事例Ⅰ　実験「熱伝導を利用した比熱の測定」

1　ねらい

　比熱の分かっている金属でできた物体Ａと、比熱の分からない金属でできた物体Ｂに熱電対の温度センサーを取り付ける。物体Ａのみを湯の中で温めてから、物体Ｂと接触させ、両物体が熱平衡に達するまでの、それぞれの温度を自動計測して温度変化の様子をグラフに表すとともに、その結果から物体Ｂの金属の比熱を求める。

2　準　備

　断熱容器（発泡ポリスチレンの板とガムテープを用いて自作したもの）、電子天秤、アルミニウム円柱（物体Ａ）、ステンレス円柱（物体Ｂ）、ビーカーに入った湯（80℃程度）、４点式デジタル温度計FUSO-304（株式会社FUSO）、パソコン用の温度測定ソフトTestLink SE-309（株式会社FUSO）

3　実験の手順

（１）物体Ａ、Ｂの質量を電子天秤で量る。

（２）物体Ａ、Ｂ側面に、それぞれ熱電対を取り付ける。

（３）物体Ａをビーカーの湯の中に入れ、物体Ｂを断熱容器の中に入れる。

（４）コンピュータで温度データの取り込みを開始する。

（５）物体Ａ、Ｂの温度がいずれも安定したら、そのときの温度T_{A}、T_{B}を記録する。

（６）物体Ａを湯から取り出して断熱容器に入れ、容器の蓋を閉める。

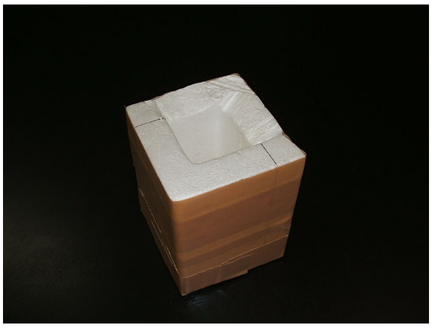
（７）両物体の温度変化の様子を、パソコン画面上のグラフで観察する。

（８）両物体の温度が等しくなったら、温度データの取り込みを終了し、グラフをプリントアウトする。

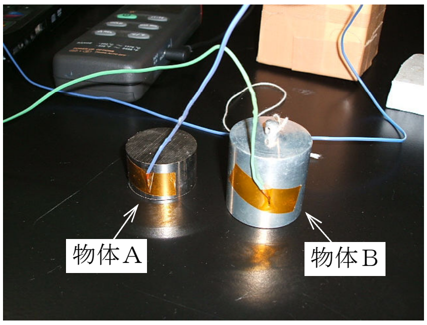
（９）グラフから、両物体が熱平衡に達したときの温度Ｔを読みとる。

（10）T_{A}、T_{B}、Ｔの値をもとに、物体Ｂの比熱を求める。

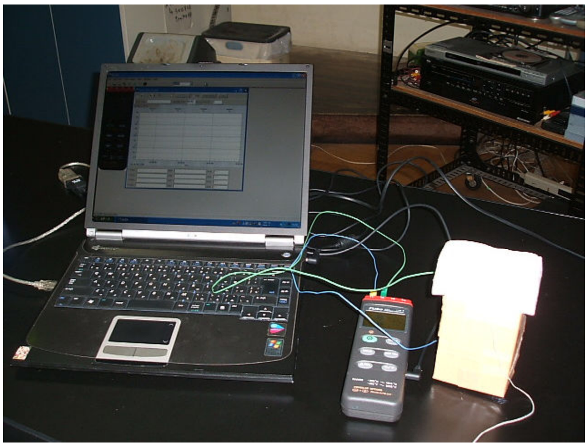
（11）（８）で得られた温度変化を表すグラフについて、任意の時刻における両物体の温度曲線の勾配の比と、両物体の比熱との関係を考察する。



【自作した断熱容器】



【熱電対を取り付けた物体A、B】



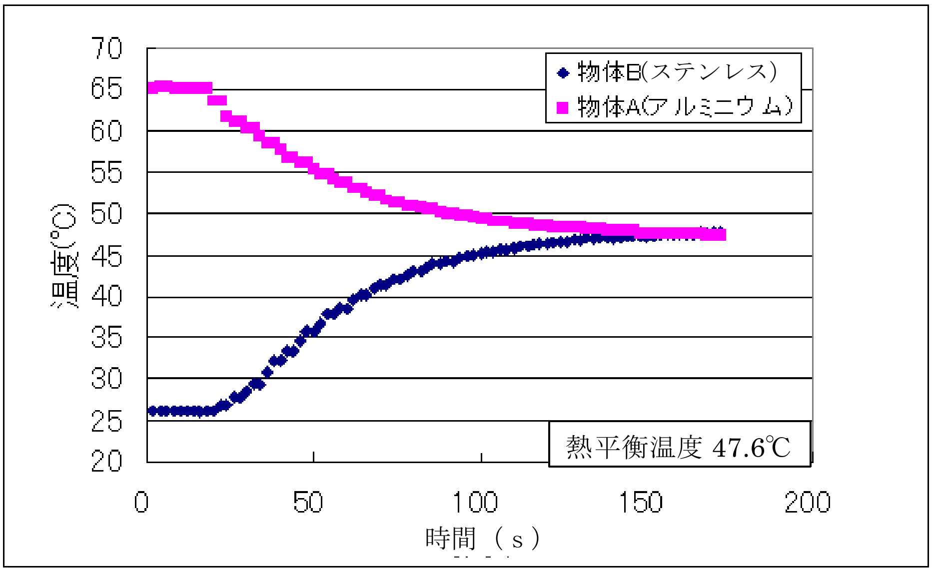
【温度データ取り込み中の様子】

4　実験結果

【 授 業 風 景 】

物体Ａとして、アルミニウム製の円柱を用い、物体Ｂとして、ステンレス(SUS304)製の円柱を用いたときの結果を示す。

	質　量	比　熱	接触前の温度
物体Ａ（アルミニウム）	99 g	0.90 J/(g･K)	65.0 ℃
物体Ｂ（ステンレス）	145 g	―	26.0 ℃



熱量の保存則より、物体Ｂの比熱を求める。物体Ａ、Ｂの質量をそれぞれm_A、m_Bとし、物体Ａ、Ｂの比熱をそれぞれ、c_A、c_Bとすると、熱量保存の法則より、

$$m_A \times c_A \times \Delta T_A = m_B \times c_B \times \Delta T_B$$

$$99 \times 0.90 \times (65 - 47.6) = 145 \times c_B \times (47.6 - 26)$$

$$c_B = 0.50 \text{ J/(g・K)}$$

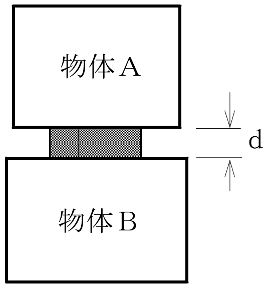
物体Ｂはステンレス（SUS304）で、文献によると比熱は 0.50J/(g･K)であるから、十分精度の高い実験結果が得られたものと考える。

5　理論的な温度曲線について

温度の異なる物体A、Bを接触させてから熱平衡に達するまでの、両物体の温度と時間の関係を理論的に、厳密に求めるのは難しい。そこで、次のようなモデルで現象を単純化し、温度曲線の概形を求めた。ある程度、実測値に近い結果が得られたので、学習の進んでいる生徒に対してグラフの概形を説明する際の参考にしていただきたい。

〔モデルについて〕

接触面は溶接してあるわけではないので、金属同士が完全に密着しておらず、顕微鏡レベルではある程度の隙間があるはずであるから、実質的な接触面積は物体A、Bの断面積より小さいと考えられ、物体A、Bの内部に比べて接触面付近の温度勾配は大きくなるであろう。そこで、物体A、Bの内部の温度勾配を無視する。また、接触面を厚さｄ、面積Ｓで、熱伝導率Ｋの板で表し、温度勾配はこの板の部分だけに存在するものとする。



〔計　算〕

時刻 t における物体A、Bの温度を T_A、T_B（$T_A > T_B$とする）とし、微小時間Δ t 経過後の時刻 $t+\Delta t$ におけるA、Bの温度を $T_A+\Delta T_A$、$T_B+\Delta T_B$とすると、この間に板を通して移動する熱ΔQは両物体の温度差（$T_A - T_B$）に比例し、

$$\triangle Q = \frac{KS}{d}(T_A - T_B)\triangle t \quad \cdots ①$$

と表される。また、物体A、Bの質量をm_A、m_B、比熱を c_A、c_Bとすると、熱量保存の法則より、

$$\triangle Q = -m_A c_A \triangle T_A = m_B c_B \triangle T_B \quad \cdots ②$$

が成り立つ。これらの式よりΔQを消去すると、

$$\frac{\triangle T_A - \triangle T_B}{\triangle t} = -\frac{m_A c_A + m_B c_B}{m_A m_B c_A c_B}\cdot\frac{KS}{d}(T_A - T_B)$$

という関係が得られる。ここで、x＝（$T_A - T_B$）とおくと、Δx＝（$\Delta T_A - \Delta T_B$）であり、これらを上式に代入すると、

$$\frac{\triangle x}{\triangle t} = -\frac{m_A c_A + m_B c_B}{m_A m_B c_A c_B}\cdot\frac{KS}{d}\cdot x$$

となり、

$$C = \frac{m_A c_A + m_B c_B}{m_A m_B c_A c_B}\cdot\frac{KS}{d} \quad \cdots ③$$

とおいて、Δ $t \to 0$ とすると、

$$\frac{dx}{dt} = -Cx$$

という変数分離形の微分方程式が得られ、Cは時間 t に依らないから、

$$\int\frac{dx}{x} = -C\int dt$$

と表せる。積分を実行して、

$$\log_e x = -Ct + C' \quad （C'\text{は定数}） \quad \therefore x = \alpha e^{-Ct} \quad （ただし、\alpha = e^{C'}）$$

両物体を接触させた瞬間を $t=0$とすると、

$t=0$ のとき、$T_A = 65.0$、$T_B = 26.0$　であるから、$x = (65.0 - 26.0) = 39.0$

これを上式に代入すると、$\alpha = 39.0$ となる。

また、$t = 50s$ のとき、$T_A = 52.2$℃、$T_B = 40.8$℃ であったため、

$$(52.2 - 40.8) = 39.0 \times e^{-C\times 50} = 39.0 \times (e^C)^{-50} \quad \therefore e^C = \left(\frac{11.4}{39.0}\right)^{-\frac{1}{50}} = 1.0249$$

両辺の対数をとって、

$$C = \log_e 1.0249 = 0.0246$$

これを、③式に代入し、さらに、

$$m_A = 99\ \text{g}、m_B = 145\ \text{g}、c_A = 0.90\ \text{J/(g·K)}、c_B = 0.50\ \text{J/(g·K)}$$

を代入すると、

$$0.0246 = \frac{99 \times 0.90 + 145 \times 0.50}{99 \times 145 \times 0.90 \times 0.50} \cdot \frac{KS}{d} \qquad \therefore \frac{KS}{d} = 0.9838$$

以上より、

$$T_A = -\frac{0.9838}{99 \times 0.90} \times 39 \times \int e^{-0.0246 \times t}\,dt = 17.5 \times e^{-0.0246 \times t} + C''$$

ここで、$t = 0$ のとき、$T_A = 65.0$ ℃ であるから、上式に代入して、

$$65.0 = 17.5 \times 1 + C'' \qquad \therefore C'' = 47.5$$

よって、

$$T_A = 17.5 \times e^{-0.0246 \times t} + 47.5 \quad \cdots ④$$

T_B についても同様に、

$$T_B = 0.5292 \times \int e^{-0.0246 \times t}\,dt = -21.5 \times e^{-0.0246 \times t} + C'''$$

$t = 0$ のとき、$T_B = 26.0$ ℃ であるから、上式に代入して、

$$26.0 = -21.5 \times 1 + C''' \qquad \therefore C''' = 47.5$$

よって、

$$T_B = -21.5 \times e^{-0.0246 \times t} + 47.5 \quad \cdots ⑤$$

以上のようにして得られた④、⑤式を用いて、時刻 t と物体Ａ、Ｂの温度の関係を求めた。計算結果と実験値と併せて、以下の表とグラフに示す。ただし、物体Ａ、Ｂが接触した時刻は、実験値から18 s と判断し、この時刻を $t=0$として理論値を計算した。

時刻〔s〕	18	38	58	78	98	118	138	158
T_A 理論値〔℃〕	65.0	58.2	54.0	51.5	49.9	49.0	48.4	48.1
T_A 実験値〔℃〕	65.1	58.6	53.7	51.1	49.6	48.7	48.0	47.7
T_B 理論値〔℃〕	26.0	34.4	39.5	42.6	44.5	45.7	46.4	46.8
T_B 実験値〔℃〕	26.0	32.1	38.6	42.5	44.9	46.4	47.1	47.4