

事例Ⅲ 実験「ペランの方法によるアボガドロ数の測定」

1 ねらい

アインシュタインによるブラウン運動の理論に基づき、大きさの分かっているラテックス球のブラウン運動について、時間と変位の関係を調べることにより、アボガドロ数を測定する。

2 準備

顕微鏡、顕微鏡用CCDカメラ、ミリカン実験用 $1\mu\text{m}$ ラテックス球、VHSビデオデッキ、スライドガラス（マイクロメーター付）、カバーガラス、PC、ビデオキャプチャー、測長ソフト「挟むものさし Ver1.15」、注射器、スポイト

3 原理

水中にあって、ブラウン運動をする質量 m の粒子の運動を考える。この粒子の運動は3次元であるが、ここでは簡単のために x 方向の運動のみを考える。粒子は、多数の水分子の衝突による不規則な力 F と、速さに比例する抵抗力を水から受けているものとし、抵抗力の比例定数を μ とすると、この粒子の運動方程式は、

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - \mu \frac{dx}{dt}$$

となり、この式の両辺に x をかけると、

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = Fx - \mu x \frac{dx}{dt} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、

$$\frac{d[x(dx/dt)]}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x \frac{d^2x}{dt^2}$$

であるから、式①の左辺は、

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

となり、右辺の第2項は、

$$\frac{d(x^2)}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} \quad \therefore -\mu x \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{2} \frac{d(x^2)}{dt}$$

したがって、式①は、

$$m \frac{d[x(dx/dt)]}{dt} - m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = Fx - \frac{\mu}{2} \frac{d(x^2)}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

次に、ブラウン運動をする多くの粒子について、この式全体の平均を考える。

まず、左辺の第1項に着目する。粒子の位置と速度の積は時間とともに変化しないと考えられるから、この項を多数の粒子について平均したものは0である。というのは、粒子は絶えず不規則な運動をしており、ある位置に1つの粒子があるとき、それ以前の粒子の位置や速度に関する情報は、完全に失われているからである。

$v = \frac{dx}{dt}$ とし、 v^2 の平均を $\overline{v^2}$ とすると、左辺の第2項の平均値は、 $-m\overline{v^2}$ と表され、気体分子運動論より、絶対温度 T の物質を構成する分子や原子の、1方向当たりの平均運動エネルギーは、アボガドロ数 N_A 、気体定数 R を用いて、

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{RT}{2N_A} \quad (\text{ただし、} v \text{は1次元})$$

と表され、このような平均運動エネルギーをもつ多数の水分子からの衝突を受けてブラウン運動をしている粒子についても、この関係が成り立っているはずだから、

$$-m \overline{v^2} = -\frac{RT}{N_A}$$

が成り立つと考えられる。

次に、右辺の第1項の平均値を考える。 F は不規則な力であり、 F の大きさや向きは、粒子の位置 x と無関係であるから、それらの積 Fx を多数の粒子に対して平均したものは0となる。

以上より、②式を多数の粒子について平均することにより、

$$m\overline{v^2} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{d(\overline{x^2})}{dt} \quad \therefore \overline{x^2} = \int \frac{2}{\mu} \cdot \frac{RT}{N_A} dt$$

という式が得られる。ここで、時刻 $t=0$ のとき $x=0$ とすると、

$$\overline{x^2} = \frac{2RT}{\mu N_A} \cdot t$$

と表され、変位の2乗が時間 t に比例することが分かる。

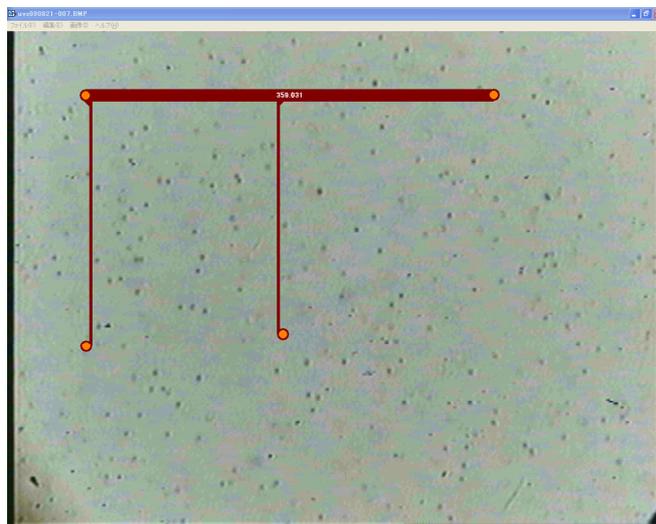
また、粒子が水から受ける抵抗力の係数 μ は、粒子が半径 a の球のとき、 $\mu=6\pi\eta a$ （ただし、 η は水の粘性率）で与えられることが知られているから、これを上式に代入すると、

$$\overline{x^2} = \frac{2RT}{6\pi\eta a N_A} \cdot t = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} \cdot t \quad \dots \textcircled{3}$$

という関係式が得られ、一定時間 t における粒子の変位の2乗 x^2 を多数測定し、その平均値 $\overline{x^2}$ を用いることによって、アボガドロ数を求めることができる。

4 実験の手順

- (1) スポイトを使ってラテックス球溶液を、スライドガラス上に適量置き、カバーガラスをのせる。
- (2) スライドガラスを顕微鏡ステージに置く。
- (3) 顕微鏡に取り付けたCCDカメラからの画像をディスプレイで見ながら、測定に適した位置にあるラテックス球にピントを合わせる。
- (4) ラテックス球の運動の様子を、ビデオで数分間録画する。
- (5) ビデオキャプチャーを用いて、(4)で録画された画像データを、PCに取り込む。
- (6) PCに取り込まれた画像をコマ送りしながら、測長ソフトを用いることにより、着目したラテックス球について、画面上の x 座標を1s毎に、2分間測定する。
- (7) スライドガラスに刻まれたゲージを用いて(6)で得られたデータの校正を行う。

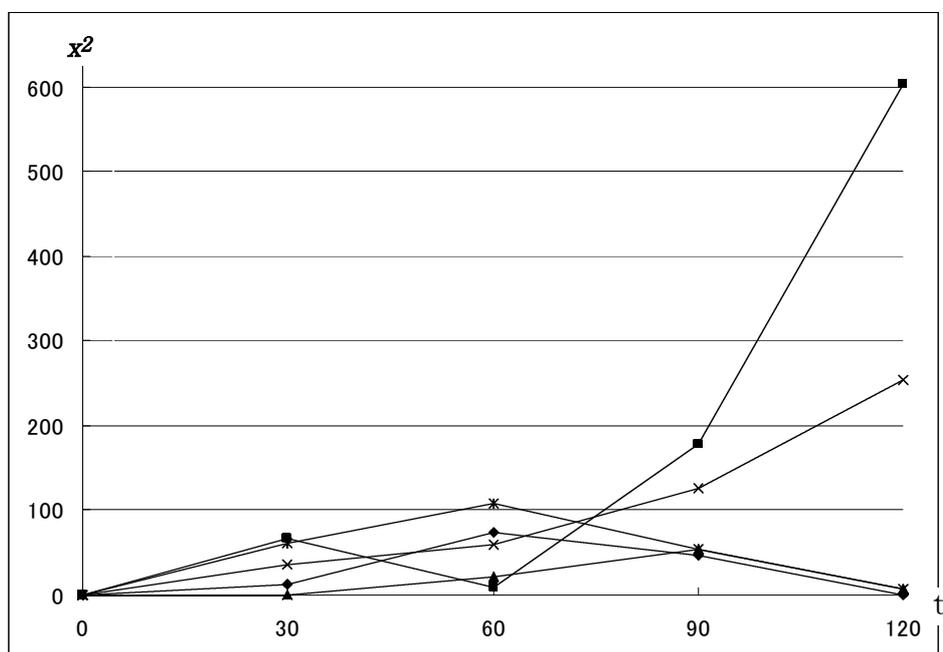


5 実験結果の例

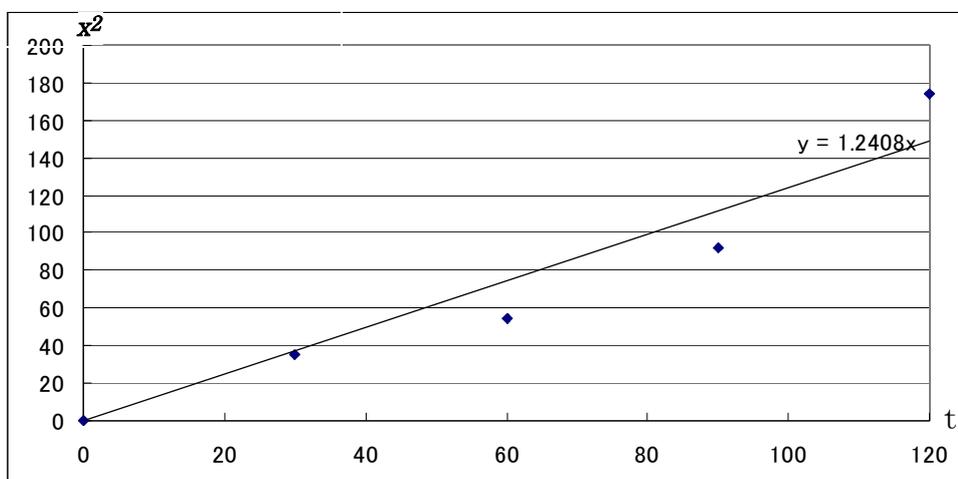
PCに取り込まれた画像をコマ送りしながら再生し、5つのラテックス球（粒子1～粒子5）について、その水平方向の変位 x を30 s 毎に測定した。次の表は、時刻 t と x 、 x^2 の関係をまとめたものである。

t[s]	粒子1		粒子2		粒子3		粒子4		粒子5	
	$x[\mu\text{m}]$	x^2								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-3.45	11.9	-8.19	67.1	-0.43	0.19	-6.04	36.4	7.77	60.37
60	-8.62	74.3	-3.01	9.06	4.74	22.5	-7.75	60.1	10.4	107.2
90	-6.89	47.5	-13.4	178.5	7.33	53.7	-11.2	125.5	7.34	53.9
120	-0.85	0.71	-24.5	602.5	-2.59	6.73	-15.9	254.3	2.59	6.73

また、時刻 t と x^2 の関係をグラフに表すと、以下のようになり、粒子によって運動の様子は大きく異なっていることが分かる。



次に、5つの粒子について x^2 の平均 $\overline{x^2}$ と時刻 t の関係をグラフに示す。



このグラフを見ると、アインシュタインの理論通り、 $\overline{x^2}$ が時刻 t に比例する傾向があるため、個々の粒子はランダムな運動をしていることが窺われる。また、最小二乗法による直線フィッティングを行うと、その傾きは $1.24 (\mu\text{m})^2/\text{s}$ であった。次に、この値を用いてアボガドロ数を求める過程を示す。

アボガドロ数 N_A と $\overline{x^2}$ の関係は次の式 (3 原理 ③) で表され、

$$\overline{x^2} = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A} \cdot t$$

右辺の t の係数を $1.24 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ とする。実験時の気温 18°C のときの水の粘性係数は、理科年表を参照して $\eta = 1.05 \times 10^{-3}$ とし、 $R = 8.31 \text{ J}\cdot\text{s}$ 、 $a = 0.50 \times 10^{-6} \text{ m}$ を代入すると、

$$1.24 \times 10^{-12} = \frac{8.31 \times 291}{3 \times 3.14 \times 1.05 \times 10^{-3} \times 0.50 \times 10^{-6} \times N_A}$$

となり、アボガドロ数として、

$$N_A = 3.94 \times 10^{23}$$

が得られた。データの数が少ないため、誤差が大きいもののオーダーは合っており、気体分子運動論の正しさを示す結果と考える。

さらに25個のラテックス球 (粒子6~粒子30) について、その水平方向の変位 x を30 s 毎に測定した。次の表は、時刻 t と x 、 x^2 の関係をまとめたものである。

t[s]	粒子6		粒子7		粒子8		粒子9		粒子10	
	x[μm]	x^2								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	6.04	36.5	-3.89	15.1	3.44	11.9	-1.29	1.67	10.8	116
60	0.00	0.00	-6.91	47.7	-3.03	9.16	-0.02	0.00	4.74	22.5
90	-6.04	36.5	-9.49	90.1	-1.30	1.70	2.15	4.62	8.19	67.1
120	-6.47	41.9	-15.5	241	1.28	1.65	0.00	0.00	-1.7	2.99

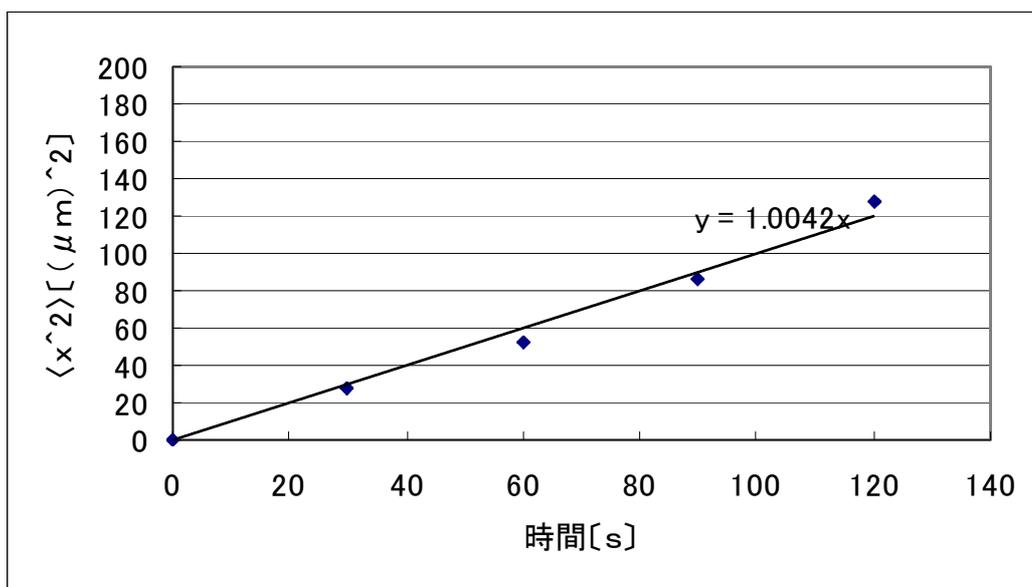
t[s]	粒子11		粒子12		粒子13		粒子14		粒子15	
	x[μm]	x^2								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	10.8	116	7.32	53.6	0.86	0.75	-3.45	11.9	-0.9	0.748
60	6.46	41.7	7.32	53.6	2.60	6.76	3.02	9.13	-3.0	9.19
90	11.2	125	19.4	376	-5.17	26.7	7.34	53.8	-3.9	15.2
120	13.4	178	22.0	483	-16.0	255	0.441	0.194	-13	157

t[s]	粒子16		粒子17		粒子18		粒子19		粒子20	
	x[μm]	x^2								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-5.18	26.9	0.419	0.175	0.41	0.17	2.17	4.71	-2.2	4.65
60	-7.78	60.5	6.02	36.2	0.41	0.17	0.45	0.21	-4.3	18.7
90	-6.92	47.9	17.6	311	5.57	31.0	8.21	67.4	6.01	36.1
120	-0.89	0.78	11.6	135	4.28	18.3	9.93	98.6	11.6	135

t[s]	粒子21		粒子22		粒子23		粒子24		粒子25	
	x[μm]	x^2								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	6.46	41.8	2.15	4.63	0.01	0.00	-3.88	15.1	1.73	2.98
60	13.8	190	11.2	125	-3.87	15.0	0.86	0.74	3.88	15.1
90	18.5	344	13.8	190	-0.42	0.18	-2.58	6.68	-1.7	3.00
120	13.4	179	9.90	98.0	-15.5	241	-3.88	15.1	-15	216

t[s]	粒子26		粒子27		粒子28		粒子29		粒子30	
	x[μm]	x ²								
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	-1.73	3.00	-0.86	0.74	-0.87	0.75	7.32	53.7	-11	116
60	-3.45	11.9	9.92	98.5	-12.9	168	14.2	202	-13	168
90	-3.88	15.1	9.06	82.0	-9.06	82.1	9.48	89.9	-4.8	22.8
120	-5.19	26.9	16.8	283	0.43	0.18	11.6	135	-5.7	31.9

次に、30個の粒子（粒子1～粒子30）について、 x^2 の平均 $\overline{x^2}$ と時刻 t の関係をグラフに示す。



5個の粒子（粒子1～粒子5）のグラフと比較すると、 $\overline{x^2}$ が時刻 t に比例する傾向がさらに明確になっており、最小二乗法による直線フィッティングを行うと、30 s、60 s、90 s、120 s のデータはいずれも原点を通る、傾き $1.00 (\mu\text{m})^2/\text{s}$ の直線に接近している。この結果を用いてアボガドロ数を求めると、

$$N_A = 4.89 \times 10^{23}$$

が得られた。真の値と比較すると、なお20%弱のずれがあるが、4つのデータが同一直線によくフィットしていることから、その原因は各粒子の位置の読み取り誤差よりも、温度測定 of 精度不足に伴う水の粘性率の誤差、ラテックス球半径のカタログデータに含まれる誤差の影響が大きいと考えられる。

さらに信頼性の高い結果を得るためには、ペランがアインシュタインのブラウン運動理論を検証する際に行ったように、コロイド粒子の種類や半径を変えたり、水以外の液体を用いたりしても、得られるアボガドロ数の値に変化がないことを確かめることが考えられる。

顕微鏡用のCCDカメラ以外、高価な材料は必要がなく、理論式を導く過程も、学習の進んでいる生徒であれば十分理解することが可能であるので、部活動等で取り組む探求活動の素材として適していると考えられる。

6 参考文献

- ・「だれが原子をみたか」江沢洋
- ・「ブラウン運動の定量解析」日本物理学会
- ・「ブラウン運動と原子の实在」慶応大学日吉物理学教室
- ・ファイマン物理学 第2巻