高等学校における教科指導の充実

数　学　科

数学的な表現力を高める指導の工夫

栃木県総合教育センター

平成 21 年３月

目　　　次

※本資料は、栃木県総合教育センターのホームページ「とちぎ学びの杜」内、「調査研究」と「教材研究のひろば」のコーナーにも掲載しています。
「とちぎ学びの杜」 http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/

ま　え　が　き

　総合教育センターでは、平成17年度より、「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」に取り組んでいます。この調査研究の目的は、基礎・基本の確実な定着を図るための授業改善を目指して、教科指導の在り方について研究し、その成果を普及することにより、生徒の学力の向上に資することにあります。

　教育課程実施状況調査や学力に関する国際的な調査では、日本の児童生徒の学力の状況や学習に対する意識などが明らかにされ、文部科学省等からも学力向上のための様々な対策が打ち出されたり提言がなされたりしています。

　平成19年12月に公表された、2006年のＯＥＣＤ生徒の学習到達度調査（PISA）では、科学的リテラシーをはじめ、数学的リテラシー、読解力のそれぞれについて問題点が指摘されています。

　また、平成20年12月には、国際数学・理科教育動向調査の2007年調査（TIMSS2007）の結果が公表されました。この調査では、学力低下に歯止めがかかったという分析がある一方で、パターン化された指導の弊害とも見られる結果も一部に見られ、思考力の育成に課題があることも指摘されています。

　小学校と中学校の新学習指導要領が平成20年３月に公示されたのに続き、21年３月には、高等学校の新学習指導要領が公示される予定です。高等学校においては、数学と理科が24年度から、国語、地理歴史、公民、外国語が25年度から学年進行で実施されます。小・中学校、高等学校とも、今回の改訂の主な改善事項として、「言語活動の充実」、「理数教育の充実」が示されました。これらは、先に挙げた各種調査で、思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式の問題、知識・技能を活用する問題に課題が見られたことなどに対する改善策でもあります。

　本調査研究においては、今年度、国語科、公民科、数学科、理科、外国語科（英語）の各教科で、各種調査の結果から指摘されている課題と教育界の動向を踏まえ、その解決を図るための授業改善について取り組みました。研究の成果をまとめた本冊子を有効に御活用いただければ幸いです。

　最後に、調査研究を進めるにあたり、御協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

平成21年３月

栃木県総合教育センター所長
鈴　木　健　一

数学的な表現力を高める指導の工夫

はじめに

小･中学校における全国学力･学習状況調査、高等学校における教育課程実施状況調査、さらに、PISA、TIMSSなどの国際学力調査等の結果を受けて、平成20年１月に中央教育審議会において、「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」の答申が出された。答申では、算数・数学教育の課題、改善の基本方針が示され、それを踏まえて、平成20年３月に小学校、中学校の学習指導要領が告示された。今回の改訂では、小学校算数科、中学校数学科の目標に、「算数的活動、数学的活動を通して」、「表現する能力」という言葉が加えられた。これらは、中央教育審議会答申における算数・数学の改善の基本方針で示された「算数的活動・数学的活動を一層充実させる」こと及び「数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである」ことを受けて加えられたものである。特に、「表現すること」については、中学校学習指導要領解説数学編で次のように述べられている。

> 表現することは、事象を数理的に考察する過程で、推測したり見いだしたりした数や図形の性質などを的確に表したり、その妥当性などについて根拠を明らかにして筋道立てて説明したり、既習の数学を活用する手順を順序よく的確に説明したりする場面で必要になる。表現することにより、一層合理的、論理的に考えを進めることができるようになったり、より簡潔で、的確な表現に質的に高めることになったり、新たな事柄に気付いたりすることも可能になる。また、考えたり判断したりしたことを振り返って確かめることも容易になる。また、こうした経験を通して、表現のもつはたらきについて実感を伴って理解できるようにすることも大切である。
>
> また、表現することにより互いに自分の思いや考えを伝え合うことが可能となり、それらを共有したり質的に高めたりすることができる。表現することは知的なコミュニケーションを支え、また、知的なコミュニケーションを通して表現の質が高められ、相互にかかわりあいながら学習を充実させることにつながることに留意する必要がある。

このように、紙の上での表現力だけではなく、コミュニケーションの１つのツールとして表現する能力を高めることが求められている。そこで、本研究では、算数・数学の改善の基本方針を参考に、「数学的な表現力を高める指導の工夫」をテーマとして、生徒の実態把握と３つの事例の作成に取り組んだ。

生徒の実態把握では、数学的な表現力の定義を改めて示すとともに、その定義に従って、質問紙による調査を実施した。また、事例の作成においては、研究協力委員による授業をビデオで撮影したものから、教師と生徒のやりとりを文字に起こすことで、指導の工夫のポイントが明確になるように心がけた。

ここで示す各事例における授業のねらい、教材、授業展開等は、実践者である研究協力委員の学校の実態に合わせて設定したものである。また、ここで挙げる事例は、２、３時間の扱いとして作成したが、現実には、生徒の思考力・表現力をその時間の中だけで育成することは難しく、さらに、継続して指導する必要がある。各事例の中から、それぞれの指導の趣旨を読み取り、各学校で活用していただきたい。

各事例の内容は、次のとおりである。

事例１　**様々な考え方のよさを味わう　～場合の数の指導の工夫～**

数学Ⅰ「場合の数」の単元の最後に、様々な考え方で解決することが可能な問題に取り組ませるとともに、その考え方を表現する場面を設定した。生徒の実態を踏まえて問題を２題設定し、それぞれの解法を生徒自身の言葉で発表させることで、それぞれの解法のよさを味わうとともに、説明の仕方、話し方についても吟味し、生徒に表現することの意味を実感させることにした。また、他の解法と比較することで、それぞれの解法の特徴を把握することができるようにした。

事例２　**具体物による操作的表現とコミュニケーション活動　～漸化式の指導の工夫～**

漸化式の学習は解法のパターンを覚えるものだと思っている生徒が多い。そのため、漸化式が表現していることが理解できなかったり、具体的な事象から漸化式を導き、その事象の特徴を把握することが苦手であったりする。そこで、パズル教材（具体物）を用いて事象を具体的に考察したり、事象の構造を把握するための手立てを考察したりすることで、漸化式という抽象的な概念の理解を促すことにした。また、コミュニケーション活動を取り入れ、自他の考えを比較、吟味させることで、数学的な思考力や自己有用感を高められるようにした。

事例３　**単元の枠を越えた多様な解法への挑戦　～数学Ⅱ、数学Ｂにおける指導の工夫～**

数学Ⅱ「図形と方程式」「三角関数」、数学Ｂ「ベクトル」の学習後に、それぞれの知識を活用することができる問題に取り組ませ、その解法について議論させた。それぞれの単元の学習では、生徒は基本的な知識については理解したが、その知識を活用できるまでには至っていない。そこで、生徒に提示する問題を工夫し、その解法をグループやクラス全体で討議することにより、数学的な表現力の育成を図った。

＜研究協力委員＞

栃木県立宇都宮北高等学校	教　諭	山　木　厚　志
栃木県立石橋高等学校	教　諭	小　林　淳　人
栃木県立矢板東高等学校	教　諭	木　村　真理恵

＜研究委員＞

栃木県総合教育センター研修部	副主幹	植　木　　　淳
栃木県総合教育センター研究調査部	指導主事	吉　川　孝　昭

数学的な表現力について

1　数学的な表現力のとらえ方

これまで、高等学校数学科においては、考える力の育成が重要であるとして数学的な考え方の育成に力を注いできた。中央教育審議会答申では、小学校算数科、中学校・高等学校数学科の改善の基本方針で、「数学的な思考力・表現力を育てる」ことが述べられている。ここで大切なことは、数学的な思考力と表現力がセットで扱われていることである。表現しながら思考し、思考した結果を表現する。これが繰り返し行われることで、生徒の数学的な思考力・表現力は高まり、数学の力が身に付いていくと考えられる。そこで、本研究では、表現する場面だけを重視するのではなく、表現されたものを自分なりに解釈したり、身に付いている知識を活用して再構築したりする場面を適切に設定することで、数学的な表現力の育成を図っていくこととした。

数学的な表現力については、広島大学の中原忠男氏（現在は環太平洋大学教授）が、数学教育における表現様式として、次の５つに分類している。

＜現実的表現＞　実世界の状況、実物による表現。
＜操作的表現＞　教具などの操作による表現。人為的加工、モデル化が行われている具体物、教具などに動的操作を施すことによる表現。
＜図 的 表 現＞　絵、図、グラフなどによる表現。
＜言語的表現＞　日本では日本語、米国・英国などでは英語など各国の日常言語を用いた表現、またはその省略的表現。
＜記号的表現＞　数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現。

この中で、高等学校数学科においては、特に、「図的表現」、「言語的表現」、「記号的表現」を中心に授業が進められている。また、単元の導入では、「操作的表現」も重要な役割を担うことがある。そこで、本研究においては、この４つの表現様式について取り上げる。また、それぞれの表現様式には、下表のように、「表現力」とそれを支えたり高めたりする「表現力に関わる力」が考えられる。それぞれの力が相互に作用し合いながら、数学的な表現力を高めていくことになる。

◎表現様式と能力

表　現　様　式	表現力	表現力に関わる力
＜操作的表現＞ 教具などの操作による表現。	操作する能力	操作する意味を理解する能力
＜図 的 表 現＞ 表、グラフ、図などによる表現。	表・グラフ・図などに表す能力 表・グラフ・図などを活用する能力	表・グラフ・図などに表されたことを理解する能力
＜言語的表現＞ 日本語を用いた表現、またはその省略的表現。	音声言語で表す能力 文字言語で表す能力	音声言語や文字言語で表されたことを理解する能力
＜記号的表現＞ 数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現。	式に表す能力 式を活用する能力	式に表されたことを理解する能力

表現様式については、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現の順で抽象度が高くなる。したがって、表現様式を抽象度の高い表現に変換する際には、曖昧に解釈されないように注意を促すことが必要である。また、説明が難しい場合には、抽象度の低い表現に変換することも有効であることを生徒に実感させる必要がある。

2　生徒の表現力の実態

生徒の表現力の実態を把握するために、数学の解法に関する質問及び問題からなる質問紙による調査を実施した。対象は、研究協力委員の学校の第１学年、第３学年の生徒とした。「記号的表現」を「記号的表現」と「言語的表現」に、「図形的表現」を「記号的表現」と「言語的表現」に変換させることで、表現力の実態の把握に努めた。それぞれの問題では、生徒の表現力の実態だけではなく、問題の構造の把握や数学的な内容の理解の程度も把握することができる。また、解答欄に表現されたものだけではなく、欄外に示された図や計算の過程等も確認し、思考の状況の把握にも努めた。

(１)調査の実施について

①対象・実施時期等

対　　象：研究協力委員の学校の第１学年 140 名、第３学年 70 名の生徒
第３学年の生徒については、進学希望者

実施時期：平成 20 年６月～10 月
第１学年の生徒については、数学Ⅰ「図形と計量（三角比)」、数学Ａ「場合の数と確率」を学習した後

時　　間：おおむね 20 分程度

②出題のねらい

数学の問題を通して、生徒の表現力の実態を把握する。

◎各問題の出題のねらい

$\boxed{1}$　2007 年度大学入試センター試験の確率の問題の一部を使用し、（１）では、場合の数の問題の構造の把握方法を選択肢を用いて確認する。（２）では、解答を示し、その解答が正しいことを説明させることで、記号だけで表現された情報（記号的表現）を、記号（記号的表現）や言語（言語的表現）を適切に用いて、他者に分かりやすく説明できるかどうかを確認する。

$\boxed{2}$　円に内接する四角形の求積問題について、図形で表現された情報（図形的表現）を、記号（記号的表現）と言語（言語的表現）を用いて、分かりやすく条件設定をしたり、問題設定をしたりすることができるかどうかを確認する。

$\boxed{3}$　総合教育センター主催の平成 19 年度土曜開放講座（中学校・高等学校数学科）において、筑波大学の礒田先生が講座の中で受講者に出題したものである。表面的には、容易な表現を用いて示されているが、奥に隠された数学的な内容を他者に分かりやすく説明できるかどうかを確認する。

(２)問題の正答率と生徒の状況

①記号的表現→言語的表現、記号的表現

1　次の問題を読んで下の問いに答えなさい。

１辺の長さ１の正六角形があり、その頂点の一つをＡとする。一つのさいころを３回投げ、点Ｐを次の（ａ)、(ｂ)、(ｃ）にしたがって、この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

（ａ）頂点Ａから出発して、１回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める。

（ｂ）１回目で点Ｐがとまった位置から出発して、２回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める。

（ｃ）２回目で点Ｐがとまった位置から出発して、３回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める。

このとき、３回進めたとき、点Ｐが正六角形の辺上を１周して、ちょうど頂点Ａに到達する目の出方は何通りあるか。　(2007 年度大学入試センター試験から)

（１）上の問題を読んで解答しようとするとき、あなたはまずどうしますか。あてはまるものの記号に〇をつけなさい。

ア　場合の数を求めるので、順列、組合せ、積の法則等のうちどれを使うか考える。

イ　頂点Ａに到達するような場合の樹形図を書いてみる。

ウ　問題に示された条件を図や絵で表してみる。

（２）Ａ君は、「３回進めたとき、１周して、ちょうど頂点Ａに到達する目の出方の場合の数」を次のように求めた。

$$3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}=6+3+1=10$$

したがって、10 通り

Ａ君が考えた式「$3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}$」が成り立つことを説明しなさい。

◎生徒の解答状況

設問	（１）			（２）			
	ア	**イ**	**ウ**	説明できた	説明が不十分	説明できない	無答
第１学年	7.1	5.7	87.1	32.9	4.3	40.7	22.1
第３学年	2.9	4.3	92.9	58.6	4.3	22.9	14.3

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

問題は、2007 年度大学入試センター試験の数学ＩＡで出題されたものである。

（１）では、この問題の構造を把握する方法について確認した。解答からも分かるとおり、ほとんどの生徒が、**ウ**の「問題に示された条件を図や絵で表してみる。」と解答している。この問題の場合は、問題がやや長めの文章で示されており、図が描かれていないことから、**ウ**を選択した生徒が多かったと思われる。当初は、図や絵を描いて問題を把握することよりも、「順列なのか、組合せなのか」を考える生徒が多いのではないかと予想していたが、いい意味で予想が裏切られた。この結果を受けて、生徒の解答用紙を調べ、用紙に図が描いてある生徒数を確認したところ、次のようになった。

◎図を描いて問題を把握している生徒の割合

設問	**ア**		**イ**		**ウ**		**合計**	
	図あり	図なし	図あり	図なし	図あり	図なし	図あり	図なし
第１学年	0.7	6.4	2.1	3.6	54.3	32.9	57.1	42.9
第３学年	0.0	2.9	2.9	1.4	78.6	14.3	81.4	18.6

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

この結果を見ると、**ア**と解答した生徒の多くは図を描かない。**イ**と解答した生徒の中には、樹形図を書くと同時に、問題の把握のために図を描いている者がいることが分かる。**ウ**と解答した生徒の中には、「問題に示された条件を図や絵で表してみる。」と解答しているにもかかわらず、図を描いていない生徒がいることが分かる。問題に取り組む意識と実際の取組に若干の乖離が見られる。

また、**ア**、**イ**、**ウ**の解答状況は、第１学年と第３学年とではほぼ同程度の割合であるが、実際に図を描いた生徒の割合を比較すると、第３学年の方が約1.5倍になっていた。これは、調査対象とした３校における指導の成果と考えられる。問題の状況を把握するために図を描くことが定着してきていると考えられる。

（２）では、表現された式を言語的表現や記号的表現を用いて説明できるかどうかを確認した。確率が既習事項の生徒ではあるが、説明できた生徒の割合は、第１学年で32.9%、第３学年で56.8%と、大きな違いがある。また、無答率も第１学年が第３学年を大きく上回る。説明できない生徒の記述内容を見ても、第１学年では、何を述べていいのか分からずに、戸惑っている様子が見て取れる解答が多かった。以下に、説明できた解答の中から、第３学年と第１学年の生徒の主なものを示す。

◎第３学年の生徒の解答

解答Ａ

3回進めたとき、1周して、ちょうど頂点Aに到達する目の出方は

(i) 1, 2, 3 の 3つの数字の出る出方 → 3!

(ii) 1, 4 の 1が2つ, 4が1つ出る出方

→ $\frac{3!}{2!}$ ← 3つの数字の並べ方 ← 1が2つなのでだぶるからそれをなくすために2!である。

(iii) 2が3つ出る出方

→ $\frac{3!}{3!}$ ← 2が3つなのでだぶってしまうからそれをなくすために3!である。

この(i)(ii)(iii)は同時には起こらないので和の法則をつかって

$3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3}{3!} = 6+3+1 = 10$ よってこの式は成り立つ。

解答Ｂ

$3! = 6$, $\frac{3!}{2!} = 3$, $\frac{3!}{3!} = 1$

1と2と3を1回ずつ使う場合が6回

1と1と4を使う場合が3回

2を3回使う場合が1回

1周してAにつくためには、3回投げた合計が$\boxed{6}$になればよい。

◎第１学年の生徒の解答

解答Ｃ

1が1回、2が1回、3が1回 の出方が 3!通り

1が2回、4が1回 の出方が 3!通りあるうち、1の区別をなくすと、$\frac{3!}{2!}$通り

2が3回 の出方は 3!通りあるうち区別をなくすと $\frac{3!}{3!}$通り

すべてを足すから $3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!}$

解答Ｄ

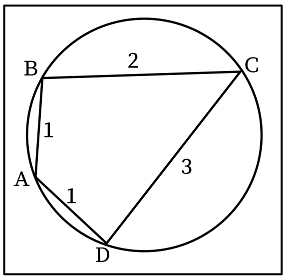
まず、3!とは、1回目、2回目、3回目が全て異なった数字の時のことで、
1回目も（1,2,3）のどれか、2回目も（1,2,3）のどれか、3回目も（1,2,3）のどれかなので、
1～3回目は3つの出方があることがわかる。よって3!。
$\frac{3!}{2!}$とは、上の問題でいう（1,1,4）（1,4,1）（4,1,1）のことである。
1回目・2回目・3回目の中で必ず2つは同じ数字がでてくるので区別をつけるため2!で
割っている。
$\frac{3!}{3!}$とは、全て同じ数字の時である。3回とも同じ数字なので区別がつかなくなってしまう。
しかし、5の問題では、1回目・2回目・3回目と順番があるので区別をつけなくてはならない
そのため3!で割っている。最後に、この3つの事柄は同じ時に起りえないので
足していることがわかる。

第３学年で説明できた生徒の解答は、解答Ａのように、言語的表現と記号的表現をうまく組み合わせて、構造的に記述することで、相手に見やすく、分かりやすく説明しているものが多い。しかし、中には、解答Ｂのように、表現力が身に付いておらず、言語的表現が少なく、また、構造的に表現していないので、記号的表現の羅列になってしまうものがいくつかあった。

第１学年で説明できた生徒の解答は、解答Ｃのような記述が多い。言語的表現と記号的表現を組み合わせて表現しているものの、構造的な表現にまでは至っていない。特に、解答Ｄのように、言語的表現の羅列なってしまい、一目では分かりにくく、相手が理解できるようになるまでには時間がかかる表現がいくつかあった。いずれにしても、相手に分かりやすく書けるようになるまでにはトレーニングが必要であり、言語的表現と記号的表現を適切に使いながら、番号を振ったり改行したりするなど、表現するポイントの指導が必要であることが分かる。

②図形的表現→言語的表現、記号的表現

$\boxed{2}$　右の図の四角形ＡＢＣＤの面積を求める問題の文章を作りなさい。ただし、問題には図を利用せず、すべて文章（式を含む）だけで表現しなさい。また、問題は、最初に状況の設定を述べ、次に小問に分け（(1)、(2)、…など）、最後の小問は「四角形ＡＢＣＤの面積を求めよ」にしなさい。



典型的な問題である「円に内接する四角形の求積問題」を取り上げ、図から問題の文章と小問を設定させた。図に示されている情報を正しく読み取り、それを言語的表現に変換することができるかどうかを確認する。また、どのようなステップで四角形の面積を求めるのかをイメージしながら小問を設定できるかどうかを確認する。

◎生徒の解答状況（問題作成の状況）

問題作成の状況	問題として適した文章を作成できた	問題として不備があり問題が成立しない	無答
第１学年	52.9	39.3	7.8
第３学年	82.9	15.7	1.4

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

問題として適した文章を作成できた生徒の割合は、第３学年が第１学年を上回った。問題として適した文章を作成できた生徒の中でも、第３学年と第１学年では、ややその表現が異なっていた。第３学年の生徒のほとんどは、「円に内接する四角形」、「ＡＢ＝ＡＤ＝１、ＢＣ＝２、ＣＤ＝３」

という２つの条件を組み合わせて表現していた。しかし、第１学年では、正しく表現できた生徒（全体の 52.9%）のうち、約 25%が「円に内接する四角形」という条件を使わずに表現していた。第３学年の生徒は問題に慣れているため、同じように表現する者が多いが、第１学年の生徒はまだ問題に慣れていないためか、様々な表現があった。逆に言うと、第１学年の解答は生徒の自然な発想が読み取れる点で評価できる。考え方や表現方法を無理に限定せず、自由な発想も大切にしたい。

一方、問題の表現として不備があって問題が成立しない解答であった生徒の中では、円に内接していることに触れていない生徒、内接と外接を逆に表現している生徒が第１学年で全体の約 15%いた。問題を適切に表現できることは、問題の把握にもつながるので、十分に留意し、指導していかなければならない。

◎生徒の解答状況（小問の設定の状況）

小問の設定の状況	三角比の値・角の大きさだけ	辺の長さだけ	三角比の値・角の大きさと辺の長さの両方	その他	設問なし
第１学年	12.1	21.4	15.0	18.6	32.9
第３学年	8.6	8.6	42.9	17.1	22.9

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

四角形の面積を求めるために、四角形を２つの三角形に分割することについては、小問を設定した生徒のほとんどが理解し、表現していた。分割の仕方を見ると、△ＡＢＣと△ＡＤＣに分割している生徒と、△ＡＢＤと△ＣＢＤに分割している生徒の割合は、第３学年でも第１学年でもほぼ２：１であった。しかし、第１学年では、△ＡＢＣと△ＡＤＣに分割しておきながら、小問の中でＢＣの長さを求めさせる小問を設定している解答がいくつかあった。小問を設定する意図を考えることは、自らが問題を解く際の道筋を見通すために大切なことである。したがって、数学的な内容の理解を深めさせるためにも、授業の中で、問題を解かせることだけではなく、時には問題作りに取り組ませ、表現させることが大切となる。

小問の内容でも、第１学年と第３学年とでは異なる結果となった。第３学年では、三角比の値・角の大きさと辺の長さの両方を求めさせてから四角形の面積を求めさせる問題につなげている生徒が全体の 42.9%であったが、第１学年では 15%に止まった。解答の道筋をイメージできる生徒は、余弦定理の式を連立させて辺の長さを求め、そこから、三角比の値、角の大きさを準備することが、面積を求めるために有効であることに気付いている。しかし、第１学年では、イメージできる生徒が少なく、どちらか一方だけになってしまったのではないかと思われる。

以下に、第３学年、第１学年の生徒の解答の中で、三角比の値・角の大きさと辺の長さの両方を設定したもの、辺の長さだけを設定したもの、さらに、ユニークなものをそれぞれ示す。

◎第１学年の生徒の解答

・問題文を適切に設定した解答。△ＡＢＤと△ＣＢＤに分割して小問を設定している。

（問題）円に内接する四角形ABCDがある。
AB=1、BC=2、CD=3、DA=1のとき次の問いに答えよ。
(1) BDの長さを求めよ。
(2) ∠BADを求めよ。
(3) △BADの面積を求めよ。
(4) 四角形ＡＢＣＤの面積を求めよ

・「内接する」という表現を用いずに、「円の中に」という表現を用いた解答。第１学年の解答では、問題として適した文章であったにもかかわらず「円の中に」という表現を用いていたものが多かった。また、この解答では、２つの三角形の面積をそれぞれ求めさせる小問を設定している。

> (問題) ある円の中に 四角形ABCDを つくる。
> AB=1, BC=2, CD=3, DA=1とするとき,
> (1) △ABCを求めよ
> (2) △ADCを求めよ.
> (3) 四角形ＡＢＣＤの面積を求めよ

・「円周上に４つの点がある」と設定した解答。

> (問題) 1つの円の円周上にA、B、C、Dの4つの点が順番に反時計回りに並んでいて、それを結んだ四角形ABCDがある。長さは、AB、ADが共に1、BCが2、CDが3である。

◎第３学年の生徒の解答

・問題文を適切に設定した解答。△ＡＢＣと△ＡＤＣに分割して小問を設定している。第３学年では、この解答のような表現方法が最も多かった。

> (問題)
> 円に内接する四角形ABCDがある。各辺の長さはAB=AD=1, BC=2, CD=3である.
> (1) ACの長さを求めよ.
> (2) cos∠ABCの値を求めよ
> (3) 四角形ABCDの面積を求めよ.

・問題文を適切に設定しているが、小問で２つの三角形の求積問題を設定している解答。

> (問題) 円に内接する四角形ABCDがある。このとき、AB=DA=1, BC=2, CD=3である
> (1) △ABCの面積を求めよ
> (2) △ADCの面積を求めよ
> (3) 四角形ABCDの面積を求めよ

・問題文を適切に設定した解答ではあるが、小問では、辺の長さ、外接円の半径、内接円の半径等考えられるものをいろいろと取り上げている。問題としての是非は別として、発想としてはユニークである。教師にはなかなか作れないが、生徒ならではの小問でもある。

> 四角形ABCDは円に内接しており
> AB=AD=1, BC=2, CD=3を満たしている。
> 次の問に答えよ。
> (1) BDの長さを求めよ。
> (2) 四角形ABCDの外接円の半径を求めよ。
> (3) 四角形ABCDの内接円の半径を求めよ。
> (4) ACの長さを求めよ
> (8) 四角形ABCDの面積を求めよ
> (5) 直線CBと直線DAの交点をPとするとき PBとPAの長さを求めよ。
> (6) 直線BAと直線CDの交点をQとするとき AQとDQの長さを求めよ。
> (7) △ABPの面積を求めよ。

③言語的表現、記号的表現による説明

$\boxed{3}$ $\sqrt{72.3}$ は８に近いか９に近いか、根拠を明らかにして説明しなさい。

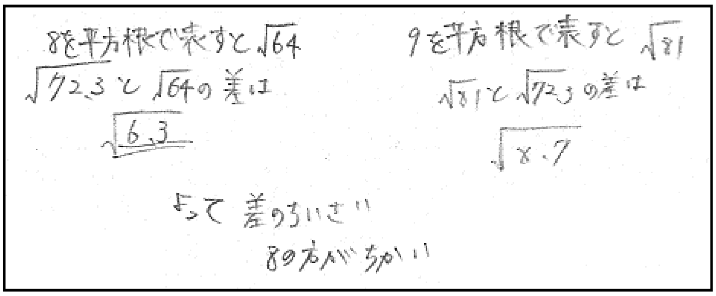
容易な言語、記号を用いて表現された問題であるが、奥に隠された数学的な内容を読み取り、それを他者に分かりやすく表現できるかを確認した。

◎生徒の状況

	８に近い			９に近い
	それぞれを平方し比較	$\sqrt{72}$ を計算し、その結果を活用	その他	8.5の２乗を計算し、その結果を活用
第１学年	76.4	3.6	17.9	2.1
第３学年	68.6	2.8	22.9	5.7

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

結果から明らかに分かるように、第１学年、第３学年ともに多くの生徒が「８に近い」と答えている。その理由としては「それぞれの数を平方し差を取ると 72.3 は 8^2に近い。したがって、８に近い。」としているものがほとんどであった。無理数の大小関係を考える際に、平方して比較することは、有効な手段の１つであり、それについてはよく理解されている。しかし、今回の問題については、それだけでは解決することができない。また、その説明として、数字を並べただけのもの、数直線を示しながら説明したもの、言語的表現を用いて説明したものなど、様々な解答があった。特に、それぞれを平方し比較しているが、例えば、$\sqrt{72.3}$ と８を比較するときに、次のような解答がいくつかあった点が気になった。

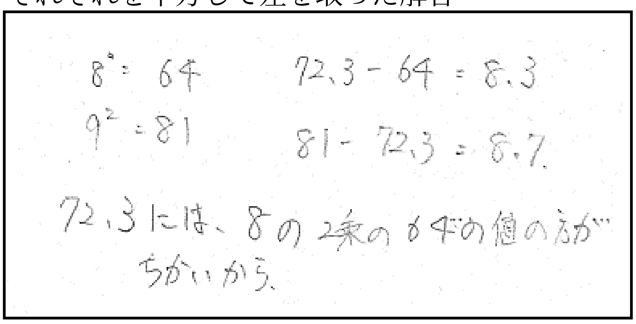


$\sqrt{5}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$ といった計算をしない生徒であっても、このような問題が出題されると、思わず引き算をしまうことがある。確かな知識を定着させた上で、表現できるようにさせることが大切である。

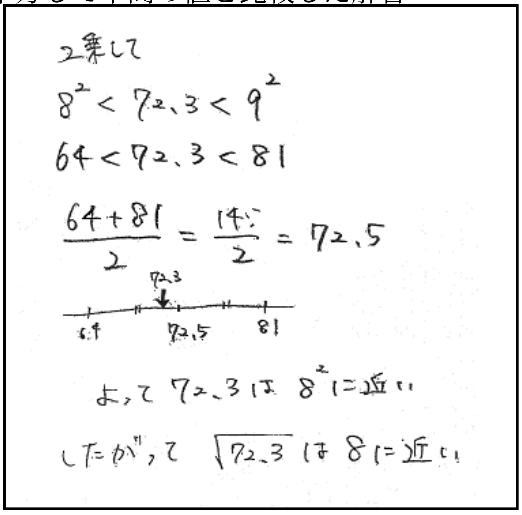
以下に、それぞれ平方して比較することで８に近いと解答した生徒のもの、９に近いと正しく解答できた生徒のものを示す。

◎主な誤答例

・それぞれを平方して差を取った解答

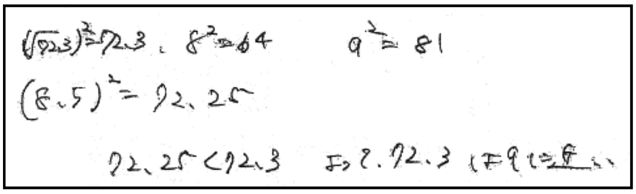


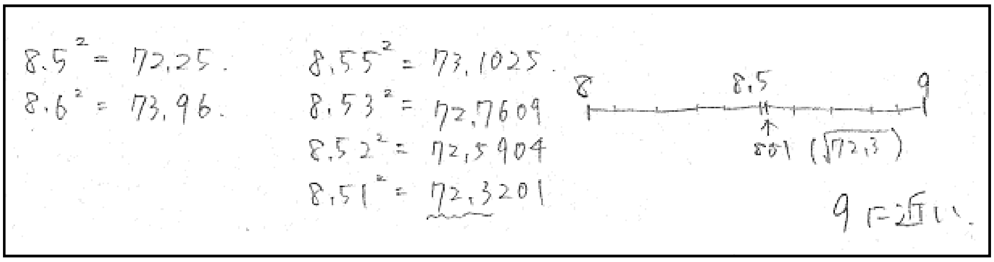
・平方して中間の値と比較した解答



◎主な正答例

・8.5 の２乗を計算し、その結果を活用





(３)生徒の表現力の実態と指導の工夫について

質問紙による調査から、次の３つの課題が明らかになった。

・数学的記号や言語を用いて構造的に表現する能力
・図や式から適切に情報を読み取る能力
・基礎的な知識や数学の用語を正しく理解し、それを用いて表現する能力

１つめの「数学的記号や言語を用いて構造的に表現する能力」は、相手に分かりやすく伝えるためには、不可欠な要素である。生徒の解答を見ると、文章の羅列や、式の羅列が多い。読みやすく、分かりやすい表現にするためには、内容を理解し最終的な結論を見通して表現することが大切である。それだけではなく、番号をつけたり、段落に分けたりするなど、分かりやすくするためのスキルを身に付けていく必要もある。これらは、あらゆる場面で指導していかなければならないことである。また、相手の理解を得るためには、記号的表現だけではなく、言語的表現や図的表現を用いるなど、具体的な表現様式を用いることが有効であることを、指導を通して実感させる必要がある。

２つめの「図や式から適切に情報を読み取る能力」は、数学の問題を解決するためには必要な能力である。図や式などの意図を読み取り、問題の解決に必要な情報とそうでない情報とに分けることができるようになれば、自ら図を描くことや式を立てることに大いに役立つことになる。ただし、画一的な見方を教え込むことは好ましくない。例えば、今回の調査では、$\boxed{2}$の問題で、第３学年の生徒の方がより正しく表現することができたが、第１学年の生徒の方が表現が多様であり、アイデ

ィアに富んだものが多かった。自由な発想を生かしながら、その中で、必要な情報を読み取ることができるようにさせていくことが大切である。

この調査で顕著だったことは、３つめの「基礎的な知識や数学の用語を正しく理解し、それを用いて表現する能力」が身に付いていないことである。例えば、$\boxed{2}$の問題において「円に内接する四角形」と表現すべきところを「円の中にある四角形」と表現したり、$\boxed{3}$の問題において平方根の減法について $\sqrt{72.3}-\sqrt{64}=\sqrt{8.3}$ と表現したりする解答があった。これらは、基礎的な知識や数学の用語を正しく理解していないことから起こるものであり、これらを不適切な表現と思える感性を身に付けさせていかなければならない。

数学的な表現力の育成を重視した授業を展開するには、授業の中で、生徒が自分自身の考え方を形にすること、自分自身の考え方を他者に分かりやすく伝えること、他者が表現したことを見たり聴いたりすることを随所に盛り込んでいくことが大切となる。これらの活動を繰り返すことによって、数学的な表現力の高まりが一層期待できる。また、これらの活動をより有効に行うためには、多様な考え方ができる問題の設定が不可欠である。様々な考え方に触れる場面で、上述した３つの課題について留意するとともに、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現の変換を意図的に行わせる必要がある。これらの方針のもとに、事例の作成に取り組んだ。

事例１　様々な考え方のよさを味わう　～場合の数の指導の工夫～

１　事例の概要

(１)指導の改善

全国学力・学習状況調査や国際学力調査等で指摘されている算数・数学教育の課題に、「事柄や場面を数学的に解釈すること」、「自分の考えを数学的に表現すること」がある。日頃の生徒の学習の様子を見ていると、問題を解決する際の最大の関心事は、どの公式を使うのか、どの定理を使うのかということであり、様々な考え方で問題を解決しようとしたり、自分の考えに沿って議論を進めたりしようとする姿勢があまりうかがえない。そこで、授業の中で意図的に解法の違いを考える場面や考えたことを表現する場面を設定することで、課題の解決に取り組むことにした。

数学Ⅰの指導において、様々な考え方で問題に取り組み、その考え方を表現する場面を設定するのは、場合の数、確率の単元が有効である。問題の状況を把握する場面では、「事柄や場面を数学的に解釈すること」になる。問題を解決する場面では、樹形図を書いたり、和の法則・積の法則を使ったり、順列･組合せの考えを使ったりするなど様々な解法で問題に取り組ませることができる。そして、自分の考えを発表したり、友人の発表を聞いたりすることによって、「自分の考えを数学的に表現すること」の意義を実感させることができる。

ここでは、場合の数の学習後に、演習の時間を設定し、様々な解法を生徒自身の言葉や表現方法で発表させ、その後、それぞれの解法のよさについて意見交換を行うことにした。

(２)問題の工夫

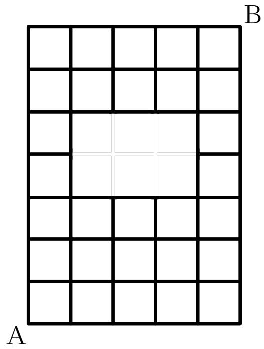
場合の数の学習では、基礎的・基本的な知識の定着は図られていても、順列と組合せの違いについての理解や重複順列の理解が十分でない生徒もいる。そこで、問題の設定が把握しやすいこと、樹形図等を使って数え上げることが可能であること、何通りかの解法が可能であることの３点に留意し、次の問題１、問題２に取り組ませることにした。

（問題１）

ａが２個、ｂが２個、ｃが２個の合計６個の文字がある。同じ文字が隣り合わないように１列に並べた順列の総数を求めなさい。

（問題２）

右の図のような道のある町がある。A地点からB地点まで行くときの最短経路は何通りあるか。



問題１、問題２ともに、同じものを含む場合の順列からの出題である。問題１については、教科書では「並べる方法は何通りあるか」と表現されていたものを、「順列の総数を求めなさい」という言葉を用いて表現した。同じものを含む場合の順列、文字が隣り合わないように並ぶことは既習事項であるので、問題の状況を把握することは容易である。また、この２つの学習内容を組み合わせることで、何通りかの解法が可能となる。

問題２については、いわゆる「最短経路の問題」は既習事項であり、途中の点を通る場合、通ら

ない場合について考察した。本問題の場合は、「道がない」ということの解釈の仕方によって、直接通る道の場合の数を求めたり、余事象を使って場合の数を求めたりすることができる。

問題１、問題２ともに、順列、組合せの考えを使ったり、余事象の考えを使ったり、樹形図を使って数え上げたりするなど、考え方が多岐にわたることが予想される。それぞれの解法を理解させ、基本的内容の理解のさらなる定着を目指すとともに、それぞれの解法のよさ、様々な考え方で問題を解決することのよさを実感させたい。

２　指導の実践

(１)授業のねらいと展開の工夫

授業は、2.5 時間で実施した。１時間目の授業の最後に 30 分間の時間を設け、問題１、問題２に取り組ませた。その後、問題１で１時間、問題２で１時間の時間をかけて発表と解法の検討を行った。授業のねらい、展開の工夫については下のとおりである。

①授業のねらい

〇１時間目

・問題解決の場面で、様々な考え方で取り組むことができる。

〇２、３時間目

・分かりやすく他者に説明することができる。

・それぞれの解法のよさを味わうとともに、様々な考え方で問題を解決することのよさを理解する。

②展開の工夫

１時間目は、ワークシートを配付して問題に取り組ませた。問題１、問題２ともに、問題の把握、解決への道筋を丁寧に考えることができるように、十分な時間を取った。また、問題が解決できた生徒には、何通りかの解法で解決するように指示した。１時間目の終わりにワークシートを回収し、生徒の解答の状況を把握した。得られたデータは、２時間目、３時間目の発表の時に活用した。

２時間目、３時間目には、それぞれの解法毎に生徒を指名して、解答を板書させ、その考え方を発表させた。発表する能力はまだ十分には身に付いていないが、聞き手が理解できるためには何を、どのように伝えればよいのかを考えて発表するように促した。発表、質疑の後に、支持する解法とその根拠等を話し合うことで、それぞれの解法のよさをクラス全体で共有した。

(２)生徒の解答の状況

①問題１について

（問題１）
ａが２個、ｂが２個、ｃが２個の合計６個の文字がある。同じ文字が隣り合わないように１列に並べた順列の総数を求めなさい。

解答状況を確認すると次の表のようになった。複数の解決方法を考えた生徒はいなかった。

解　　法		正　答	誤　答	合　計
余事象の考え方による解法		10 名	20 名	30 名
	重複を考えた解法	４名	13 名	17 名
	重複を考えない解法	６名	７名	13 名
数え上げによる解法		６名		６名
順列の考え方による解法		１名	１名	２名
場合分けによる解法		２名	２名	４名
無　答			２名	２名
合　計		18 名	26 名	44 名

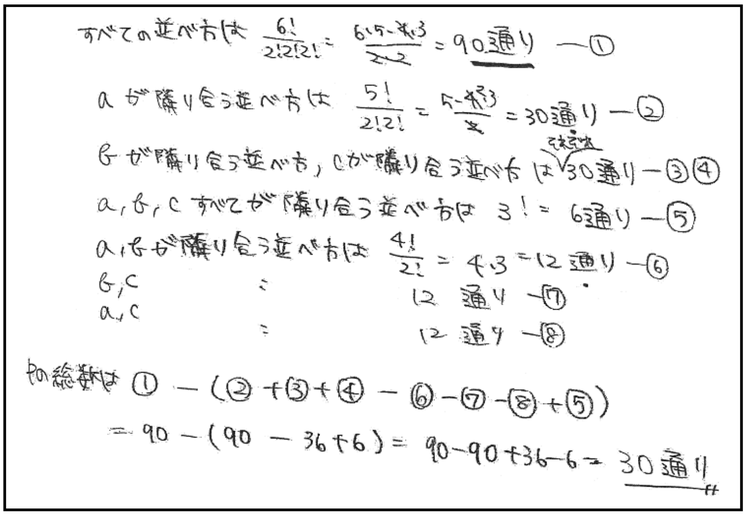
解答からは、自らの考えを何とか表現しようと懸命に取り組んだ様子がうかがえる。解答の中には、相手を意識した表現になっている解答、樹形図だけを書いた解答、式を羅列しただけの解答と様々であった。

それぞれの解法とその傾向は以下のとおりである。

〇生徒の解法と傾向

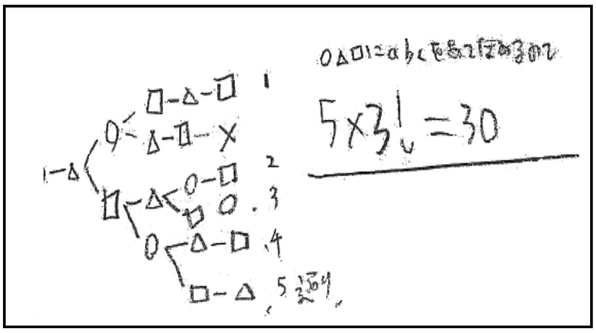
・余事象の考え方による解法

余事象の考え方による解法を試みた生徒は 30 名（68.2%）と一番多かった。誤答であった生徒の多くは、隣り合う全ての場合をもれなく選び出すことができなかった。



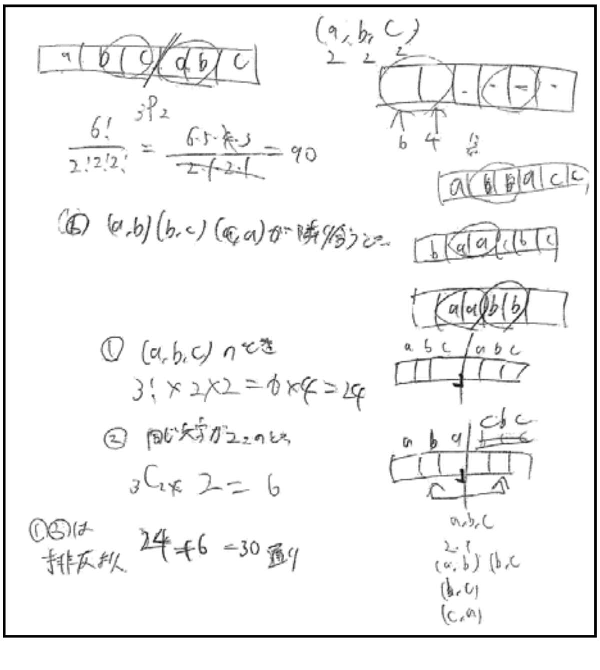
・数え上げによる解法

樹形図を描き、数え上げた解答である。この解法を選択した生徒は６名（13.4%）と少なかった。多くの生徒は、樹形図だけで解決することをあまり数学的ではないと感じているらしい。また、この解法には誤答はなかった。本問題の場合は、全ての場合をもれなく選び出すことはそれほど難しくない。



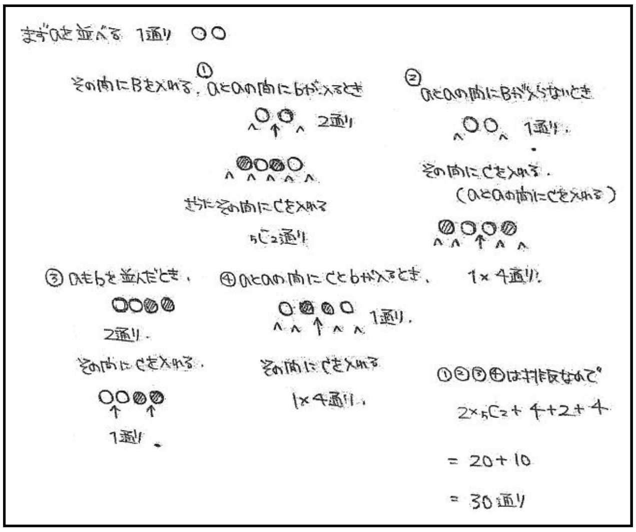
・順列の考え方による解法

様々な試行錯誤の結果、順列であることに気付き、正答にたどり着いた解答である。ただし、この解法を試みた生徒は２名（4.5%）と少なく、そのうち１名は事象の把握が十分ではなかった。「順列の総数を求めなさい」という問題であったが、「順列」という言葉に惑わされることなく、同じものを含む順列の解法を理解している生徒が多かった。



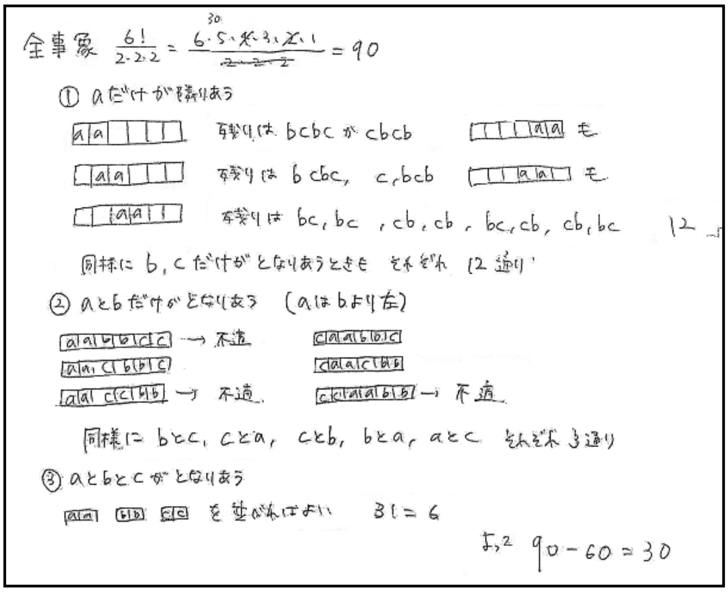
・**場合分けによる解法１**

場合分けによる解法は４名 (9. 1%) いた。そのうち、直接求めている生徒が２名、余事象の考え方によって求めている生徒が２名であった。それぞれ、１名の生徒が正答までたどり着いたが、誤答であった生徒は、もれなく全ての場合を考えることができなかった。右の生徒は、全ての場合を１つ１つ丁寧に吟味し、それぞれの場合の数を組合せを使って求めている。



・**場合分けによる解法２**

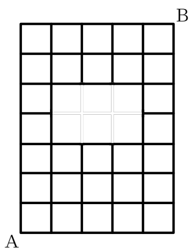
場合分けによる解法１と同様に場合分けによる解法であるが、この生徒は、余事象の考え方によって求めている。余事象の総数を求める際に、丁寧に場合分けを行い、それぞれの場合については、数え上げで求めている。



②問題２について

（問題２）

右の図のような道のある町がある。A地点からB地点まで行くときの最短経路は何通りあるか。



解法は、「数え上げによる解法」、「場合分けによる解法」、「余事象の考え方による解法」の３通りに分かれた。何通りかの解法に挑むように促したところ、解答の状況は次のようになった。

	解　　法	人数	合計
１通りの解法	数え上げによる解法	14 名	23 名
	場合分けによる解法	9 名	
２通りの解法	数え上げによる解法＋余事象の考え方による解法	13 名	21 名
	数え上げによる解法＋場合分けによる解法	8 名	
合　計			44 名

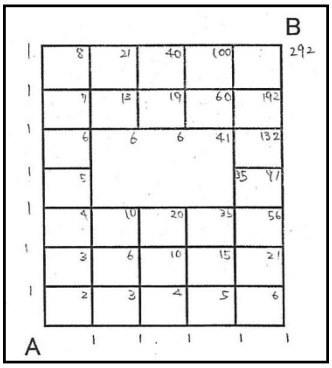
２通りの解法を試みた生徒が 21 名（47.7%）であった。その内訳は、数え上げによる解法と場合分けによる解法で考えた生徒が８名（18.2%）、数え上げによる解法と余事象の考え方による解法で考えた生徒が 13 名（29.5%）であった。特に、余事象の考え方による解法で考えた生徒は、全員数え上げによる解法でも考えていた。また、１通りの解法だけであった生徒は 23 名（52.3%）であった。正答、誤答の差、表現力の差はあるが、全ての生徒が何らかの方法によって解決しようと取り組んだ。

それぞれの解法とその傾向は以下のとおりである。

○生徒の解法と傾向

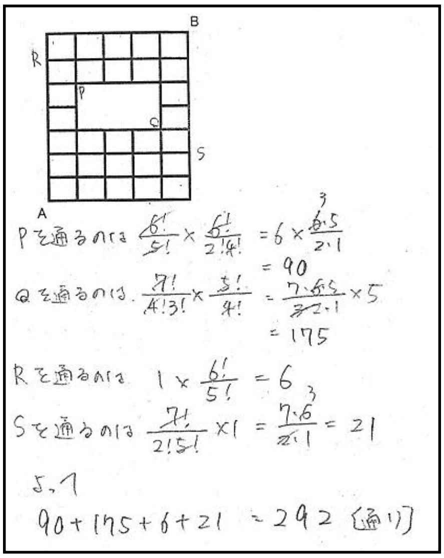
・数え上げによる解法

授業の中で扱った、数え上げによる解法を用いた解答である。35 名（79.5%）の生徒が同様の方法で取り組んでいた。正答にたどり着く生徒が多かったが、単純な計算間違いをしてしまった生徒も数名見られた。



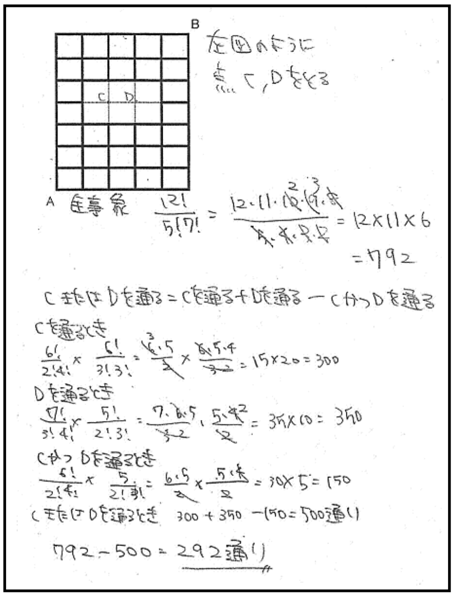
・場合分けによる解法

右の図のように、自ら点Ｐ、Ｑ、Ｒ、Ｓを定め、それぞれの点を通るときの場合の数を求めている。場合分けによる解法では、最初にＰ、Ｑ、Ｒ、Ｓを適切に定めることが重要であり、設定を誤ると正答まではたどり着かない。道がないところ（空白の部分）は通らないとして、必ず通る点を見抜くことが大切である。17 名（38.6%）の生徒が場合分けによる解法に挑んだ。そのうち、試行錯誤を繰り返し、通る点を見つけられた生徒は半数程度であった。



・余事象の考え方による解法

道がないところ（空白の部分）に道があるものとして考え、全体からそこを通る場合を除いた解法である。「ない」ものを「ある」と考えることは、数学の問題を解く際には有効な手法である。特に、余事象の考え方による解法では、大切な考え方の１つである。また、余事象の考え方を使う場合は、「少なくとも」という言葉をキーワードとしている生徒が多く、今回のように自ら余事象を考えなければならない問題には慣れていない生徒が多い。余事象の考え方による解法は、全体の約３割の生徒が取り組んだ。ほとんどの生徒が正解までたどり着いた。



(３)授業の実践

１時間目に取り組んだ結果を踏まえて、２時間目、３時間目の授業に臨んだ。２時間目は問題１を、３時間目は問題２を取り上げた。

①２時間目の授業

２時間目の授業では、前に示した５名の生徒にそれぞれの解答を板書させ、説明させた。その後、場合分けによる解法１、場合分けによる解法２について考え方の違い、解決方法の違いについて、考えさせた。

○場合分けによる解法１の説明

> **発表者の説明**
>
> まず、私は、ａを並べてみました。ａ、ｂ、ｃを同時に並べることは難しいと思ったからです。そのａの並べ方は「ａａ」としか並べることができないので、１通りしかありません。
>
> 次に、同じ文字が隣り合わないように並べるので、２つのａの間にｂやｃが入るときと入らないときに分けて考えました。
>
> ①の場合
>
> ａとａの間にｂが入るときは、図（P16 参照）のように（∧○↑○∧）、ｂを並べるところは３か所あるので、２通りあります。そして、ｃは、図のように（∧●∧○∧●∧○∧）、さらにその間に入るので、５か所のうち２か所に並べればよいから${}_5C_2$通りになります。
>
> ②の場合
>
> ａとａの間にｂが入らないときは、図のように（∧○○∧）、ｂの並べ方は１通り。同じ文字が隣り合わないように並べるには、ａとａの間に必ずｃが入らないとならないので、そこに１つ。そして、もう１つは、図のように（∧●∧○↑○∧●∧）、並べるところは、４か所あるから、４通りになります。
>
> ③の場合
>
> 次に、ａもｂも並んだ時を考えました。これは、図のように（○○●●）、２通りになります。そして、同じ文字が隣り合わないように並べるには、ａとａ、ｂとｂの間にｃを入れなければならないので、それは、１通りしかありません。
>
> ④の場合
>
> 最後に、ａとａの間にｂとｃが入るときを考えました。図のように（∧○∧●↑●∧○∧）、１つのｃはここ（↑のところ）に入るので、もう１つのｃの並べ方は４通りになります。
>
> そして、①②③④は排反なので、それぞれを加えて、30 通りになりました。

（補足）図の中の○はａ、●はｂを表す。また、↑は必ず入らなければならないところ、∧は入ることができるところを表している。

発表後に、全員の前で説明した感想を発表者に求め、その後、説明を聞いた感想を何人かの生徒に求めた。次に示すのは、教師と発表者、聞き手（生徒）のやりとりである。

> 教　師「発表してみてどうでしたか？」
>
> 発表者「自分で当たり前だと思ってしまうので、何を説明したらいいのか分からなかった。黒板に書いてあることをそのまま話してしまいました。」
>
> 教　師「どこが当たり前だと思っていたのですか。」

発表者「えっ、すべてです。」
教　師「では、黒板がなかったらどうでしたか。」
発表者「図がないと説明するのはとても難しいです。『図のように』ですませてしまったところがあるので、それを言葉で説明するとなると…。」
教　師「そうですね。図と式を示しながら、言葉を補っていたので、分かりやすく説明できたのかも知れませんね。
では、他の人に聞いてみましょう。聞いていてどうでしたか。」
生徒１「とても分かりやすかったです。でも、自分でやるとなると、できるかどうか。どうして、あのように考えたのかは分かりませんでした。」
生徒２「黒板を見ながら話を聞くことができたので、分かりやすかったんだと思います。でも、黒板だけでは、分からなかったかも知れない。黒板があって、説明があったから分かりやすかったんだと思います。」
教　師「いいところに気が付いたね。同じように、テストのときには、解答を提出してしまうと説明することはできないよね。書いたものだけで相手に分かってもらわなければならないということは、難しいことだよね。」

ここでは、言葉（言語的表現）と図（図的表現)、式（記号的表現）を融合させて説明することで分かりやすくなることが、発表者、説明を聞いた生徒ともに感じていることが分かる。それを、さらに実感してもらうために、発表者が話したことを文字に起こして、３時間目に配付した。言葉（言語的表現）だけでは理解することが難しいことを実感できるようにした。最後の教師の言葉は、今後、答案を書く際に注意してもらいたいという思いを込めて伝えた。

また、次の発表者には、言葉と図、式を融合させて説明すると分かりやすいので、説明を工夫して発表するように促した。

○場合分けによる解法２の説明

発表者の説明

今の発表と同じように場合に分けて考えました。でも、私の場合は、余事象を使って考えました。まず全事象の場合の数は、６個の文字を並べるので６！通り。そして、その中には、ａが２個、ｂが２個、ｃが２個含まれているので、２！×２！×２！で割りました。それがこの式です。

同じ文字が隣り合わないように並べることの余事象は、同じ文字が隣り合うように並べることなので、１つの文字だけが隣り合うとき、２つの文字だけが隣り合うとき、３つの文字が隣り合うときの３つの場合についてそれぞれ考えました。

①１つの文字だけが隣り合うとき

まず、ａだけが隣り合うときを考えました。これは、図（P16 参照）のように、５つの場合があり、それぞれ、ここにあるように２通り、２通り、２通り、２通り、４通りあるので、全部で 12 通りあります。同じように、ｂだけが隣り合うとき、ｃだけが隣り合うときが、それぞれ 12 通りあります。

②２つの文字だけが隣り合うとき

まず、ａとｂだけが隣り合うときを考えました。しかも、ａはｂより左にあるときを考えました。このときは、図のように３通りあります。同じように、ｂとｃ、ｃとａ、ｃとｂ、ｂとａ、ａとｃの場合があり、それぞれ３通りあります。

③３つの文字が隣り合うとき

ａとｂとｃの３つの文字が隣り合うのは、ａａ、ｂｂ、ｃｃの並べ方を考えればいいから、全部で６通りあります。

①、②、③の場合を全て加えると 60 通りなので、最初に求めた全事象の場合の数から引いて、求める順列は 30 通りになります。

発表後に、今の説明のよかったところを何人かの生徒に確認した。次に示すのは、教師と発表者、聞き手（生徒）のやりとりである。

教　師「今の説明を聞いてどうでしたか。」

生徒１「とても分かりやすかったです。さっきと同じように、説明の中でうまく黒板に書いてある図を使っていたので、聞いていて、言いたいことが分かりました。」

生徒２「話をしているときに、どのように考えていったのかを説明してくれたので、聞く準備ができました。」

生徒３「それと、『最初に３つの場合について考えます。その３つの場合は、それぞれ、こういう場合です』。と説明してくれたので、聞いていて、次はこれを説明するはずだというのが分かったので、よかったです。」

教　師「そうですね。数学とは直接関係ないかもしれませんが、説明の最初に、『これからこういうことを話します。これとこれとこれについて話します。』と述べてくれると、聞く方は安心して聞けますね。これは、答案を書く場合も同じですよ。」

ここでのやりとりは、数学的な内容ではないが、説明することや表現することを数学の授業の中で意識させることで、数学的な表現力の向上にも結びつけたい。

○場合分けによる解法１と場合分けによる解法２の吟味

教　師「２人が、それぞれ場合分けをして解答してくれました。では、この２つの解法の違いはどんなことだと思いますか。」

生徒１「最初の解答は同じ文字が隣り合わないような並べ方を直接求めているけど、次の解答は、同じ文字が隣り合う並べ方を求めて全体から引いています。」

生徒２「さっき、○○さんが言ったように、余事象を使うか、使わないかということだと思います。」

教　師「そうですね。同じ文字が隣り合わないように並べて求めた解答と、同じ文字が隣り合うような並べ方を求めて全体から引いて求めた解答ですね。

２つを見比べて、この問題の場合は、どちらが自分の好みに合っていますか。」

生徒３「私は、見て分かる方がいいので、同じ文字が隣り合わないように並べて求めた方が分かりやすいかなと思いました。」

教　師「なるほど、見て分かりやすいからという理由もありますね。ほかにはいかがですか。」

生徒４「２つの解答を見比べると、余事象を使った方が場合が少ないので、分かりやすいと思いました。」

生徒５「僕は、直接求める方法だと、全ての場合をきちんと挙げられるかどうか自信がないので、余事象を使った方が分かりやすいと思いました。」

教　師「同じ余事象を支持する意見でも、少し違いますね。」

生徒３「でも、余事象を使うかどうかは、どう判断すればいいんですか。問題を読んだだけでは、分かりにくいと思うんですが。」

教　師「どなたか、どうでしょうか。」

生徒６「とりあえず、自分の好きな方でやってみるということですかね。」
教　師「あまり数学的ではないですね。」
生徒７「問題の中に『少なくとも』と入っているときは、すぐに余事象を使うんだなと気付くけど、そうでないと難しいと思います。」
生徒４「問題が複雑だったり、分かりにくかったりするときは、とりあえず、いろいろな場合を考えてみて、どちらの場合が少ないかとか求めやすいかなどを考えてから解き始めるといいじゃないですか。」

授業の最後に、２つの解法を吟味した。ここでは、「どちらが正しいか」ではなくて、「どちらが自分の好みか」と聞くことで、片方が正しく、他方が間違っているわけではないことを強調した。その中で、生徒３、４、５の発言などが得られた。生徒の中には、問題の通りに並べる方が間違いが少ないと思っている生徒がいる。また、できるだけ簡単に求めたいと思っている生徒もいる。それぞれの意見を尊重しながらも、その決定をどのようにするかまで生徒に述べさせてみた。生徒６や生徒７の意見が生徒の本音であると思われるが、生徒４のような意見が出されたことによって、余事象を使って考える方針を確認することができた。

生徒の発言は、稚拙なところもあるが、素直な考えの表出であるとも言える。生徒６や生徒７の発言のように考えている生徒が多いと思われる中で、その考えを表現させることによって、よりよい思考へと導くことができるのではないかと感じた。やはり、表現させることを避けて、思考の高まりは期待できない。

②３時間目の授業

３時間目の授業では、前に示した３つの解法（数え上げによる解法、場合分けによる解法、余事象の考え方による解法）をそれぞれ板書させ、説明させた。その後、それぞれの解法の違いを考えさせ、メリット、デメリットについて発表させた。

○３つの解法のメリット、デメリットについての議論

教　師「では、今、発表してもらった解答について、感じたこと、気が付いたことを発表してください。」
生徒１「数え上げる方法は、いろいろと考えなくてすむので、どうしようか迷ったときは便利な方法だと思います。」
生徒２「でも、１か所間違うと最後の答えも違ってしまうので、できればやりたくない方法です。」
生徒３「それと、まだこれぐらいの大きさだったらやってみようかなと思うけど、もう少し大きくなると大変だよ。」
教　師「『大きくなると』というのは何が大きくなるの。」
生徒３「道の本数が多くなるということかな。道の本数が少ないときは、有効な方法だと思います。」
教　師「そのほかにはありますか？」
生徒４「考える時間はあまりかからないかも知れませんが、慎重にやらないといけないので時間がかかるし、数学というよりもパズルを解いているみたいで、あまりかっこよくない。」
教　師「かっこよくないか。なるほど。では、２番目の場合に分けて考えたものはどうですか。」
生徒５「私は思いつかなかったので、すごいと思いました。」
教　師「『すごい』というのは、何がどのようにすごいのかな。」

生徒５「まず、通るところが決まっていることに気付いたところがすごいと思いました。P、Q、R、Sの４つの点を決めるところです。そこさえ、気付けば数え上げるよりも確実に問題が解けると思いました。やっぱり、数え上げるのは、計算ミスが怖い。」
生徒６「４つの点に気付けば、単純な道順の問題の寄せ集めになるので、便利な方法だと思いました。」
教　師「そうですね。基本的なことの組み合わせだけで解決できることがいいですね。では、この解法はいいことだらけですかね。」
生徒７「逆に言うと、もし、４つの点に気付かなければ問題が解けないし、１つでも抜かしたらできないところが難しいと思いました。もし、穴が２つ、３つあったら大変だろうなと思いました。」
生徒８「それに、これも道の本数が増えると、通る点がいっぱい出てきて、場合分けが大変そうです。」
教　師「なるほど、いいことだけではなさそうですね。では、最後に、余事象で考えたものはどうですか。」
生徒９「この問題に関しては、一番いい方法だと思いました。通る点も２番目は４つ設定しなければいけないけど、余事象で考えれば２つですむし。」
生徒 10「点は２つですむけど、Cを通るとき、Dを通るときだけ計算しそうです。CとDの両方を通る時を忘れそうです。」
生徒 11「この問題ではいいけど、穴が大きくなったときには、通る点をいっぱい設定しなければならないので、難しそう。何を足して、何を引くのか考えるだけで混乱しそうです。」

前述のような議論がさらに繰り返された。１つ１つの解法について吟味するとともに、それぞれの解法を比較し、考え方の相違、計算量の相違について話し合わせた。その際、教師自らが結論を出さないことに配慮した。それぞれの解法のメリット・デメリットや解法の適・不適についても生徒の意見を尊重した。生徒の意見に対しては、抽象的な意見に対しては具体的に述べるよう促したり、簡単にまとめたりするだけにとどめた。たとえば、生徒５の意見で「すごい」という感想が述べられた。生徒の「すごい」という発言をより具体的に述べさせることが重要であり、そのことによってこの生徒の理解も深まる。

本問題では、「必ず通る点」に気付くことが重要であり、そこには試行錯誤が必ず必要になる。解法が限定される問題だけでは、試行錯誤の必要性は感じない。この事例では、単純な解法が使えるように問題を把握することが重要であることに生徒が気付いてくれたことが大きな成果である。

議論が終わってから、支持する解法を挙手で確認した。その結果は下の表のとおりである。

解　　法	支持数
数え上げによる解法	０名
場合分けによる解法	21 名
余事象の考え方による解法	23 名

３つの解法について吟味した後だったので、数え上げによる解法を支持する生徒は誰もいなかった。場合分けによる解法、余事象の考え方による解法はほぼ同数であった。

場合分けによる解法については、直接求めることができること、既存の知識だけで解決できることが支持する理由であった。また、余事象の考え方による解法では、道がないところ（空白の部分）が大きくなると難しいからという理由もあった。

一方、余事象の考え方による解法では、場合分けが分かりやすいこと、方針が立てやすいこ

とが支持する理由としてあげられた。場合分けによる解法よりも場合分けが少なくてすむという理由もあった。

最後に、振り返りシートを用いて、それぞれの解法のメリット、デメリットをまとめさせた。その結果は下の表のとおりである。カッコ内の数は人数である。

	メリット	デメリット
数え上げによる解法	・単純に数えるだけ（22） ・最終手段、時間があれば（2） ・どんな問題でもできる（5）	・１つの計算が命取り（23） ・数が大きいと大変（16） ・遅い（4）
場合分けによる解法	・分かれば簡単（14） ・穴が大きくてもできる（11） ・どんな場合でも使える（1）	・場合分けが多くなる（19） ・どこを経由するのかの判断が難しい（10） ・幅が広かったら難しい（8） ・思いつかなければ泥沼にはまる（3）
余事象の考え方による解法	・場合分けよりは分かりやすい、方針が立てやすい（12） ・小さければ、場合分けは容易（9） ・マス目が増えても使える（2）	・穴が大きい場合は、点をたくさん取らなくてはならないので、難しい（33）

3　実践を振り返って

数学の授業は、教科書を主なテキストとして進めることが多い。もちろん、「教科書で教える」、「教科書で学ぶ」ことは大切である。しかし、あらゆる指導の場面で教科書を使う必要はない。生徒の数学の力を伸ばすためには、教科書で学んだことを活用する場面を、生徒の実態に合わせて設定することが重要である。

授業を進める際に留意しなければならないこととして、次の２つのことを感じた。

①問題の設定

様々な考え方で解決することができる問題は、生徒にとっては難易度が高い。生徒によっては、考えること自体を避けてしまうこともある。しかし、公式を適用するだけで解決できるような単純な問題だけでは、様々な考え方で解決することのよさを実感することはできない。また、自分の考えを表現することもできないままである。そのような状況を改善するためには、生徒の数学の学習への意欲や学習の定着度などを適切に把握し、生徒の実態に合った問題を設定することが大切である。小学校や中学校での学習内容をもとにした問題、実生活に即した問題、ゲーム性の高い問題、学んだことを組み合わせて考える問題など、柔軟に考えて設定していく必要がある。

②数学的な表現力を育成する指導

問題に取り組ませ、解法を説明するだけでは、数学的な表現力を育成することはできない。時として、教師は解法を示すだけではなく、そのメリット、デメリットまでも説明してしまうことがある。その結果、生徒は１つの解法を覚えることに躍起になり、考え方や解法を味わうことがなくなってしまうことがある。時間を惜しまず、感じたことや考えたことを素直に生徒自身の言葉で表現させることで、様々な考え方で解決することのよさを味わわせたり、表現することの難しさを実感させたりする必要がある。

今回の取組を通して、数学科の指導の在り方について再度考え直すことができた。基礎・基本の定着、生徒の実態の把握、問題の設定、生徒の発言の生かし方など、教材研究の必要性が強く感じられた。教師の不断の努力が、生徒に数学を学ぶ意義を実感させ、生徒の数学の力を伸ばしていく。今回の指導を契機に、生徒の発言を生かすように授業を行ったところ、自らの考え方を積極的に発言する生徒が増えた。今後も、生徒の数学的な表現力を高めるために、指導の改善に取り組んでいきたい。

事例２　具体物による操作的表現とコミュニケーション活動
～漸化式の指導の工夫～

１　事例の概要

数列に関する学習では、等差数列、等比数列などの一般的な数列について学習した後、漸化式で表された数列の一般項の求め方を学習する。高校で学習する漸化式はいくつかのパターンに分類できるので、その解法パターンさえ覚えてしまえば一般項を求めることはできる。

しかし、大学の入試問題では最初から漸化式が与えられておらず、生徒は自分で漸化式を作らなければならない場合が多い。しかも、漸化式を解くことは得意でも漸化式を導き出すことが苦手な生徒は多い。その大きな要因としては次の２つが考えられるのではないだろうか。

要因１：自然界には、海岸線、雲、シダの葉、ひまわりの種など、再帰的なモデルとして捉えることができる構造がいたるところに現れているにもかかわらず、それらを再帰的に捉えて考察するといった経験に乏しい。
要因２：再帰的な構造を見つけやすくするために、どのような図を描けばよいか分からない。

そこで、次のような仮説を立てた。

仮説１：再帰的な構造をもつパズル教材を用いて、意図的に再帰的に捉えて考察するといった経験をさせれば、構造をつかみやすくなる。
仮説２：再帰的な構造を見つけるために図を描いて考えさせ、他の生徒が描いた図と比較、吟味するといった活動をさせれば、どのような図を描けば効果的であるかがわかるようになる。

今回は、数列の学習が漸化式まで一通り終わった後、再帰的な構造をもつパズル教材としてハノイの塔を使い、グループ学習を行った。写真のハノイの塔をグループの数だけ用意した。

ほとんどの生徒がハノイの塔のパズルを使うことは初めての経験であったので、十分な時間を確保した。具体物を操作することで再帰的な構造の実感がわくので、生徒に興味をもたせることができる。

また、再帰的な構造をつかむ過程や漸化式を導く過程では、コミュニケーション活動を取り入れ、生徒一人一人の思考の過程を全員で共有させた。


ゲーム教材：ハノイの塔

ハノイの塔を使った活動後にプリントを配り、漸化式を導く過程で図を描いて考える演習を行った。プリントの左側には、漸化式を自分で導かなくてはならない問題を、ヒントとなる図と一緒に載せ、右側には思考の過程を記入できるように補助線のみの図を載せた。ここでは、生徒が一人で試行錯誤する時間を確保するとともに、思考の過程を発表させる際には、描き込んだ図についても板書させ、全員で考察するといったコミュニケーション活動を取り入れた。

さらに、定着を図るため、授業で扱った問題の類題 2 題に取り組ませ、レポートの形で提出させた。

実際の生徒の様子については、授業の記録にまとめた。

２　指導計画

(１)本時の目標（評価規準）

関心・意欲・態度	数学的な見方･考え方	表現・処理	知識・理解
A1　ハノイの塔のパズルの中にある数学的な規則性に興味･関心をもつ。	B1　円盤の枚数が１枚少ない場合を使って最少手数を考察することができる。	C1　最少手数の関係を式（漸化式）に表すことができる。 C2　自分の考えをわかりやすく説明できる。 C3　図や表を使って第 n 項と第 $n+1$ 項の関係を式に表すことができる。 C4　漸化式を解き、一般項を求めることができる。	D1　ハノイの塔のパズルの中にある数学的な構造を理解する。

(２)指導展開

【１時限目】

学習活動		学習のねらい（評価規準との関連）	指導上の留意点
導入	ハノイの塔のゲームの説明（5 分）		パズルに慣れさせるために自由に操作させる。
展開	ハノイの塔を使ったグループ活動（15 分）	ハノイの塔のパズルを通して数学的な規則性を考察する。A1、B1、D1	全員が思考活動できるようにパズルはグループの数だけ用意する。
	漸化式を導くコミュニケーション活動（15 分）	漸化式を導き出す過程で自分の考えをわかりやすく説明したり、他の説明を理解したりする。C1、C2	なるべく多くの生徒から考えを引き出せるようにする。
	ハノイの塔の漸化式の導出（10 分）	漸化式を導き出すために必要な考え方を理解する。C1、C4	考え方のヒントを与え、なるべく生徒達から漸化式が導き出せるようにする。
まとめ	授業の振り返り（5 分）	ハノイの塔のパズルの中にある数学的な構造を理解する。D1	漸化式で考察することの有用性を確認する。

【２時限目】

学習活動		学習のねらい（評価規準との関連）	指導上の留意点
展開	演習プリントを使った数学的活動（20 分）	図や表を使って第 n 項と第 $n+1$ 項の関係を式に表すことができる。C3	図や表を使って考えるように促す。
	漸化式を導くコミュニケーション活動（15 分）	漸化式を導き出す過程で自分の考えを分かりやすく説明したり、他の説明を理解したりする。C2	なるべく多くの生徒から考えを引き出せるようにする。
まとめ	課題の解決（15 分）	漸化式を解き、課題の解決を図る。C4	机間指導で漸化式が解けない生徒を援助する。

３　授業記録【１時限目】

(１)ハノイの塔のゲームの説明

前回学習した漸化式が応用できるパズルゲームとしてハノイの塔を用意する。ハノイの塔のゲームは、100 円ショップにおいてグループの数だけ購入した。

ハノイの塔と、ゲームのルールが書いてあるプリント「ハノイの塔で数学を」を配付し、ゲームのルールを説明する。

プリント「ハノイの塔で数学を」(A4 判)

ハノイの塔で数学を

1　ハノイの塔（The Tower of Hanoi）とは

1883 年にフランスのリュカ（1842-1891、図１）が発明したゲームで、３本の棒を立てた板と、中央に穴の開いた大きさの異なる複数枚の円盤からなる（図２）。初めは３本の棒のうちの１本に、すべての円盤が大きいものを下にして順番に積み重ねられている。これらの円盤を、他の２本のうちの１本になるべく少ない手数で移動したい。ただし、以下のルールに従うものとする。

図１　François Édouard Anatole Lucas（Wikipedia より）

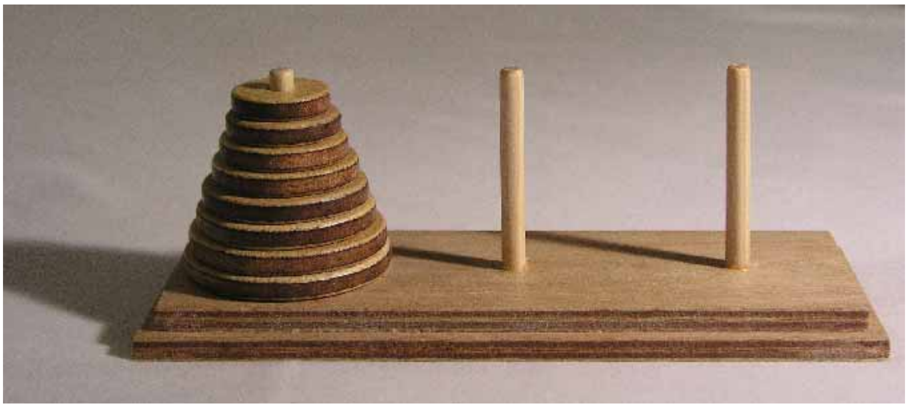


図２　８つの円盤のハノイの塔（Wikipedia より）

2　ルール

(ア) １回に動かせる円盤は１枚である。

(イ)大きな円盤を小さな円盤の上に重ねることはできない。

3　問題

n 枚の円盤を移動させる最少手数は何回か？

(２)ハノイの塔を使ったグループ活動

指示「これから少し時間をとるので、１枚のとき何回か、２枚のとき何回か調べてみよう。各班共通になるよう、最初すべての円盤は左端に積み重ねられていることにします。それをルールに従って動かし、最終的にすべて右端に積み重なるようにします。１枚のときから７枚のときまで調べてください。」

以下、あるグループの生徒のやりとり。

A：１枚は１回じゃん。
A：そして２枚のときはこうやって（㊧→㊥）、こうやって（㊧→㊨）、こう（㊥→㊨）で３回。
A：３枚のときはこうやって（㊧→㊥）、（ちょっと考えて）、あ、だめだ、だめだ、（㊥に置いた円盤を㊨に移す）、２（㊧→㊥）、（B が一緒に指で誘導する）、３（㊨→㊥）、４（㊧→㊨）、５（㊥→㊧）、６（㊥→㊨）、７（㊧→㊨）で７回。
（今度は４枚にしてBが動かす）
B：（３枚のときと同じように動かし始める。Aは一緒に指で誘導する）（３枚の円盤を㊧から㊨に動かし終わったところで）あ、できないよ。（㊨にある一番小さな円盤を㊧に動かそうとして）できないね。（もう一度並べ直す）
A：法則見つければいいんだよね。３枚のときは最初㊨に動かしたよね。１（㊧→㊥）、２（㊧→㊨）、（BとCも一緒に指で誘導する）、３（㊥→㊨）、（㊨にあるいちばん小さな円盤を移動しようとして㊧と㊥のどちらにさせばよいか迷っている）。
C：駄目だね、動かせないよ。
B：もう１回３枚のときでやってみよう。
A：（３枚のときをみんなで確認しながらAが動かす）３枚のときは３本あるからできるんだよ。（もう１度４枚並べて）
A：（㊧→㊨、㊧→㊥まで動かして）ここまでは絶対こうしなくちゃいけないんだよ。それで（㊨を㊥に移しながら）これをここに重ねなくてはならないから（㊨→㊥）、これを（㊧→㊨）
B：㊥を指さしてどっちかをこう（指で㊥から㊧に移動する動き）こう（指で㊥から㊨に移動する動き）ってやれば。（Aが㊥の一番上にある円盤をどちらに移動するか迷っていると）
C：（㊥を指さして）最初ここに移動させてみたら。
A：（もう一度４枚を最初の状態に戻してから）（㊧→㊥）、（㊧→㊨）、（㊥→㊨）、（㊧→㊥）、（ここまでやって迷っていたら）
B：（㊨に刺さっている一番小さな円盤を指さして）これしか動かせないから、これをこうやって（㊨→㊧）、（BもCも一緒に指で誘導しながら）（㊨→㊥）
A：すごい、これをこうやって（㊧→㊥）、これをこうやって（㊧→㊨）、（㊥→㊧）、（㊥に刺さっている２番目の大きさの円盤をどこに動かそうか迷って）。
C：あ、だめだ。
A：あははは。（笑いながら㊨に刺して）（㊥→㊨）、（㊧→㊥）、（㊨→㊧）、（㊥→㊧）、（㊥→㊨）、（㊧→㊥）、（㊧→㊨）、（㊥→㊨）（完成する）。

Ａ：あはは、でも何回だろう。（拍手している）数えなきゃだめだ。
Ｂ：もう１回やってみよう。
Ａ：（もう一度４枚を最初の状態に戻してからみんなで一緒に指で誘導しながら）１（㊧→㊥）、２（㊧→㊨）、３（㊥→㊨）、４（㊧→㊥）、５（㊨→㊧）、６（㊨→㊥）、７（㊧→㊥）、８（㊧→㊨）、９（㊥→㊧）、10（㊥→㊨）、（㊧にある一番小さな円盤を移動させようとして）
Ｂ：あ、だめだ、11（㊧→㊥）、12（㊨→㊧）、13（㊥→㊧）、14（㊥→㊨）、15（㊧→㊥）、16（㊧→㊨）、17（㊥→㊨）。
教師：（生徒が書いた表を見て）違うよ。最初の３つはあっているけど４つ目は違うよ。
Ｃ：もう１回やるしかないな。
Ａ：数え間違えたかな。（もう一度やってみるがさっきと同じ 17 回となる。）

他のグループも同じように試行錯誤を繰り返していたが、規則性に気付いて７枚のときまで手数を調べられたグループが何グループか出てきたところで次の発問をした。

発問「円盤の枚数によって最少の手数はどのように変わりますか。円盤の枚数が１枚増えたときの最少手数は増える前の最少手数を使って漸化式でどのように表せるか考えてみよう。」

生徒は円盤の枚数を変えながら最少手数を数えている。少し時間をとった後、生徒に漸化式を作ることができたか聞いたところ、何人かの生徒が手を挙げた。その中のＤさんに発表してもらう。

Ｄさんの作った漸化式：$a_{n+1} = 2a_n + 1$

Ｄさんと同じ漸化式ができた生徒に挙手させたところ、Ｄさんの他に３名いた。

これとは違う漸化式ができたか聞いたところ、Ｅさんが手を挙げたので発表してもらう。

Ｅさんの作った漸化式：$a_{n+1} = a_n + 2^n$

Ｅさんと同じ漸化式ができた生徒は他にはいなかった。
Ｄさん、Ｅさんの作った漸化式以外の式を作った生徒はいなかった。

（３）漸化式を導くコミュニケーション活動

漸化式を作れなかった生徒が多かったので、Ｄさん、Ｅさんはどのようにして式を導き出したのか、コミュニケーション活動を通して理解させる。
黒板には、２人が発表した漸化式が書いてある。
まず、Ｄさんの漸化式について考える。

発問「Ｄさんの漸化式はどうして出てきたのかな。分かった人は説明して下さい。」

以下、生徒達とのやり取り。

Ｆ：分かった。
教師：Ｆさん分かったのなら説明してください。
Ｆ：必ず前の数の２倍に１を足した数になっています。
教師：前の数の２倍に１を足した数って言ったけど、皆さんどういうことか分かりますか。
何人かの生徒：あ、本当だ。

教師：分かった人もいるようだけど、まだ分からない人もいるようだから、誰か分かりやすく説明してくれますか。

※　Dさんが発表したときに同じ式ができたと手を挙げていたGさんと目が合った。

教師：GさんもDさんと同じく最初にこの式を作っていましたね。Gさんはどのように考えて作ったのかみんなに分かりやすく説明して下さい。

G：表にまとめていったら関係に気づきました。

教師：Gさんは表にまとめたんだって。同じように表にまとめた人はいますか。

※　クラスの３分の１くらいが手を挙げる。

教師：それではGさんはどんな表にまとめたのか板書して説明してくれますか。

※　Gさんの書いた表と説明。

円盤の枚数(n)	1	2	3	4	5	・・・
最少移動回数	1	3	7	15	31	

×2+1　×2+1　×2+1　×2+1

G：円盤の枚数と最少手数を表にまとめると必ず×2+1 になっています。だから、a_{n+1} も a_n の×2+1 になります。

教師：皆さん分かりましたか。

H：先生、私達は４枚のときに 17 回だったんだけど。

何人かの生徒：私達も 17 回だった。

J：それ数え間違いだよ。15 回が正しいんじゃない。

教師：４枚の時の回数で意見が分かれているけど、Dさんの漸化式と同じ式になった人はGさんのように考えたのかな。この考え方は皆さん分かりましたか。Eさんは異なる式を作ったようだけど分かりましたか。

E：はい。

教師：同じ漸化式だったけどGさんとは異なる考え方をした人はいますか。

※　異なる考え方をした生徒はいなかったので、Eさんの漸化式について考える。

次に、Eさんの漸化式について考える。

発問「それでは、今度はEさんの漸化式はどうしてでてきたのか考えてみましょう。分かった人は説明して下さい。」

以下、生徒達とのやり取り。

教師：誰も分からないようなのでEさん説明してください。

E：私もGさんのように表で考えました。

教師：それでは表でどのように考えたのか板書して説明してくれますか。

※　Eさんの書いた表と説明

円盤の枚数(n)	1	2	3	4	5	・・・
最少移動回数	1	3	7	15	31	

E：表はGさんと同じなのですが、最少手数の差を。

※　差と言ったところで言葉をさえぎる。

教師：ちょっと待った。今、差って言いましたね。Eさんがどのように考えたか分かりましたか。

※　生徒はノートに書き込み始め考えている。

Ｋ：先生、分かった。
何人かの生徒：私も分かった。
教師：何人か分かったようだけど、他の皆さんはどうですか。
※　まだ考えている生徒が多くいる。
教師：それではＫさん、前に来てＥさんの続きを説明して下さい。
※　Ｋさんの説明

円盤の枚数(n)	1	2	3	4	5	・・・
最少移動回数	1	3	7	15	31	

2　　2^2　　2^3　　2^4

Ｋ：最少手数の差をとると２の累乗になっています。指数は１枚少ない円盤の枚数になっているので、a_{n+1} は a_n に 2^n を足した数になっています。
教師：Ｅさん、Ｋさんの説明でよかったですか。
Ｅ：はい。同じです。
教師：皆さん分かりましたか。

(４)ハノイの塔の漸化式の導出

生徒から出された２つの漸化式は、試行の結果をまとめた表を基に導かれていたため、表の値が間違っているときには成り立たないこと、表の値が正しいことに確信がもてないことに気付かせ、最少手数が分からなくても漸化式を導けるかどうか考えさせる。

発問「２つの漸化式がどうやってできたのか分かったけど、２つとも表から求めていました。ところで、さっきも表の値が違うって言っていた人がいたけど、本当にこの表の値は正しいと言えますか。」

以下、生徒達のやり取り。

Ｌ：実際に操作して確認しているから間違いないんじゃない。
Ｍ：だけど４枚のときに間違えていた人もいたよ。
Ｎ：５枚のときは、やっているうちに何回なのか分かんなくなっちゃった。

少しの間、お互いの意見を述べ合った後、最少手数を求めずに漸化式を作ることができるかどうか考えさせる。

発問「円盤の枚数が多くなると、最少手数に確信がもてなくなるようですね。それでは、各枚数の最少手数を求めずに漸化式を作ることはできませんか。」

どう考えてよいか分からないようなので、円盤の枚数を４枚にして操作し、考え方を引き出す。
円盤の枚数が４枚しかないが $n+1$ 枚あるとして考えるように説明する。n 枚（実際には３枚）を移動させる最小手数を a_n とし、a_{n+1} を a_n を使って表せないか考えさせる。

以下、生徒達とのやり取り。

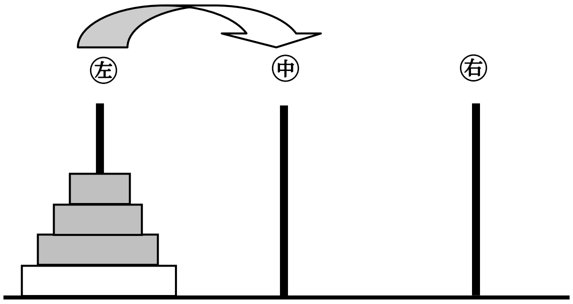
教師：それでは円盤の枚数を４枚にして考えてみましょう。４枚しかありませんがこれを $n+1$ 枚と思って下さい。上の３枚が n 枚ということです。それでは、一番下の１枚を残して上の n 枚を移動させる最小手数を a_n とします。一番大きい円盤を移動するには、まず上の n 枚を移動させなくてはなりません。どの棒に移動させますか。

O：まん中の棒です。

教師：そのために必要な最小手数は何回ですか。

※　少し考えている。

教師：n 枚を移動させる最小手数ということですよ。



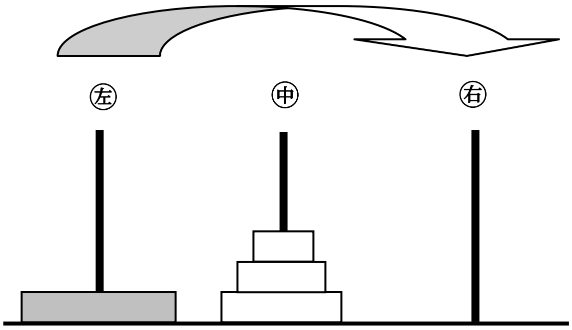
P：a_n 回です。

教師：そうですね。a_n が何回か分からなくても、n 枚の円盤の最小手数を a_n で表せることがポイントですね。皆さん分かりますか。

※　皆が納得したようなら次に進める。

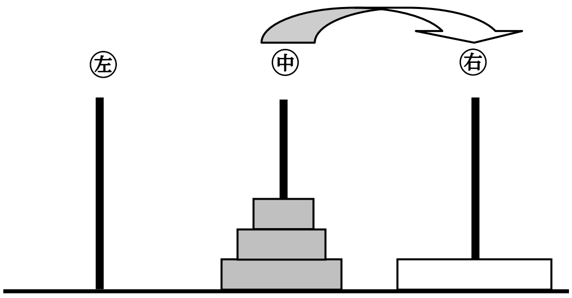
教師：それでは残った一番大きな円盤１枚を㊧から㊨に移動するのは何回ですか。

Q：１回です。



教師：これはいいですよね。１枚の円盤を移動するのは１回ですね。それでは、再び㊥にある３枚の円盤を㊥から㊨に移動するのは何回ですか。

何人かの生徒：a_n 回です。



教師：これで㊧にあった $n+1$ 枚の円盤を㊨に移動することができました。それでは、a_{n+1} を a_n を使って表すとどうなりますか。

R：$a_{n+1}=2a_n+1$ です。

S：あ、さっきと同じ形になった。

教師：さっき求めた漸化式と同じ式になりましたけど、今の考え方では各項の値が分からなくても求められました。漸化式を求めるには、第 $n+1$ 項と第 n 項の関係だけに着目すればいいんですね。

(５)授業の振り返り

A5 判（A4 判に上下二段で印刷）

＜振り返りシート＞

- □ ハノイの塔のパズルの中に数学が使われていることに興味をもった。
- □ 漸化式を考えるときに図や表を使って考えることができた。
- □ 円盤の枚数が n 枚の最少手数を使って、円盤の枚数が $n+1$ 枚の最少手数を考えることができた。
- □ 最少手数の関係を式（漸化式）に表すことができた。
- □ 自分の考えをわかりやすく説明できた。
- □ 式（漸化式）を解いて、n 枚の円盤の最少手数を求めることができた。
- □ 他にも数学と関係のあるパズルがあるかどうか調べてみたい。

＜授業の感想＞

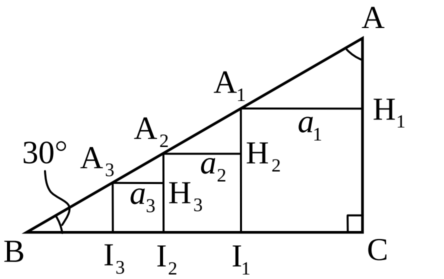
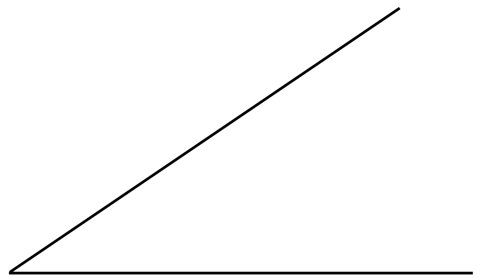
(６)生徒の感想

- 漸化式の発想が少し分かったように思える。実際に物を使って頭で考えた方が理解しやすいし、おもしろいと思った。
- ハノイの塔の実験は難しかったけどおもしろかった。漸化式が実際のこういう場面で使われているのを知ったのは初めてで新鮮だった。
- 漸化式を解く前に、ハノイの塔を使って考え方が確認できて分かりやすかった。解き方だけでなく、作り方も知れておもしろかった。
- ルールに従って条件を満たしていくのは思った以上に難しかったです。計算ができても円盤を動かすとその数字にならなかったり、毎回違くなってしまったり、コツをつかむまで時間がかかりました。お店に売っているこのような道具に条件を加えるだけで、ある法則が見つかったり、漸化式が関わっていたり、おもしろいなと思いました。
- 枚数が少ないときは簡単にできたけど、多くなると難しかった。途中で法則みたいなものを見つけて予想してやったら、その通りになったのでうれしかったです。漸化式を解けなかったので復習します。ゲームみたいなのをやって数学を勉強できて楽しかったです。
- ハノイの塔を使いながらだったのでとても分かりやすかったです。初めは、何の授業か全然結びつかなかったけど、最終的にはすごく結びついてびっくりしました。
- ハノイの塔だけでここまで考えるとは思わなかった。途中で、黒と白の円盤を交互に入れ替えなきゃいけないことや、漸化式を使うことなど、初項や階差の規則が分かるにつれてとても楽しくなった。この授業を通して「考える」ことを学んだ。
- 規則性は見つけられたが、実際にその回数でできなくてとても大変だった。普段は公式的な見方しかしていなかった。漸化式には難しいというイメージがあったが、少し考え方が分かりやすくなったと思う。
- 実際に自分で実践してみることによって、漸化式などの数列がどのような理由で成り立っているのかが分かり、公式を覚えるのではなく、自分で作るということを実感できた。

４　授業記録【２時限目】

(１)演習プリントを使った数学的活動

前時のハノイの塔から漸化式を導き出す学習の応用として、以下の演習プリントを行う。(2)の a_{n+1} と a_n の二項間の漸化式を導く問題では、ヒントとして図を描いて考えるように促し、プリントの右側に補助線のみの図を予め準備しておく。

> $A=60^\circ$、$B=30^\circ$、$AC=1$である直角三角形ABC内に、図のように１辺の長さが a_1、a_2、a_3、…の正方形が並んでいる。
>
> 
>
>
> 
>
> (1)　a_1、a_2、a_3、…の値を求めよ。
>
> (2)　a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を導け（問題の図にならって、右図の中に a_{n+1} と a_n の関係を図示してみると・・・）。
>
> (3)　a_n の値を n を用いて表せ。

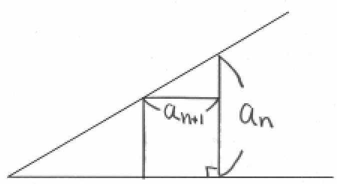
生徒は、a_1、a_2、a_3 の値を求めるのに、直接問題の図の中に関係を書き込んで考えていた。多くの生徒が思った以上に(1)に時間がかかってしまったようで、(2)、(3)まで取り組んでいないようであった。(1)はカットしてもよかったかもしれないが、かえって漸化式で考えることのよさは実感できたようである。

(２)漸化式を導くコミュニケーション活動

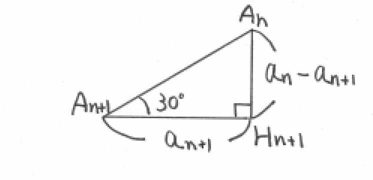
漸化式を導くのに自分が描いた図と他の生徒が描いた図を、比較・検討させるため、コミュニケーション活動を取り入れる。(2)まで取り組んだ生徒がいなかったので、全員で考える。

> 発問「前時のハノイの塔で漸化式を導いたように、各項の値がわからなくても漸化式を求めるためにはどのような図を描いて考えればいいですか。」

少し考えさせてからの生徒とのやり取り。

> 教師：a_n と a_{n+1} の関係だけが知りたいんだよね。
> Q：a_n の辺を引いてから一辺が a_{n+1} の正方形を作ればいいのかな。
> 教師：今Qさんが言ったこと分かったかな。どんな図になるか誰か描いてくれませんか。
> 　　　それではRさん板書してください。
> ※　Rは右のような図を描いた。
>
> 
>
>
> 教師：QさんRさんの描いた図でよかったかな。
> Q：はい。
> 教師：この図から漸化式は求められるの。
> ※　生徒はプリントに書き込みながら考えている。

教師：a_n と a_{n+1} の関係が作れればいいんだよね。
Ｓ：あ、ここの角度は30°だ。直角三角形の辺の比が使える。
Ｔ：そうか、$1:2:\sqrt{3}$ になるんだ。
教師：できそうかな。それじゃＳさん、みんなに分かりやすいように黒板に図を描いて下さい。
※　Ｓさんは右のような図を描いた。



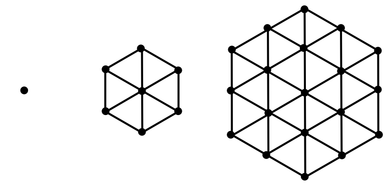
教師：それではＳさん、どのように考えればよいか説明してください。
Ｓ：この図のこの三角形を取り出すと、この辺が
$a_n - a_{n+1}$ でこの辺は a_{n+1} になります。
30°、60°、90° の直角三角形の辺の比だからこれが $1:\sqrt{3}$ になります。
教師：ここまでの説明は分かったかな。この図から漸化式を求められそうですか。
それではＴさん、式はどうなりますか。
Ｔ：$a_{n+1}:(a_n - a_{n+1}) = 1:\sqrt{3}$　　$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} a_n$

(３)レポート

定着を図るため、授業終了時に次の課題２題を A4 判両面に１題ずつ印刷して配り、レポートとして提出させた。

課題１

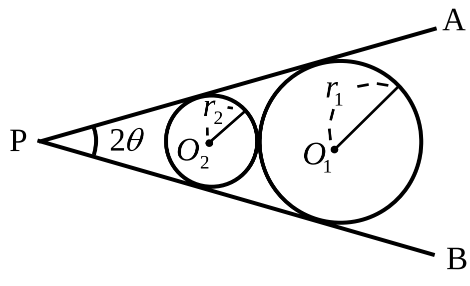
右の図のように点の個数を増やしていく。
n 番目の図形 A_n に含まれる点の個数を a_n とする。
(1)　a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 を求めよ。
(2)　a_{n+1} と a_n の間にどのような関係が成り立つか。
(3)　a_n を n を用いて表せ。



A_1　　A_2　　A_3

課題２

$\angle \mathrm{APB} = 2\theta$ $(0^\circ < 2\theta < 180^\circ)$ とし、半直線 PA、PB に半径 r_1 の円 O_1 が接している。$r_1 = r$ として、以下の問いに答えよ。
(1)　円 O_1 の中心と P との距離 d_1 を r を用いて表せ。
(2)　図のように、半直線 PA、PB に接し、かつ円 O_1 に外接して円 O_1 より小さい円を O_2 とする。円 O_2 の半径 r_2、およびその中心と P との距離 d_2 を r を用いて表せ。



(3)　(2)にならい、一般に半直線 PA、PB に接し、かつ円 O_n に外接して O_n より小さい円 O_{n+1} をかく手順を考える。円 O_n の半径を r_n とするとき、r_{n+1} と r_n の関係を求めよ。
(4)　円 O_n の面積を S_n とするとき、S_n を求めよ。
(5)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ。

(４)生徒の解答

生徒の問題解決の手法は、$\boxed{\text{課題１}}$と$\boxed{\text{課題２}}$で大きく違うものとなった。$\boxed{\text{課題１}}$では、(1)で各項の値を求めさせたため、階差数列を使って漸化式を導き出している生徒が多かったが、$\boxed{\text{課題２}}$では、授業で学習したように図を描いて漸化式を導き出している生徒が多かった。

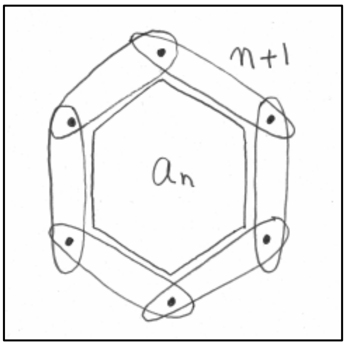
以下に、各課題の分析結果を示す。

$\boxed{\text{課題１}}$		漸化式が求められたか	
		○	×
A_{n+1} と A_n の関係の図が描いてあるか	ある	6	1
	ない	22	7

$\boxed{\text{課題１}}$は、授業で扱った演習プリントの問題と同じように、初項から第５項までを求めさせていたため、多くの生徒が図を描かずに階差数列から漸化式を求めていた。授業で扱った演習プリントの反省でも触れたが、本実践のねらいを考えると(1)はカットした方がよかったのかもしれない。中には図を描いていた生徒も何人かいたが、A_{n+1} と A_n の関係に着目した図を描いた生徒は一人だけであった。

また、各項の値から類推して一般項を求めた生徒に対しては、条件によっては数学的帰納法による証明が必要となることを補足しておかなくてはならないだろう。

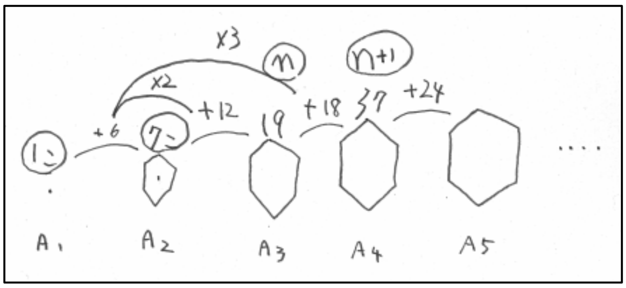
【 A_{n+1} と A_n の関係に着目して描いた図】



左図が、A_n と A_{n+1} との関係に着目して描いた図である。この生徒は、A_n のまわりを１辺あたり $n+1$ 個の点で囲めば A_{n+1} の六角形ができることと、その頂点は２辺が共有していることを略図でうまく表現している。

もし、(1)の各項の値を求めさせる問いをカットしていたなら、もっと多くの生徒が二項間の関係だけに着目した図を描いていたかもしれない。

【その他の生徒が描いた図】



この生徒は、A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 の略図を描いて考えているが、二項間の関係だけに着目した図とはなっていない。階差が等差数列になっていること利用して漸化式を類推しているが、階差数列を用いた多くの生徒は図を描いていなかった。

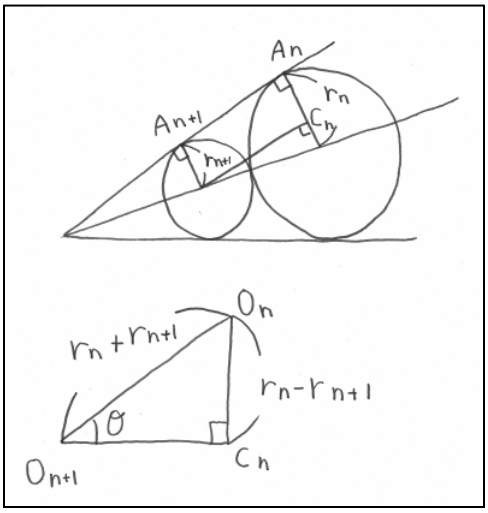
課題2		漸化式が求められたか	
		○	×
r_{n+1} と r_n の関係の図が描いてあるか	ある	18	6
	ない	4	8

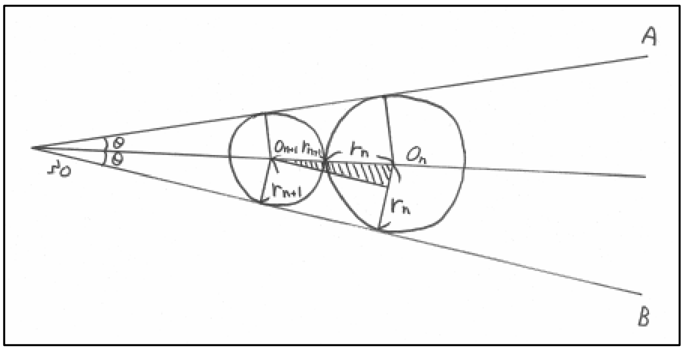
課題1とは違って r_2, r_3 などが簡単に求められないため、多くの生徒が r_{n+1} と r_n の関係の図を描いて漸化式を求めていた。図を描かずに漸化式が求められた生徒もいたが、r_1 と r_2 の関係式から漸化式を類推しているだけであり、完全正答はいなかった。また、図は描けていたものの、漸化式を求められなかった生徒もいたが、この課題の場合、r_{n+1} と r_n の関係の図が描けたかどうかがポイントであったようである。

【生徒が描いた図】

左下の図は、授業で扱ったように、A_n と A_{n+1} の関係の図を描いた後、関係式を導くために三角形を取り出して描いている。

また、右下の図のように、A_n と A_{n+1} の図は同じように描いてあっても三角形を取り出すのではなく、直接図中の関係式を導ける部分に斜線を引いている生徒もいた。





5　実践を振り返って

生徒にとって、数学的帰納法のように自然数の公理に関する考え方や、漸化式のように再帰的に定義される考え方は抽象的で理解し難いところである。今回は、その抽象的で分かりにくい部分を、ハノイの塔という具体物を使うことで理解させることができるのではないかという仮説に基づいて実践した。生徒の感想からも分かるように、具体物を操作しながら考えることは、実感がわいて分かりやすかったばかりか、興味関心も高められたようである。身近なパズルを教材として使うことで、生徒の興味や感動を誘い、数学の抽象的な概念についても理解させ、深く印象に残るような授業が可能になるのではないだろうか。

さらに、学習の定着を図るために、漸化式を導き出す課題を何題か用意し、授業及びレポート課題として扱った。具体物で考えるのと同様に、紙面に図を描いて考察する活動を行うことで、明らかに生徒の表現力は増し、課題解決を図る上で図や表を効果的に活用できるようになる。提出されたレポートを見ると、漸化式を導こうとする生徒一人一人の意欲が感じられ、仮説に基づいて行った今回の取り組みは、まずまずの効果があったことが伺える。授業では図を描けなかった生徒が、図を描いて考察できるようになったことはよかった。

また、今回の実践では、意識してコミュニケーション活動を取り入れた。自分の考えと他の生徒の考えとを比較、吟味させるといった活動をすれば、それぞれの考えのよさがわかるようになる。生徒一人一人の考えを大切に扱うことで、自己有用感を高めることができ、生徒の授業に対する意識を高揚させることができる。このような活動は今後ますます必要となるだろう。

事例３　単元の枠を越えた多様な解法への挑戦
〜数学Ⅱ、数学Ｂにおける指導の工夫〜

１　事例の概要

(１)指導の改善

テストの解答状況を見ると、自らの考えを適切に表現できる生徒が少ないことが分かる。解答が画一的であったり、無答であったりする生徒の割合も年々増えている。そこで、生徒が自ら考え、それを適切に表現できる力を身に付けさせるために、次に示す２つのことについて指導の改善に取り組んだ。

１つは、問題の設定についてである。教科書、問題集の問題は単元毎に編集されているため、問題に取り組む生徒は自分自身で解法を制限しているところがある。その単元で扱った解法を思い出せなければ手も足も出ないことが、無答の生徒の割合の増加にもつながっている。そこで、条件を付け加えたり、条件を取り除いたりすることで、自由に発想できる問題を設定して取り組ませることにした。また、このことは、授業の中で別解を示したときに、あまり興味を示さない生徒への対策の１つにもなる。数学では、効率よく問題を解決することも求められる。しかし、効率よく問題を解決するためには、様々な解法のメリット、デメリットも同時に理解していなければならない。そのためにも、適切な問題の設定が重要となる。

もう１つは、設定した問題の扱い方についてである。問題を解かせるだけでなく、それをもとに話し合わせることで、表現することの難しさ、大切さを実感させたい。一人で黙々と数学の問題に取り組むだけではなく、数学を他者とのコミュニケーションの道具として捉え、考え方を分かりやすく伝え、考え方を共有することも、数学の学習を進める上では重要なことである。その中で、図的表現、言語的表現、記号的表現の相互の変換を考え、どのように表現すれば他者に分かりやすく伝えられるかを考えさせたい。

(２)多様な考え方ができる問題の設定

授業で使用している問題集の「三角関数」の単元で出題されていた問題を、次のように改題し（点Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄの座標が与えられていたものを取り除いた）、数学Ⅱ「図形と方程式」「三角関数」、数学Ｂ「ベクトル」の学習が終わった段階で取り組ませた。

（問題）中心をＯとし、半径１の円がある。この円周上に円周を４等分する点Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄをとる。点Ｐを弧ＡＢ上にとり、$\angle \mathrm{POA}=2\theta$（$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$）とするとき、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さをθを用いて表せ。

問題集では、「三角関数」の単元に掲載されており、点の座標が与えられていたので、ほぼ全ての生徒が「２点間の距離の公式」を活用し、「三角関数」の知識を用いて式を変形して問題の解決にあたっていた。しかし、座標を与えないことによって、座標を自ら設定して考えたり、正弦定理・余弦定理などの知識を用いて考えたり、ベクトルを用いて考えたりするなど様々な考え方で取り組むことが期待できる。「図形と方程式」、「三角関数」、「ベクトル」の単元の学習では、生徒はそれぞれの基本的な知識については理解したが、その知識を活用するまでには至っていない。そこで、本問題に取り組ませることで、それぞれの知識の活用方法について考えさせることにした。

本問題では、言語的表現を図的表現に変換し、その図的表現から数学的な性質を見いだし、解決に向かうことが求められる。本問題の解決については、次の４つのパターンが考えられる。

〇それぞれの点を座標で表すことで、２点間の距離の公式を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。

〇余弦定理・正弦定理を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。

〇三角比の定義を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。

〇ベクトルの内積を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。

さらに、発展として次の問題を用意した。

（問題）座標平面上に、原点Ｏを中心として、４点Ａ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$)、Ｂ(0, 1)、Ｃ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$)、Ｄ(0, －1)を通る円がある。点Ｐを弧ＡＢ上にとり、∠ＰＯＡ＝2θ（$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$）とするとき、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さをθを用いて表せ。

２　指導の実践

(１)授業のねらいと展開の工夫

①授業のねらい

次のことをねらいとして設定した。

・基本的知識を確認するとともに、それぞれの解法のよさを実感する。
・図的表現、言語的表現、記号的表現の価値を実感する。
・誰が見ても誤解がなく、聞き手を納得させる表現方法、発表者の考えを引き出す質問方法等について考えることができる。

②展開の工夫

実施する授業は2.5時間とした。１時間目の授業の後半にワークシートを配付し、20分間の時間をかけて、問題に取り組ませた。授業後にワークシートを回収し、解法ごとにグループ分けを行った。２、３時間目は、グループに分かれて解法を検討し、全体で発表・質疑を行った。その後、振り返りを行い、分かりやすい表現、表現からの情報の読み取り等について確認した。グループでの協議のポイント、全体での発表・質疑のポイント、振り返りのポイントは以下のとおりとした。

〇グループによる協議のポイント
・解法の検討（グループ内では全員が解法を理解する）
・解法について分かりやすく説明するための工夫（表現方法の検討）
・解法のメリット、デメリット

〇全体での発表・質疑のポイント
・聞き手にとって分かりやすい説明方法（話し方、話す言葉、板書等）
・意図を明確にした質問（不明な点、聞きたいことを明確にする）

〇振り返りのポイント
・それぞれの解法のよさの確認
・説明方法の確認

(２)生徒の解答の状況とグループ編成

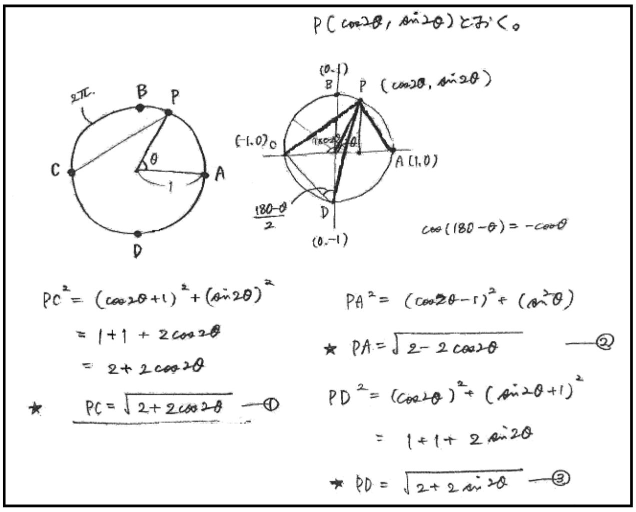
取り組んだ問題を回収し、解答の状況を確認した。その状況は、次のとおりであった。

	解　　法	人数(人)
1通りの解法	①座標平面上で２点間の距離の公式を活用した解法	2
	②三角比の定義を活用した解法	4
	③余弦定理を活用した解法	9
	④正弦定理を活用した解法	2
	⑤ベクトルの内積、成分を活用した解法	2
2通りの解法	①＋②	1
	①＋③	3
	①＋⑤	1
	②＋③	1

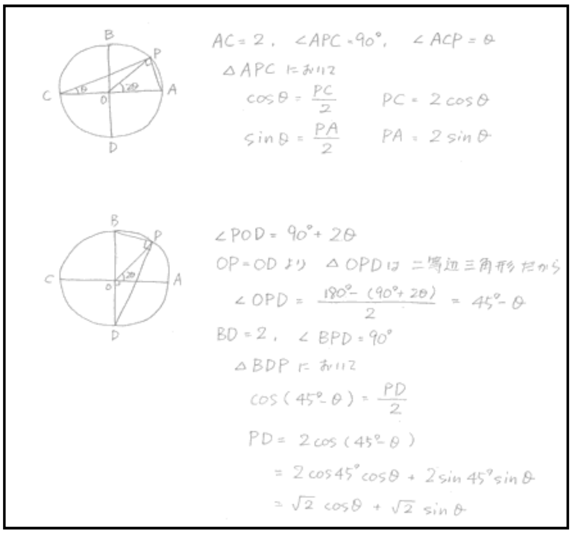
	解　　法	人数(人)
３通りの解法　①＋②＋③		1
	無　答	4
	合　計	30

２通り以上の解法を試みた生徒は７名（23.3%）にとどまった。また、余弦定理を活用した解法を試みた生徒は 13 名（43.3%）、座標を活用した解法を試みた生徒は７名（23.3%）であった。発想としては単純な、座標平面上で２点間の距離の公式を活用した解法を試みる生徒が少ないことは意外であった。また、ワークシートを見ると、図を描いて考えているが、そこから複数の数学的な性質を見抜けない生徒が多い。１つ１つの知識は身に付いていても、それを活用する力が不十分であることが分かる。以下に、生徒の解答の主なものを示す。

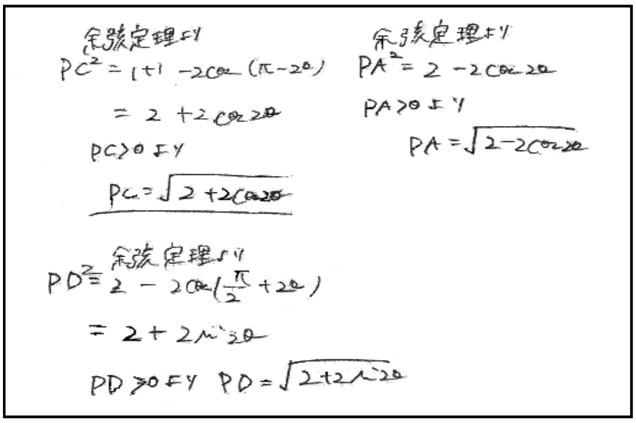
○座標平面上で２点間の距離の公式を活用した解法



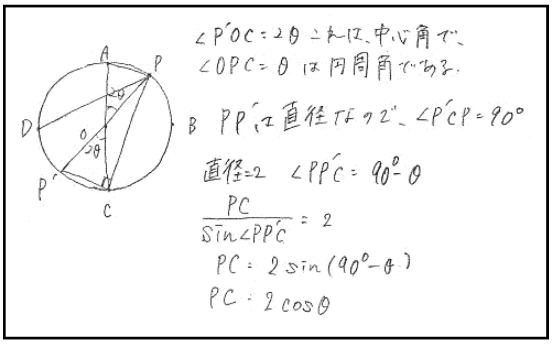
○三角比の定義を活用した解法



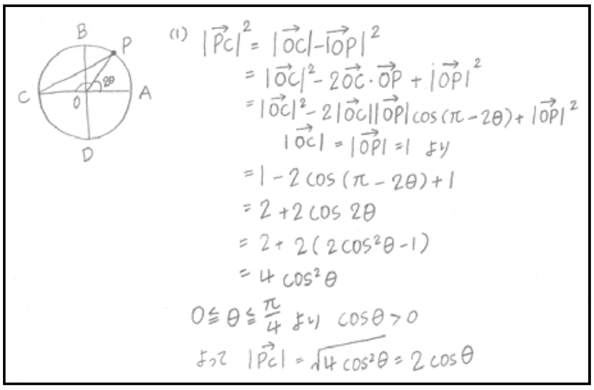
○余弦定理を活用した解法



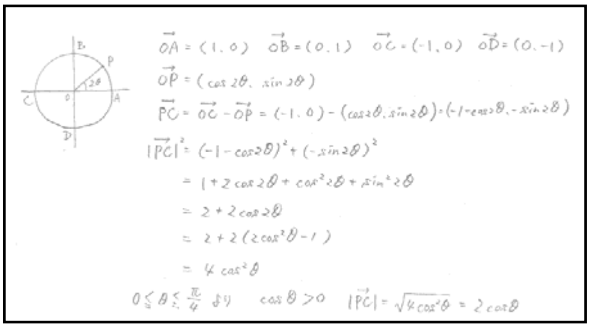
○正弦定理を活用した解法



○ベクトルの内積を活用した解法



○ベクトルの成分を活用した解法



最後まで導くことができない生徒、途中の計算に誤りがあった生徒もいたが、解法の方針としては、上記の６つの解答のいずれかに該当していた。そこで、それぞれの解法毎にグループ分けをすることにした。ただし、ベクトルを活用した解法を試みた生徒は、内積を活用した解法、成分を活用した解法ともそれぞれ人数が少なかったので、２つの解法を１グループとした。その結果、５つの解答のパターンでグループ分けを実施し、クラス 30 名を６グループに分けることにした。また、２通り、３通りの解法を試みた生徒は、その解法の中で人数の少ないグループに振り分け、無答の生徒はいずれかのグループに振り分けることで、人数の調整を行った。以下がそのグループ分けと人数である。

グループ編成(合計 30 名)

グループ１	２点間の距離の公式を活用した解法のグループ	６名
グループ２	三角比の定義を活用した解法のグループ	６名
グループ３、４	余弦定理を活用した解法のグループ	６名＋５名
グループ５	正弦定理を活用した解法のグループ	３名
グループ６	ベクトルの内積、成分を活用した解法のグループ	４名

(３)２、３時間目の授業の実践

①グループでの検討

授業の最初にグループを示し、司会者、発表者を決めて、司会者を中心に解法について検討させた。時間は 20 分間とした。グループでの検討のポイントとして、「解法の検討（グループ内では全員が解法を理解すること)」、「解法について分かりやすく説明するための工夫（表現方法の検討)」、「解法のメリット、デメリット」の３点を挙げた。以下にそれぞれのグループの議論の様子を示す。

○グループ１(２点間の距離の公式を活用した解法のグループ)

このグループは、２点間の距離の公式を活用した解法だけを考えた生徒が２名、２点間の距離の公式を活用した解法と余弦定理を活用した解法の２通りで考えた生徒が３名、無答の生徒が１名の、合計６名のグループである。このグループでは、解法と解法を説明するための工夫については、すぐに議論がまとまっていた。議論が集中したのは、解法のメリット、デメリットについてであった。

> Ａ：考え方としては２点間の距離の公式を覚えていればすぐに思いつくけど、実際に始めると、計算が大変だよね。(無答の生徒)
> Ｂ：$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ も知らないといけないし、半角の公式や２倍角の公式も知らないといけないし、結構大変だよね。

Ｃ：ぼくは、半角の公式を思い出せなかったから、中途半端な答えになっちゃったよ（前ページに示した解答の生徒）。
Ｄ：私は、最初にこの２点間の距離の公式を使ってやってみて、その後、余弦定理を使ってみたけど、どっちでやっても計算は大変だったよ。でも、まだ余弦定理の方が楽だったかな（２通りの解法で考えた生徒）。
Ａ：余弦定理でも大変なの？だったら、余弦定理よりも、２点間の距離の公式の方が楽かな。結局、数学は計算力がないとだめなんだね。
Ｃ：余弦定理を使っても、半角の公式を使うの？
Ｄ：最後には使うことになるかな。
Ｃ：そうか、大変だね。やっぱり。
Ｅ：そうすると、この解法のメリット、デメリットを挙げるとどうなるかな。
Ｃ：メリットは、２点間の距離の公式を覚えていればできるから、すぐにでも解き始めることができることかな。デメリットは、とにかく計算が大変。それに、いろいろな公式を知らないとできない。
Ｆ：２点間の距離の公式を使うときは、あまり図形の性質を考えなくてもいいというメリットもあるかな。さっき、隣の見たら、円周角とか、中心角を使っていたから。この方法だったら、あまり考えなくても計算が始められるよ。

Ａの「計算が大変だよね」という同意を求める発言に対して、ＢやＣが具体的に言い直している。表現する場合は、「大変」という抽象的な表現にとどまることなく、具体的にその大変さを表現することができるかがポイントとなる。これらは、全て言語的表現であるが、その中でも、「$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$、半角の公式、２倍角の公式」といった具体的な公式、定理などの名称を使って表現することで、よりその大変さが生徒同士の中で共有されることになる。具体的な公式、定理など名称も言語的表現ではあるが、ここでは、より記号的表現に近い。

○グループ２（三角比の定義を活用した解法のグループ）

このグループは、三角比の定義を活用した解法だけを考えた生徒が４名、２点間の距離の公式を活用した解法と三角比の定義を活用した解法の２通りで考えた生徒が１名、無答の生徒が１名の、合計６名のグループである。このグループは、問題文を読んで図を描くときの留意点について、時間をかけて議論していた。

Ａ：２点間の距離の公式を使うよりもすごく簡単な方法だよね。ぼくは、２点間の距離の公式で解いてから、いろいろ考えて三角比を使ったんだけど、こっちの方がすごく簡単に答えが出たよ（２通りの解法で考えた生徒）。
Ｂ：Ａ君の方法を見ると、ＰＣとかＰＡを求めるためには、ずっと楽だよね。でも、ＰＤを出すのが大変だよね。僕は答えまでいかなかったよ。
Ｃ：ＰＤも難しいけど。この問題読んで、この図を描くのがすごいよ。でも、何でこれ、ここの角度が 90°になるの（無答の生徒、∠ＡＰＣを指して）？
Ａ：直径の円周角だから 90°になるんだよ。
Ｃ：そうか、これは直径か。でも、直径の円周角は 90°だっけ。
Ｄ：直径だと中心角が 180°だから、その円周角は 90°になるんだよ。
Ｃ：そうか。分かった、分かった。そうすれば、ＰＣとＰＡは簡単だね。
Ｅ：だけど、ＰＤが難しいよね。だって、ＰＣ、ＰＡとは図も違うよね。何で？（Ｂと同様にＰＣ、ＰＡまでは求められたが、ＰＤを求めることができなかった生徒）

B：そうだね。ここが難しいよね。何で難しいだ。
一同：…
E：別々の三角形を作らなくちゃいけないから難しいんだよ。でも、２つの図で共通することはあるの？。
D：２つの図を比較してみれば分かるけど、Ｐのところが円周角になっていて、しかも、90°になっているじゃない。そして、うまく直径が使えるように三角形を描いていることが同じことなんだよ。
C：言っていることが分からない。
D：三角比は、直角三角形で考えるから、どうやって直角三角形を作るかがポイントなのかな。要するに、直角三角形を作るときに、直径が入って、そして、求めたいところが辺として入るように作ることが必要なんだよ。
F：なるほど、だいぶ分かったよ。
C：分かったけど。難しい。最初にそう考えることが難しいよね。最初から、三角比を使おうと考えないと描けないよね。

短い時間での話し合いの中に２つの論点がある。１つは、「直径の円周角が 90°」であることの表現である。教師も往々にして使ってしまう表現ではあるが、それがすぐに理解できない生徒もいることを改めて確認できた。表現する場合は、なるべく正確に、そして、学習したことに基づくことが大切である。他者に説明するときには、自分が分かる表現でも、相手に通じないこともあることを生徒自身も実感できていた。

もう１つは、「図の描き方」である。言語的表現から図的表現へ変換する際の考え方である。言語的に表現された文章をそのまま図的に表現するのではなく、ある意図をもって取り組まなければならないことが確認された。生徒にとっては難しいことであるが、数学の問題に取り組むときには大切なことの１つである。本問題の場合は、問題そのものに三角形は示されていない。しかし、線分の長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めることにつながり、角の大きさが与えられていることから、辺の長さと角の大きさの関係から「三角比」をイメージしなければならないことが分かる。また、円周上の４等分点であることから、直径が引かれ、その円周角が 90°であることを使って、直角三角形をイメージすることになる。問題の文章を読んだだけで、これだけのイメージをもって、言語的表現から図的表現に変換が行われる。それだけ、基本的な知識の理解が重要であることが分かる。その上での表現力である。

○グループ６（ベクトルの内積、成分を活用した解法のグループ）

このグループは、ベクトルの内積を活用した解法で考えた生徒が１名、ベクトルの成分を活用した解法で考えた生徒が１名、２点間の距離の公式を活用した解法とベクトルの成分を活用した解法の２通りで考えた生徒が１名、無答の生徒が１名の、合計４名のグループである。このグループでは、ベクトルを使うということはどういうことか、それをどう伝えればいいのかが議論されていた。特に、ベクトルの成分を活用した解法は、本問題の解決においては、ベクトルの大きさしか考えないので、メリットは大きくない。それぞれの生徒が納得するような説明ができるかどうかがポイントであった。

A：ベクトルを使った解き方というけど、２つあるけどどちらがいいの？（無答の生徒）
B：私とＣ君がやったのは、ベクトルの成分を考えて、ベクトルの大きさを求めたんだよね。Ｄさんのは、何を使っているの？

Ｄ：ちょっと前にベクトルを勉強したときに、大きさの２乗を計算することが印象に残っていたから、とりあえず、２乗してみたの。そしたら、分かりやすいベクトルの大きさと内積で表現できたので、そのままやってみたら、うまくいったの。でも、ＰＣだけしか終わらなかった（ベクトルの内積を活用した解法で考えた生徒)。

Ｃ：ぼくは、ベクトルの成分を計算したのと、ベクトルを使わずに２点間の距離の公式を使ってやってみたんだけど、実は、ほとんど同じだったんだ（２通りの解法で考えた生徒)。

Ａ：同じ？何が同じなの？

Ｃ：計算の仕方というか、中身というか…。計算が全く同じだったんだ。

Ｂ：そうか、ベクトルの大きさを求めるということは、２点間の距離を求めることと同じことだよ。ベクトルの大きさも点と点の間の距離を求めているだけだもん。

Ｃ：ということは、ベクトルを使うということは、Ｄさんがやったようにやらないとだめなのかな…。

Ａ：Ｄさんがやった方法は、どんな方法なの。何が違うの？

Ｄ：私がやったのは、成分は考えずに、とりあえず、$\overrightarrow{PC}$の大きさを２乗してみたの。そしたら、$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OC}$が出てきて、その大きさは１だから、内積だけで表せたの。その内積も、ベクトルの大きさが１だから２つのベクトルの角だけで表せるから、うまくいったの。

Ａ：えっ。何で２乗したの？

Ｂ：そうか、$\overrightarrow{PC}$は、大きさが１の２つのベクトルの足し算で表せて、しかも、そのなす角が 2θ とわかっているから、うまくいくのか。何で２乗したかというと、２乗すると２つのベクトルの大きさと内積で表せるからだよ。

Ａ：でも、どうして、この問題を読んだときにベクトルの大きさの２乗を考えようと思うんだい。ベクトルとも何とも書いていないのに。

Ｃ：線分の長さを求めることが問題だから、それは、ベクトルの大きさを求めることだと思えればいいんだよ。ぼくも、そこまでは気が付いたんだけど、ベクトルの大きさを求めるので、成分を計算したくなっちゃったんだよね。

Ｄ：私は、何となく２乗したけど、本当は、わかっていることを確認して、$\overrightarrow{OP}$や$\overrightarrow{OC}$が大きさ１のベクトルだから、$\overrightarrow{PC}$の大きさの２乗は$\overrightarrow{OP}$や$\overrightarrow{OC}$の大きさで表せることに気が付かなくちゃいけないんだよね。それに、∠ＰＯＡがわかっているということは、$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{OC}$のなす角も分かっていることに気が付くとすぐだよね。

このグループでは、ベクトルの成分を活用した解法は、座標平面上の２点間の距離の公式を活用した解法と同じであり、ベクトルの成分を活用した解法で考える意味を見いだせなかった。そこで、もう１人の考えたベクトルの内積を活用した解法について検討した。しかし、この問題を読んだときに、ベクトルの大きさの２乗を考えることが解決につながると見通すことができる知識がなかったことを反省していた。ここでも、図的表現から数学的な性質をどれだけ見出せるかがポイントであることが確認できた。線分の長さをベクトルの大きさとして捉えたり、その大きさを求めるための材料（ここでは、大きさが１のベクトルの存在、なす角の大きさなど）を図的表現に変換している際に気付いたりすることが大切となる。

また、このグループには、余弦定理を活用した解法で考えた生徒がいなかったため、グループ内の検討のときには、ベクトルの内積を活用した解法は、実は余弦定理を活用した解法と同じであることには気付くことができなかった。このことは、全体発表の際に余弦定理を活用した解法のグループの発表を聞いて気付いた。

②全体での発表会

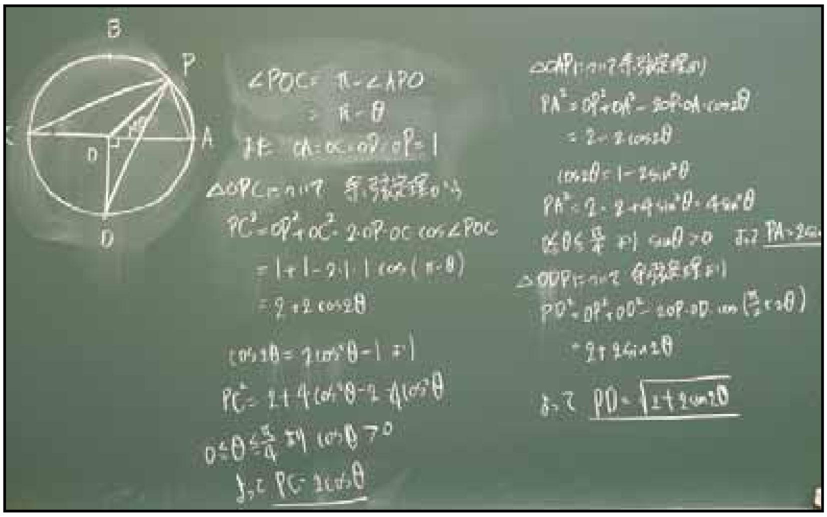
各グループに、解法についての説明、解法のメリット・デメリットについて発表させ、その後、質疑の時間を取った。発表は、質疑も含めて１班５分程度とした。また、発表の際には、板書したものを利用して、話し方に留意し、聞き手に分かりやすく説明するよう促した。主な発表内容の要点、質疑の様子は次のとおりである。

○グループ３（余弦定理を活用した解法のグループ）の発表

発表内容

☆問題を解決するために

- 問題文を図に表す。
- 線分の長さを求めることは、辺の長さを求めることだから、求める線分を辺とする三角形を探す。
- 三角形において、２辺の長さとその間の角の大きさが分かっているので、余弦定理を使うことができる。
- 三角関数についての基本的な知識（余弦定理、２倍角の公式、半角の公式、相互関係）をしっかり身に付ける。
- 最後まで計算することができる計算力を付ける。



☆解法のメリット・デメリット

メリット　・余弦定理は比較的やさしい知識なので、解法の方針が立ちやすい。

デメリット　・計算力を必要とする。

・三角関数の知識を必要とする（覚えていないと使えない）。

質疑

- 質問１「なぜ、余弦定理を使おうと思ったんですか？」

  回答「長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めることだと思いました。そして、三角形を書き始めたら、余弦定理が使えることに気が付きました。」

- 質問２「僕たちの班では、ＰＤは $\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\ \sin\theta$ になったんですが、結果が違うと思うんですが？」（三角比の定義を活用した解法を考えた班から）

  回答「 $\sqrt{2+2\sin 2\theta}$ じゃないの…？」

  教師「それについては発表が終わったらみんなで検討してみましょう」

- 質問３「僕たちの班はベクトルの内積を使って計算したんだけど、計算がほとんど同じです。これは、どうしてでしょうか。」

  回答「ベクトルの内積は考えていなかったので分かりません。」

  教師「グループ以外でもいいですが、誰か、今の質問に答えられる人はいますか」

  一同沈黙

  教師「ベクトルの内積で考えたグループはどうですか？」

  生徒「…」

  教師「それでは、発表が終わったらみんなで検討してみましょう。」

このグループは、解法についての留意点を箇条書きで準備し、それを読み上げた。簡潔な言葉で、分かりやすく発表することができた。ただし、自分たちの思いや感情までは述べることはできなかったので、ややあっさりとした発表になってしまった。箇条書きにしたメモを読み上げてしまったことで、口頭による発表ではあるが、記号的表現がやや多く、言語的表現によるよさを発揮することができなかった。しかし、板書した解答は、最初のワークシートに表現したものと比べると、式の羅列ではなく、それぞれについて説明を加え、分かりやすい記述となっていた。

質疑では、余弦定理を活用しようとした理由を尋ねられた。本質を問うよい質問であったが、それに対する回答も、図的表現から数学的性質を見抜くポイント（線分の長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めること）が示されていて、聞き手の生徒も納得していたようであった。しかし、質問２、質問３のような想定外の質問に対しては、戸惑いが見られた。特に、質問３については、他の解法との関わりもあったので、その場で少し考えさせてみた。しかし、よいアイディアが出なかったので、発表後に全員で再度考えてみることにした。

○グループ４（正弦定理を活用した解法のグループ）の発表

発表内容

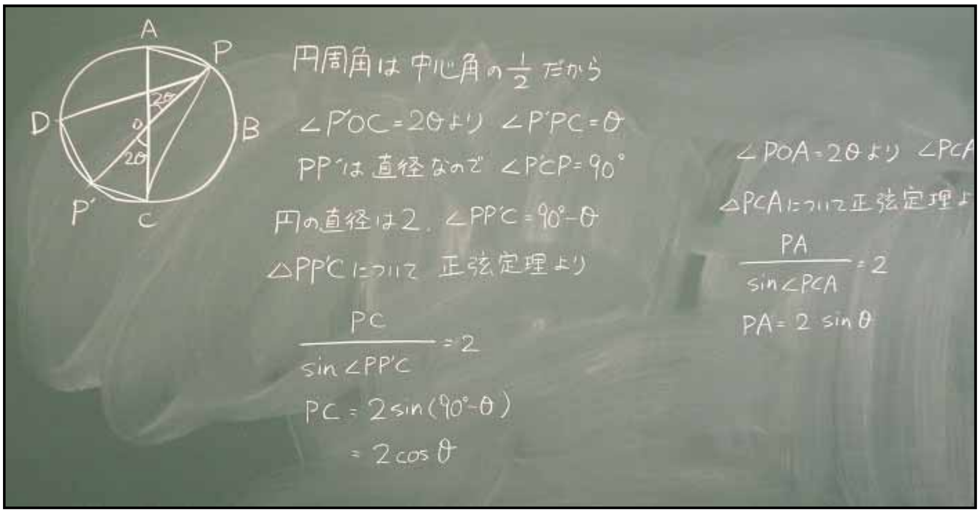
☆問題を解決するために

・長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めることと同じである。
・図を描くと、三角形とその外接円がある。したがって、正弦定理が使えると考えた。
・正弦定理を使うためには、１つの角とその対辺の長さ、そして、外接円の直径が必要なので、図形の性質を利用して、求める辺に対する角の大きさを求めようと考えた。
・Ｐ’を考えて、ＰとＰ’を結ぶ。
・正弦定理、円周角と中心角の関係、90°－θの公式を知っていれば解決することができる。ただし、ＰＣ、ＰＡは求めることができたが、ＰＤを求めることができなかった。他の方法を考えないといけない。

☆解法のメリット、デメリット

メリット　　・１年生で学んだ三角比の知識だけで求めることができる。
　　　　　　　（２倍角の公式や半角の公式を忘れても大丈夫。）
　　　　　　・他の解法に比べると計算が楽。

デメリット　・ＰＤを求めることができなかった。
　　　　　　・補助線を引くなど、図形の性質をいろいろと考えないといけない。



質疑

・質問１「どうしてＰ'を引くことを思いついたんですか。」

回　答「ＰＣを求めるときに、Ｐを通る直径を引けば、三角形ができて正弦定理が使えると気付いたからです。」

質　問「ＰＣを求めるときに、△ＰＣＡで正弦定理を使ってもいいじゃないですか。」

回　答「…本当だ。Ｐ'はいらないのか…。」

生徒１「でも、この場合、∠ＤＯＰ'＝90°－2θだから、∠ＤＰＰ'がその半分で 45°－θとなるから、∠ＤＰ'Ｐを求めることができて、そうすれば、正弦定理を使ってＰＤを求めることができるじゃないかな。」

回　答「そうか、そうすれば、ＰＤを求めることができるね。ということは、Ｐ'を考えた意味も出てくるんだ。」

・質問２「△ＰＰ'Ｃも△ＰＣＡも直角三角形だから、わざわざ正弦定理を使わなくても、２番目のグループのように三角比の定義を使って求められたんじゃないですか。」

回　答「直角三角形か…。さっきのグループのように、三角比でできるんだね。」

質　問「だとしたら、この回答はあんまりよくないということですか？」

教　師「皆さんはどう思いますか。」

生徒２「三角比でできるんだったら、その方が楽だよ。計算自体は、さっきと同じだし。」

教　師「この解法のよさは何だろう。」

生徒３「計算は、２点間の距離の公式や余弦定理より簡単にできるところだと思います。でも、三角比でも同じ計算なので、よさってあるのかな。」

教　師「では、三角比の解法と比べると、正弦定理を使うことのよさは何だろう。」

生徒４「正弦定理とか余弦定理は、直角三角形じゃなくてどんな三角形でも使えることがよいことだったから、この場合も直角三角形にならないときに使えるんじゃないの。」

生徒５「逆に三角比は直角三角形でしか使えなかったから、条件が変わると使えないかも知れない。」

教　師「そうだね、三角比の定義を活用した解法に比べると、それがこの解法のメリットでもあるよね。」

このグループの発表では、質疑に時間を割いた。Ｐ'の必要性について質問があり、担当グループが必要でないことを認める一幕もあった。しかし、他の生徒の発言によって、グループ内では求めることができなかったＰＤの解法が確認されたことで、Ｐ'の必要性を全体で共有することができた。

また、正弦定理を活用することのよさについても同様である。本問題では、三角比の定義を活用すれば解決に至る。しかし、この問題は特殊な場合であり、一般化を図る上では、正弦定理の活用は有効な手段の１つであることを、生徒自身が自らの言葉で表現したことに価値がある。１番よい解法、１番楽な解法しか考えなかった生徒が、様々な解法のよさを考える際に問題の状況を発展的に考えることができた。この場合は、教師の誘導による生徒の発言ではあったが、生徒だけでは考えることができないときには、教師が介在し、発展的に捉える視点を投げかけることも大切であると感じた。

③授業後の振り返り

〇全体での振り返り

６つのグループの発表後、全体での課題であった「ＰＤの表現」、「余弦定理を活用した解法とベクトルの内積を活用した解法との相違点」について、教師がリードしながら意見を交換した。

まず、「ＰＤの表現」については、ＰＤ＝$\sqrt{2+2\cos 2\theta}$ を$\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$に変形した方がその後の問題に取り組みやすいことを確認し、その変形の方法について意見を求めた。２倍角の公式から平方完成することがなかなか出なかったが、試行錯誤の結果、どうにか変形することができた。

「余弦定理を活用した解法とベクトルの内積を活用した解法との相違点」については、自由に意見を求めた。生徒は、最初は困惑していたが、$|\overrightarrow{PC}|^2$を展開した式が余弦定理の式と同じであることに気付き、計算上は同じであることを納得した。しかし、計算上では同じであるが、考える出発点が全く違うという意見が出てきた。それぞれの解法のよさを認識することができてきたと思われる。

最後に、本時の授業についての感想について発表してもらった。「内容が難しかった」、「いろいろな解き方があることを知った」、「おもしろかった」という感じたことをそのまま述べる生徒もいた。しかし、「問題を読んだときの最初のイメージが大切で、いろいろなイメージがもてるようになるには、基本的なことをしっかりと覚えておかなければならない」といった意見も出された。何人かの意見を発表させた後、「今回の授業で分かったこと」、「今自分に必要なこと」、「授業の感想」の観点で、自由記述でまとめを行った。以下に主な生徒のものを示す。

1つの問題でも、複数の解法があるものには
ちゃんとメリットやデメリットがそれぞれあって、
自分に合わせた解法をよく考えたいと思った。
計算力を上げること！
あと、思考力（今まで習ったことでできること全ての可能性を
考えること）を高める！！
難しかったが、わかるとスッキリ！！

1つの問題を解くだけでも何通りも解法があるが、
それぞれメリット・デメリットがあり、問題によって、
解法の使い方を変えるだけで、より簡単に、
速く解けるようになるということ。
様々な角度から問題を見ること。
計算力を高めること
いつもの授業よりおもしろいと思いました。
（解いたものの解説は答え冊子とか見て家でもできるので、
授業では、いろんな解法や見方を説明してほしいです。）
今回の授業のように

3　実践を振り返って

多くの生徒は、手に入れた考え方を自分の思うように使うことが出来ないと、授業していて常々感じていた。生徒は問題を解く際に、模範解答とされる解答例に近づけることを目標としていることが多い。中には、示された解答例と自分の解答が異なっていると、自分のものは誤答と考える生徒もいる。単元毎の学習では、ある解法が定着するまで繰り返し練習することが必要である。しかし、総合的な演習になっても、その定着された解法だけに縛られて、その解法に固執してしまう。したがって、基礎がある程度身に付いた後、単元の枠を越えて考えることができる問題に取り組むことが重要となる。

今回の取組を通して、授業を進める際に留意しなければならないこととして、次の２つのことを感じた。

①数学的な表現力を育成することの重要性

自分の考え方を言葉、式、図で表すことができるようになるためには、問題に示された言葉、式、図から数学的な性質を感じ取ることが大切である。数学的な表現力を育成することは、言葉、式、図の双方向の情報交換を可能にすることである。そして、その情報交換の中で感じることが新たな「発想」につながる。今回の取組では、問題を読んで図に表したときに、線分の長さをどう解釈するかで解法が異なった。線分の長さそのもので考えた生徒は、２点間の距離の公式を活用した。三角形の辺の長さと考えた生徒は、三角比の定義、余弦定理、正弦定理を活用した。ベクトルの大きさと考えた生徒は、ベクトルの成分や内積を活用した。その最初の感じ方が大切であることを生徒自身が感じ取ってくれたことが、大きな成果であった。また、グループによる検討の際に他の生徒に理解してもらえるように説明すること、クラス全体の前で解法やそのメリット・デメリットを発表し質問に答えること、これらのことの難しさを生徒が感じ、そして、何とかして分かってもらおうと努力したことが、生徒の数学を学ぶ姿勢によい影響を与える。

②数学という「言語」を使う場面の設定

生徒に対して「よく考えなさい」と言っていた。しかし、教師主導の授業を展開するだけは、生徒は「考える」ことはできない。消化しきれない知識の波に飲み込まれ、ただ解法を覚えるだけになってしまう。「考える」ことができる生徒を育成するためには、授業の中で、考える場面を適切に設定するとともに、それを表現させる場面を設けることが必要である。表現させる場面としては、紙の上に表現させるだけではなく、友達と話し合ったり、クラス全体に説明したりする場面を設定することが有効となる。数学は、「科学を表現する言語でもある」という言葉がある。その数学の理解を深めさせ、数学を学ぶ意義を実感させるためには、生徒自身が数学という「言語」を使う場面を授業の中で随所に設定することが大切である。

おわりに

生徒に数学が嫌いな理由を尋ねると、耳慣れない言葉や記号が氾濫し、具体的に何をしているか、何をすればいいのかが分からないと答える生徒がいる。小学校の算数は好きだったが、中学校、高等学校と数学の学習が進むにつれて嫌いになる理由の１つと思われる。一方で、生徒が問題を解けるようにするために、教師は、本来生徒に考えさせなくてはならないことを教えてしまいがちである。そのため、生徒は、考えることのよさを理解できず、耳慣れない言葉や記号の並べ方を覚えることが問題を解くことだと錯覚してしまうのではないだろうか。今回取り組んだ数学的な表現力の育成は、その改善の１つの方策となる。生徒の実態調査、事例の作成を通して得られた成果と課題から、数学的な表現力を育成するためには、次の２点について留意していかなければならない。

表現すること

数学の授業の中で、生徒に何を表現させるのか、どう表現させるのかを教師が十分認識する必要がある。高等学校数学科の指導では、表現様式として操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現が考えられる。生徒は、与えられた課題を吟味し、表現様式間の変換を行うことで、課題の状況を把握し、解決の糸口を探り出し、結論に向かうことになる。したがって、授業の中では、意図的に表現様式間の変換を行わせるとともに、何を目的に変換を行うのか、変換された表現様式から何を得られるのかを生徒が実感できるようにする必要がある。各事例では、生徒の話し合い活動を中心に授業が展開されている。その中で、図に表して数学的な性質を見抜き解決の糸口を探り出したり、自分自身の言葉で表現して相手に伝えることで理解を深めたりしている。授業の中で、生徒自身に様々な表現様式で表現させ、変換させることがこれからの数学科の指導において求められる。

表現力を育てる手立て

本来、数学では、根拠を明らかにして筋道を立てて理論を構成し、誰もが納得するために厳密に表現することが求められてきた。現在の学校における数学では、「誰もが納得する」ことは、教師には分かる授業の実践として求められ、生徒にはペーパーテストへの記述として求められている。しかし、生徒が自分自身も含めて誰もが納得する表現を習得するまでには、様々な思考を必要とする。その思考の場面を、一人で行わせるのではなく生徒同士で行わせることが有効である。図（図的表現）や記号、式（記号的表現）などを日常使われている言語（言語的表現）を利用して生徒同士で話し合わせることで、数学的内容のイメージが豊かになるとともに、その深い理解へとつながる。また、他者が納得できるように表現しようとしたり、他の生徒が表現したことを聞いたりして、自らの思考力や表現力をより高めることが可能となる。

事例１では、クラス全体で解法を吟味する場面で、自分の考えを発表したり、他の生徒の考えを聞いたりすることによって、「数学的に表現すること」の意義を実感させることができた。

事例２では、グループによる操作活動を取り入れることで、数学の抽象的な概念を実感を伴って理解させることができた。特に、操作的表現を表（図的表現）に変換し、さらに、式（記号的表現）に変換することをコミュニケーション活動を通して全員で共有することで、それぞれの考え方のよさを実感させることができた。

事例３では、グループによる単元を越えた解法の検討に取り組ませることで、考える場面、表現する場面を適切に設定することができた。

生徒主体の授業が求められるようになって久しい。生徒に数学を学ぶ意義を実感させ、そして、生徒の数学の力を伸ばすためにも、これまで以上に考えさせる機会、表現させる機会を工夫して設定する必要があるのではないだろうか。

＜参考文献＞

・『高等学校学習指導要領解説　数学編理数編』（平成11年12月）
・『中学校学習指導要領解説　数学編』（平成20年７月）
・中央教育審議会答申『幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）』（平成20年１月）
・『クレアール（ＣＲＥＡＲ）』（株式会社ニチブン　平成11年）
・『中等教育資料』（株式会社ぎょうせい　平成20年11月号～平成21年１月号）

高等学校における教科指導の充実
数　学　科
数学的な表現力を高める指導の工夫

発　行　　平成21年3月
栃木県総合教育センター　研究調査部
〒320-0002　栃木県宇都宮市瓦谷町1070
TEL 028-665-7204　　FAX 028-665-7303
URL http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/