したがって、物体は全体としてのマクロな運動に基づく力学的エネルギーとは別に、構成粒子のミクロな熱運動に基づく力学的エネルギー（運動エネルギー＋粒子間にはたらく力による位置エネルギー）の総和としてのエネルギーをもっており、これを内部エネルギーと呼ぶ。

温度の異なる二つの物体を接触させておくと、接触面において両物体を構成する莫大な数の粒子は弾性衝突を繰り返し、個々の粒子は衝突の際に運動エネルギーの一部または全部を相手に与えたり、相手から与えられたりする。②多くの粒子について、衝突でやりとりするエネルギーを統計的に考察すると、物体全体としては常に、平均運動エネルギーの大きな方の物体から、平均運動エネルギーの小さな方の物体に向かってエネルギーが移動することが分かる。つまり、接触前に高温だった方の物体から低温だった方の物体へとエネルギーが移動し、両物体を構成する粒子の平均運動エネルギーが等しくなったところで、見かけ上、エネルギーの移動が止む。このとき物体間を移動したエネルギーを熱とよぶ。

- (1) 下線部①熱運動の激しさの程度を、より具体的に表す語を文中から抜き出し、の中に記入しなさい。

平均運動エネルギー

- (2) 次のA、B、Cの文は、いずれも物理学的な意味で誤りを含んでいる。誤りを正した文を、の中に記入しなさい。

A 風邪が原因で、熱が出た。

風邪が原因で、体温が高くなった。

B 高温の物体は、その物体が低温のときより多くの熱をもっている。

高温の物体は、その物体が低温のときより多くの内部エネルギーをもっている。

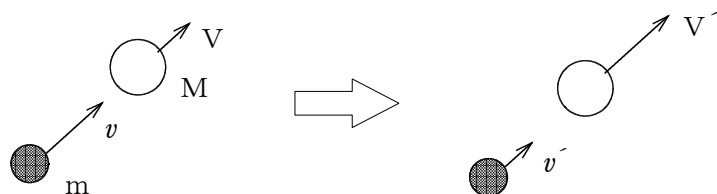
C 甘い食べ物はカロリーが高い。

甘い食べ物は、化学的エネルギーを多く含んでいる。

- (3) 下の文章は、下線部②について考察した結果をまとめたものである。文中の空欄に、適切な式または語句を記入しなさい。

温度の異なる二物体が接触しているときの、熱の移動の向きを調べるため、気体と固体が接触している場合の例について考えよう。気体では分子は、ほぼ自由に飛びまわっており、固体の原子はそれぞれのつり合いの位置を中心にして振動している。気体の分子が固体の表面の原子と衝突するとき、エネルギーのやりとりが行われるが、この際、原子が壊れたり、原子内の電子の運動状態が変化したりしないものとする、衝突の前後で運動エネルギーの和は保存される。計算を単純にするため、気体は単原子分子であるものとし、気体分子及び固体原子の運動は、常に同一直線上で行われる場合限定して考えることにする。

図のように、気体分子と固体原子の質量をそれぞれ m 、 M とし、両粒子の衝突前の速度を v 、 V 、衝突後の速度を v' 、 V' とする。



衝突の前後で、運動量が保存されることを式に表すと、

$$mv + MV = mv' + MV' \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、運動エネルギーが保存されることを式に表すと、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。これらの式より、衝突の際、気体分子から固体原子に移動するエネルギー ΔK を求めよう。 ΔK は気体分子が失う運動エネルギー、または固体原子が得るエネルギーであるから、

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}MV'^2 - \frac{1}{2}MV^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる。したがって、 ΔK を求める基本的な方法は、式①、②を解くことによって得られた V' (または v') を式③に代入することであるが、ここでは計算をさらに簡単にするため、運動エネルギー保存を表す式②の代わりに、一直線上の弾性衝突では反発係数が1であることを表す、次式④を用いることにする。

$$1 = -\frac{v' - V'}{v - V} \quad \dots \textcircled{4}$$

①、④を解いて、 V' を求めると、

$$V' = \frac{2mv + (M - m)V}{m + M}$$

これを③式に代入して、

$$\Delta K = \frac{4mM}{(m + M)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}(M - m)vV \right) \quad \dots \textcircled{5}$$

という式が得られる。したがって、 ΔK の符号は v 、 V の値によって正になったり負になったりすることが分かる。気体分子と固体原子の衝突は、固体表面のいたるところで極めて多数回起こっており、気体分子の速度、固体原子の速度とも、向きや大きさがまちまちであるから、 ΔK は正負の様々な値をとると考えられる。そこで、多数の気体分子や固体原子による多数回の衝突について、 ΔK の平均値を考えてみることにする。ある量 X の平均値を $\overline{X}$ で表すものとする、 ΔK の平均値 $\overline{\Delta K}$ は、

$$\overline{\Delta K} = \frac{4mM}{(m + M)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}m\overline{v^2} - \frac{1}{2}M\overline{V^2} + \frac{1}{2}(M - m)\overline{v \cdot V} \right) \quad \dots \textcircled{6}$$

となるが、 $\overline{v \cdot V}$ の部分に着目してみる。 v と V は互いに独立であるから、多数の様々な衝突の中から、仮に v がある特定の値をとる衝突のみを取り出すと、その中には、 V が正の場合と負の場合が偏りなく含まれていると考えられるので、 $v \cdot V$ の値としても正及び負のものが均等に含まれることにより、 $\overline{v \cdot V} = 0$ と考えられる。そうすると式⑥は、

$$\overline{\Delta K} = \frac{4mM}{(m + M)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}m\overline{v^2} - \frac{1}{2}M\overline{V^2} \right)$$

となり、気体分子の平均運動エネルギーの方が、固体原子の平均運動エネルギーより大きいときには、 $\overline{\Delta K} > 0$ であるが、気体分子の平均運動エネルギーが固体原子の平均運動エネルギーより小さいときには $\overline{\Delta K} < 0$ となる。つまり、温度の異なる物体が接しているとき、熱伝導の向きは物質の種類に依存せず、必ず、平均運動エネルギーの大きい方の物体から、平均運動エネルギーの小さい方の物体への向きであることが分かる。

学習プリント2 「熱力学の第2法則」

※イタリック体 は、解答例を表す。

熱と温度に関する次の文章を読んで、下の(1)、(2)の問いに答えなさい。

エネルギー保存の法則が知られていなかった時代、エネルギーの補給なしに仕事をし続ける機械をつくろうと、多くの人が努力を重ねた。このような機械を第1種の永久機関といい、そんな都合の良い機械をつくることはできないと主張しているのが熱力学の第1法則である。第1種の永久機関が不可能ならば、熱をどれだけ無駄にせず仕事に変換できるかが次の課題となるが、もし、熱を100%仕事に変えるような機械が実現できれば、その便利さは第1種の永久機関に劣らないことが知られており、このような機械は第2種の永久機関とよばれる。なぜなら、通常の熱機関を動かして熱を仕事に変えようとするときには、必ず高温の熱源と低温の熱源が必要となり、高温の熱源から奪った熱の一部を低温の熱源に捨てないと、熱機関を動かし続けることはできないが、もし、熱を全て仕事に変換するような機関があれば、熱を捨てるための低温の熱源が不要となるため、海水から熱を取って航行する船や、大気から熱を吸収して走る自動車が作れるからである。船のスクリューで海水を攪拌したり、自動車がブレーキをかけたりするときに熱が発生するから、地球が寒冷化してしまう心配はない。しかし、実際には熱を全て仕事に変えるような熱機関をつくることは、どうやってもできそうにないことが分かってきた。この、第2種の永久機関が実現不可能であることは、熱力学の第1法則とは別の基本法則であると考えられ、熱力学の第2法則とよばれる。この法則は、他の多くの物理法則と違って数式に表すのが難しく、高等学校の教科書では文章で表現されることが多い。しかも、表現方法が一通りではなく、様々な文章表現が知られており、何ともすっきりしない法則である。以下に示すA、Bは熱力学の第2法則の代表的な文章表現であり、発見者の名前をとって、それぞれ、トムソンの原理、クラウジウスの原理とよばれる。

- A 熱を全て仕事に変え、それ以外に何の痕跡も残さないようにすることは不可能である。 (トムソンの原理)
- B 低温の物体から高温の物体に熱を移動させ、それ以外に何の痕跡も残さないようにすることは不可能である。 (クラウジウスの原理)

Aについて、何らかの痕跡が残ってよいのなら、熱を全て仕事に変えることは可能である。例えば、気体が等温膨張をするときは、気体は熱を吸収して外部に仕事をするが、内部エネルギーが変化しないことから、熱を全て仕事に変えていることが分かる。ただし、その結果として気体の圧力が減少し、体積が増加するという変化が残ってしまう。

また、Bについて、熱の移動の向きが逆で、高温の物体から低温の物体に熱が移動し、それ以外に何の痕跡も残らない現象なら、様々な場面でごく普通に起こっている熱伝導である。また、何らかの痕跡を残してよいのなら、低温の物体から高温の物体に熱を移動させることは可能である。例えば、

結果として a b という変化が残ってしまう。

それでは次に、A (トムソンの原理) と B (クラウジウスの原理) が同値であることを証明してみよう。それには、次の命題①、②を両方とも示すことができればよい。

①「Aが成立するとき、Bが成立する。」 ②「Bが成立するとき、Aが成立する。」
ところが、これらを直接証明するのは難しい。そこで、①、②の対偶を証明することにする。

数学で学習したように、 p 、 q を条件として、「 p ならば q である」という命題があるとき、「 q でなければ p でない」という命題を、もとの命題の対偶といい、ある命題とその対偶は、真偽が一致する。例えば、「 $x=2$ ならば、 $x^2=4$ である」という命題と、その対偶である「 $x^2 \neq 4$ ならば $x \neq 2$ である」は論理的に同じことを言っており、いずれも真である。これを利用して、ある命題を証明するのに、その対偶を考えて証明することがある。例えば、「整数 n の平方が偶数ならば、 n は偶数である」という命題は、その対偶を考えて次のように証明することができる。

(証明) c

それではいよいよ、**A**（トムソンの原理）と**B**（クラウジウスの原理）が同値であることを証明しよう。命題①、②の対偶はそれぞれ、

①'「**B**が成立しないとき、**A**が成立しない。」 ②'「**A**が成立しないとき、**B**が成立しない。」である。まず、①'の証明をする。

クラウジウスの原理が成り立たず、低温の物体から高温の物体に熱を移動させ、何の痕跡も残さないような過程Pが可能だとする。高温熱源から熱 Q_1 を吸収し、低温熱源に熱 Q_2 を捨てることによって仕事Wをする熱機関があるとき、過程Pによって低温熱源から高温熱源に熱 Q_2 を移動させれば、結果として、この熱機関は熱 $Q_1 - Q_2$ を全て仕事Wに変え、それ以外に何の痕跡も残さないことになるから、トムソンの原理が成り立たないことになる。次に②'の証明をする。

トムソンの原理に反する熱機関があったとする。この熱機関が低温熱源から受け取った熱Qを全て仕事に変えるとき、その仕事の内容が、例えば、棒で高温熱源の表面を摩擦することであれば、低温熱源の内部エネルギーが減少し、その分、高温熱源の内部エネルギーが増加するから、低温の物体から高温の物体に熱を移動させて何の痕跡も残さなかったことになり、クラウジウスの原理が成り立たないことになる。

以上により、**A**（トムソンの原理）と**B**（クラウジウスの原理）は同値であることが証明できた。

(1) 文中の空欄aからdに当てはまる語、文章、式を次の□の中に記入しなさい。

a エアコンを利用して、室内から奪った熱を、室内よりも気温の高い室外に移すことが可能である。

b エアコンは電力を消費するため、発電所において、何らかのエネルギーが減少する

c この命題の対偶は、「 n が奇数ならば、 n の平方は奇数である」であり、これを証明すればよい。 n を奇数とし、整数 k を用いて $n = 2k + 1$ とおくと n^2 は、
$$n^2 = (2k + 1)^2$$
$$= 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$
と表せ、 $2k^2 + 2k$ は整数であるから、 n^2 は奇数である。したがって、もとの命題「整数 n の平方が偶数ならば、 n は偶数である」は真である。

d 熱 $Q_1 - Q_2$

(2) 熱力学の第2法則の表現文章として、**C** 摩擦熱の発生は不可逆現象であるという原理がある。この原理が**A**（トムソンの原理）と同値であることを証明しなさい。

①「**A**が成立するとき**C**が成立する」と②「**C**が成立するとき**A**が成立する」の二つを証明する代わりに、それぞれの対偶である、①'「**C**が成立しないとき**A**が成立しない」と②'「**A**が成立しないとき**C**が成立しない」の二つを証明する。まず、①'について、**C**が成立しないということは、運動していた物体が摩擦で静止し、運動エネルギーの全てが熱になる現象の逆が起こるから、静止した物体が熱を吸収し、その熱を全て運動エネルギーに変えて動き出すため、熱を全て仕事に変え、他に何の変化も残さなかったことになり、**A**が成立しない。また、②'について、**A**が成立しないとき、地面から吸収した熱を全て仕事に変え、その仕事の内容が地面に静止していた物体を水平方向に加速することとすれば、地面を滑っていた物体の運動エネルギーが摩擦によって熱に変わる現象の逆が起こったことになり、**C**が成立しない。したがって、**A**と**C**は同値である。

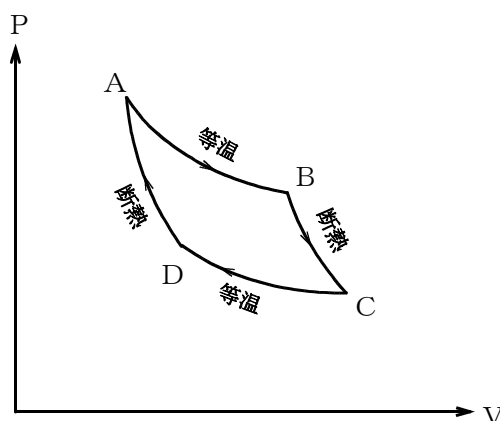
学習プリント3 「熱機関の効率」

※イタリック体 は、解答例を表す。

熱機関に関する次の文章を読んで、下の（１）、（２）の問いに答えなさい。

ワットによって実用的な蒸気機関が発明されてから約50年の間、どれだけの仕事が高温の水蒸気から取り出せるかを示す原理は何も分からなかった。また、仕事物質として水蒸気以外に有効なものはないのかという問題についても、科学的に考察された記録は残っていない。これらの問題に対する重要な進歩は、フランス人のサディ・カルノー (Sadi Carnot) によってなされた。カルノーは、1824年に「火の動力及びこの動力を発生させるに適した機関についての考察」と題する論文を発表し、その中で、①「熱機関のうち、最大効率のものは可逆機関であり、あらゆる可逆熱機関の熱効率は作業物質の種類に依らず全て等しいこと」と、②「熱機関の最大効率は、低温熱源と高温熱源の温度のみで決まること」を示した。

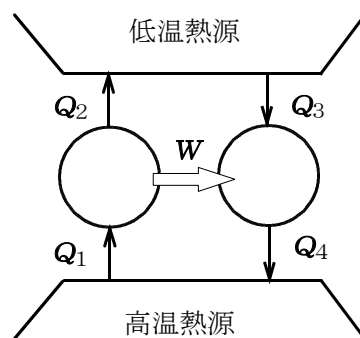
図は、カルノーが考えた可逆熱機関の循環過程をP-V図に表したものであり、2つの等温線を2つの断熱線で切ったときの交点をA、B、C、Dとしたとき、これらの点を循環する過程A B C D Aはカルノーサイクルと呼ばれる。過程A→Bと過程C→Dは等温変化であり、過程A→Bは高温熱源と熱平衡を保ちながら膨張する過程を、過程C→Dは、低温熱源と熱平衡を保ちながら圧縮されている過程を示している。いずれの過程も熱源との温度差がなく、不可逆変化が起きることなく、逆行可能である。過程B→Cと過程D→Aは、いずれも温度の違う二つの状態を連結する過程であり、熱平衡を保って逆行可能とするため、これらは断熱過程である。



- (1) 下線部①はカルノーの原理と呼ばれており、次の文章は、熱力学の第2法則を用いたカルノーの原理の証明である。文中の空欄に当てはまる語や数式を記入しなさい。

あらゆる可逆熱機関の熱効率が等しいことを証明するため、背理法を用いる。すなわち、熱効率の異なる熱機関が存在すると矛盾が生じることを示す。

まず、二つの可逆熱機関、機関Ⅰと機関Ⅱがあり、機関Ⅰの熱効率 e_1 は、機関Ⅱの熱効率 e_2 より大きいと仮定する。図のように、これらの熱機関を連結し、機関Ⅰは高温熱源から熱 Q_1 を取り、低温熱源に熱 Q_2 を捨てるときに、機関Ⅱに対して仕事 W をする。一方、機関Ⅱは、逆運転をしている。つまり、機関Ⅰから仕事 W をされて、低温熱源から熱 Q_3 を奪い、高温熱源に熱 Q_4 を捨てるヒートポンプの役目をしているものとする。機関Ⅰの熱効率 e_1 は、 Q_1 と W を用いて、



$$e_1 = \frac{W}{Q_1}$$

と表せる。また、機関Ⅱの熱効率 e_2 については、機関Ⅱが順方向に運転しているときのことを考えると、高温熱源から熱 Q_4 を奪い、低温熱源に熱 Q_3 を捨てるときに仕事 W をするはずだから、 Q_4 と W を用いて、

$$e_2 = \frac{W}{Q_4}$$

と表せ、このとき仮定より $e_1 > e_2$ であるから、

$$Q_4 - Q_1 > 0$$

となる。機関Ⅰと機関Ⅱを一体として考えると、これらは外部と仕事のやり取りをせず、低温熱源から熱($Q_3 - Q_2$)を奪って、高温熱源に熱($Q_4 - Q_1$)を移動させる働きのみをしており、熱($Q_4 - Q_1$)が正であるということは、低温部から高温部に熱を移動させ、それ以外に何の痕跡も残さない過程が実現していることになり、熱力学第2法則の表現の一つである、**クラウジウス**の原理に反することになる。

もし、機関Ⅰより機関Ⅱの方が熱効率が大きいとしたらどうだろうか。この場合は、機関Ⅰと機関Ⅱの立場を入れ替え、機関Ⅱが機関Ⅰに対して仕事 W をし、機関Ⅰがヒートポンプの役目をすれば、やはり低温部から高温部に熱を移動させ、それ以外に何の痕跡も残さないことになる。したがって、全ての可逆機関の熱効率は、同じ熱源を用いて運転している限り、等しくなければならない。

それでは、可逆機関より熱効率の高い不可逆機関があったらどうだろうか。この場合、図の機関Ⅰを熱効率 e_1 の不可逆機関とし、機関Ⅱを熱効率 e_2 の可逆機関として、 $e_1 > e_2$ を仮定すれば、機関Ⅰ、機関Ⅱとも可逆機関である場合と全く同様な証明ができるから、熱力学第2法則が成立する限り、**不可逆機関**の熱効率は**可逆機関**の熱効率を超えることはできない。

- (2) 次の文章は、カルノーサイクルを行う熱機関の熱効率を求める過程を示したものである。文中の空欄に当てはまる数式を記入しなさい。

熱機関の熱効率 e は、1サイクルで高温熱源から吸収する正の熱を Q 、1サイクルで外部にする仕事を W とすると、

$$e = \frac{W}{Q}$$

で定義される。

過程 $A \rightarrow B$ 、過程 $B \rightarrow C$ 、過程 $C \rightarrow D$ 、過程 $D \rightarrow A$ で外部にする仕事をそれぞれ、 W_1 、 W_2 、 W_3 、 W_4 とすると、 $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$ である。また、断熱過程では外部との熱のやり取りは行われず、等温過程である過程 $A \rightarrow B$ 、過程 $C \rightarrow D$ で吸収する熱を Q_1 、 Q_2 とする。過程 $A \rightarrow B$ について、熱力学の第1法則を用いると、

$$0 = Q_1 + (-W_1) \quad \therefore Q_1 = W_1$$

同様に、過程 $C \rightarrow D$ について、熱力学の第1法則を用いると、

$$0 = Q_2 + (-W_3) \quad \therefore Q_2 = W_3$$

となるが、この過程では気体の体積が減少しているため、外部から正の仕事をされており、

$$W_3 < 0 \quad \text{より} \quad Q_2 < 0$$

したがって、熱効率 e は、

$$e = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{Q_1} = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{W_1} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。ここで、この気体を定積モル比熱 C_V 、物質質量 n の理想気体とし、気体定数を R とする。また、過程 $A \rightarrow B$ 、過程 $C \rightarrow D$ の温度をそれぞれ、 T_1 、 T_2 とすると、

$$W_1 = \int_{V_A}^{V_B} P dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \log_e \frac{V_B}{V_A}$$

$$W_3 = - \int_{V_C}^{V_D} P dV = - \int_{V_C}^{V_D} \frac{nRT_2}{V} dV = -nRT_2 \log_e \frac{V_D}{V_C}$$

また、過程 $B \rightarrow C$ 、過程 $D \rightarrow A$ について、熱力学の第1法則を適用し、 W_2 、 W_4 を T_1 、 T_2 を用いて表すと、

$$W_2 = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$W_4 = nC_V(T_1 - T_2)$$

となるから、

$$W_2 + W_4 = \boxed{0}$$

という関係が成り立つ。これらを、①式に代入すると、

$$e = \frac{nRT_1 \log_e \frac{V_B}{V_A} - nRT_2 \log_e \frac{V_D}{V_C}}{nRT_1 \log_e \frac{V_B}{V_A}} = \frac{T_1 \log_e \frac{V_B}{V_A} - T_2 \log_e \frac{V_D}{V_C}}{T_1 \log_e \frac{V_B}{V_A}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。また、過程A→B、過程C→Dは等温変化より、

$$P_A V_A = \boxed{P_B V_B}$$

$$P_C V_C = \boxed{P_D V_D}$$

また、過程B→C、過程D→Aは断熱過程であり、比熱比を γ とすると、 $PV^\gamma = (\text{一定})$ の関係があるから、

$$P_B V_B^\gamma = \boxed{P_C V_C^\gamma}$$

$$P_D V_D^\gamma = \boxed{P_A V_A^\gamma}$$

これら4式を、辺々かけて整理すると、

$$V_B^{\gamma-1} V_D^{\gamma-1} = \boxed{V_A^{\gamma-1} V_C^{\gamma-1}}$$

となり、

$$\frac{V_B}{V_A} = \boxed{\frac{V_C}{V_D}}$$

という関係が得られる。これを②式に代入すると、

$$e = \frac{T_1 \log_e \frac{V_B}{V_A} - T_2 \log_e \frac{V_D}{V_C}}{T_1 \log_e \frac{V_B}{V_A}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

となり、熱効率は高温熱源と低温熱源の温度のみで決まり、両熱源の温度差が大きいほど、熱効率は高くなることが分かる。なお、カルノーサイクルは可逆機関のサイクルであり、カルノーの定理より、全ての可逆機関の熱効率は等しく、また非可逆機関のそれより大きくなければならないから、この式はあらゆる熱機関の最大効率を与える。

なお、スターリングエンジンは、高温熱源から熱を取って、その一部を低温熱源に捨てることによって熱を仕事に変える熱機関であるが、逆運転が可能であり、熱平衡をできるだけ乱さないよう工夫することにより、可逆機関に近づけることができる。大ききの割に出力（仕事率）が小さい等の問題があつて、現在のところあまり使われていないが、どんな熱源でも利用でき、熱効率も良いことから、環境への負荷の少ない熱機関と考えられており、実用化に向けた今後の改良が期待されている。

高等学校における教科指導の充実
理 科 《 物理領域 》
思考力・表現力を高める授業を目指して
[熱力学]

発 行 平成22年3月
栃木県総合教育センター 研究調査部
〒320-0002 栃木県宇都宮市瓦谷町1070
TEL 028-665-7204 FAX 028-665-7303
URL <http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/>