事例３　単元の枠を越えた多様な解法への挑戦
～数学Ⅱ、数学Ｂにおける指導の工夫～

１　事例の概要

(１)指導の改善

テストの解答状況を見ると、自らの考えを適切に表現できる生徒が少ないことが分かる。解答が画一的であったり、無答であったりする生徒の割合も年々増えている。そこで、生徒が自ら考え、それを適切に表現できる力を身に付けさせるために、次に示す２つのことについて指導の改善に取り組んだ。

１つは、問題の設定についてである。教科書、問題集の問題は単元毎に編集されているため、問題に取り組む生徒は自分自身で解法を制限しているところがある。その単元で扱った解法を思い出せなければ手も足も出ないことが、無答の生徒の割合の増加にもつながっている。そこで、条件を付け加えたり、条件を取り除いたりすることで、自由に発想できる問題を設定して取り組ませることにした。また、このことは、授業の中で別解を示したときに、あまり興味を示さない生徒への対策の１つにもなる。数学では、効率よく問題を解決することも求められる。しかし、効率よく問題を解決するためには、様々な解法のメリット、デメリットも同時に理解していなければならない。そのためにも、適切な問題の設定が重要となる。

もう１つは、設定した問題の扱い方についてである。問題を解かせるだけでなく、それをもとに話し合わせることで、表現することの難しさ、大切さを実感させたい。一人で黙々と数学の問題に取り組むだけではなく、数学を他者とのコミュニケーションの道具として捉え、考え方を分かりやすく伝え、考え方を共有することも、数学の学習を進める上では重要なことである。その中で、図的表現、言語的表現、記号的表現の相互の変換を考え、どのように表現すれば他者に分かりやすく伝えられるかを考えさせたい。

(２)多様な考え方ができる問題の設定

授業で使用している問題集の「三角関数」の単元で出題されていた問題を、次のように改題し（点Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄの座標が与えられていたものを取り除いた)、数学Ⅱ「図形と方程式」「三角関数」、数学Ｂ「ベクトル」の学習が終わった段階で取り組ませた。

（問題）中心をＯとし、半径１の円がある。この円周上に円周を４等分する点Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄをとる。点Ｐを弧ＡＢ上にとり、$\angle \mathrm{POA}=2\theta$（$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$）とするとき、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さをθを用いて表せ。

問題集では、「三角関数」の単元に掲載されており、点の座標が与えられていたので、ほぼ全ての生徒が「２点間の距離の公式」を活用し、「三角関数」の知識を用いて式を変形して問題の解決にあたっていた。しかし、座標を与えないことによって、座標を自ら設定して考えたり、正弦定理・余弦定理などの知識を用いて考えたり、ベクトルを用いて考えたりするなど様々な考え方で取り組むことが期待できる。「図形と方程式」、「三角関数」、「ベクトル」の単元の学習では、生徒はそれぞれの基本的な知識については理解したが、その知識を活用するまでには至っていない。そこで、本問題に取り組ませることで、それぞれの知識の活用方法について考えさせることにした。

本問題では、言語的表現を図的表現に変換し、その図的表現から数学的な性質を見いだし、解決に向かうことが求められる。本問題の解決については、次の４つのパターンが考えられる。

〇それぞれの点を座標で表すことで、２点間の距離の公式を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。
〇余弦定理・正弦定理を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。
〇三角比の定義を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。
〇ベクトルの内積を用いて、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さを求める。

さらに、発展として次の問題を用意した。

（問題）座標平面上に、原点Ｏを中心として、４点Ａ$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$、Ｂ$(0, 1)$、Ｃ$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$、Ｄ$(0, -1)$を通る円がある。点Ｐを弧ＡＢ上にとり、∠ＰＯＡ＝2θ（$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$）とするとき、ＰＣ、ＰＡ、ＰＤの長さをθを用いて表せ。

２　指導の実践

(１)授業のねらいと展開の工夫

①授業のねらい

次のことをねらいとして設定した。

・基本的知識を確認するとともに、それぞれの解法のよさを実感する。
・図的表現、言語的表現、記号的表現の価値を実感する。
・誰が見ても誤解がなく、聞き手を納得させる表現方法、発表者の考えを引き出す質問方法等について考えることができる。

②展開の工夫

実施する授業は2.5時間とした。１時間目の授業の後半にワークシートを配付し、20分間の時間をかけて、問題に取り組ませた。授業後にワークシートを回収し、解法ごとにグループ分けを行った。２、３時間目は、グループに分かれて解法を検討し、全体で発表・質疑を行った。その後、振り返りを行い、分かりやすい表現、表現からの情報の読み取り等について確認した。グループでの協議のポイント、全体での発表・質疑のポイント、振り返りのポイントは以下のとおりとした。

〇グループによる協議のポイント
・解法の検討（グループ内では全員が解法を理解する）
・解法について分かりやすく説明するための工夫（表現方法の検討）
・解法のメリット、デメリット

〇全体での発表・質疑のポイント
・聞き手にとって分かりやすい説明方法（話し方、話す言葉、板書等）
・意図を明確にした質問（不明な点、聞きたいことを明確にする）

〇振り返りのポイント
・それぞれの解法のよさの確認
・説明方法の確認

(２)生徒の解答の状況とグループ編成

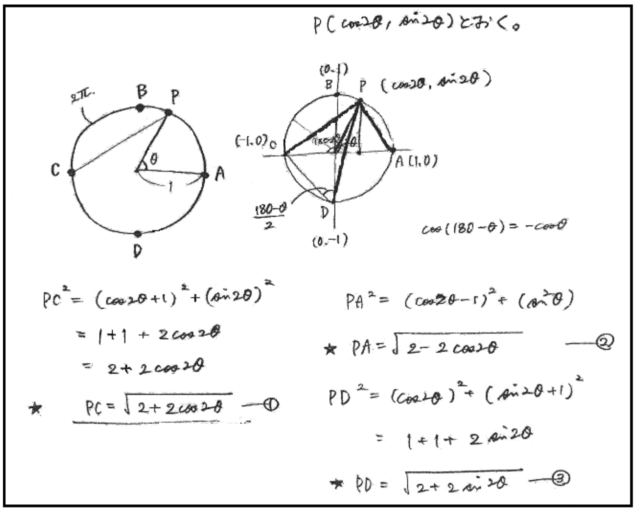
取り組んだ問題を回収し、解答の状況を確認した。その状況は、次のとおりであった。

	解　　法	人数(人)
１通りの解法	①座標平面上で２点間の距離の公式を活用した解法	2
	②三角比の定義を活用した解法	4
	③余弦定理を活用した解法	9
	④正弦定理を活用した解法	2
	⑤ベクトルの内積、成分を活用した解法	2
２通りの解法	①＋②	1
	①＋③	3
	①＋⑤	1
	②＋③	1

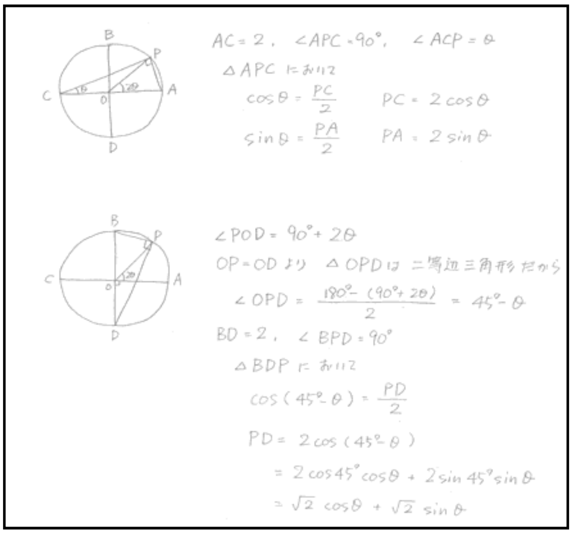
	解　　法	人数(人)
３通りの解法　①＋②＋③		1
	無　答	4
	合　計	30

２通り以上の解法を試みた生徒は７名（23.3%）にとどまった。また、余弦定理を活用した解法を試みた生徒は 13 名（43.3%）、座標を活用した解法を試みた生徒は７名（23.3%）であった。発想としては単純な、座標平面上で２点間の距離の公式を活用した解法を試みる生徒が少ないことは意外であった。また、ワークシートを見ると、図を描いて考えているが、そこから複数の数学的な性質を見抜けない生徒が多い。１つ１つの知識は身に付いていても、それを活用する力が不十分であることが分かる。以下に、生徒の解答の主なものを示す。

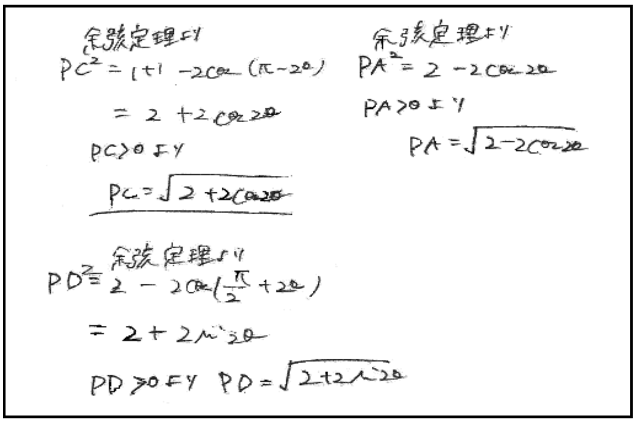
○座標平面上で２点間の距離の公式を活用した解法



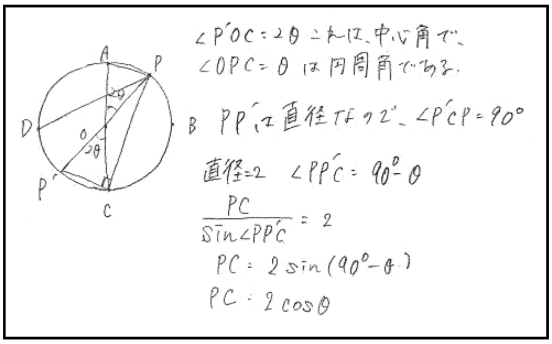
○三角比の定義を活用した解法



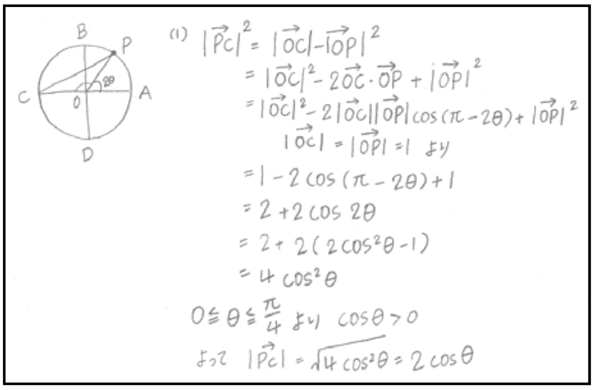
○余弦定理を活用した解法



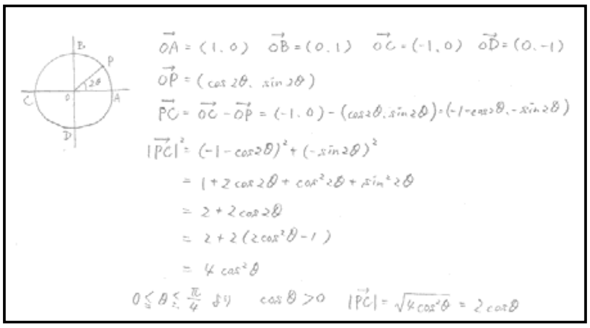
○正弦定理を活用した解法



○ベクトルの内積を活用した解法



○ベクトルの成分を活用した解法



最後まで導くことができない生徒、途中の計算に誤りがあった生徒もいたが、解法の方針としては、上記の６つの解答のいずれかに該当していた。そこで、それぞれの解法毎にグループ分けをすることにした。ただし、ベクトルを活用した解法を試みた生徒は、内積を活用した解法、成分を活用した解法ともそれぞれ人数が少なかったので、２つの解法を１グループとした。その結果、５つの解答のパターンでグループ分けを実施し、クラス 30 名を６グループに分けることにした。また、２通り、３通りの解法を試みた生徒は、その解法の中で人数の少ないグループに振り分け、無答の生徒はいずれかのグループに振り分けることで、人数の調整を行った。以下がそのグループ分けと人数である。

グループ編成(合計 30 名)

グループ１	２点間の距離の公式を活用した解法のグループ	６名
グループ２	三角比の定義を活用した解法のグループ	６名
グループ３、４	余弦定理を活用した解法のグループ	６名＋５名
グループ５	正弦定理を活用した解法のグループ	３名
グループ６	ベクトルの内積、成分を活用した解法のグループ	４名

(３)２、３時間目の授業の実践

①グループでの検討

授業の最初にグループを示し、司会者、発表者を決めて、司会者を中心に解法について検討させた。時間は 20 分間とした。グループでの検討のポイントとして、「解法の検討（グループ内では全員が解法を理解すること)」、「解法について分かりやすく説明するための工夫（表現方法の検討)」、「解法のメリット、デメリット」の３点を挙げた。以下にそれぞれのグループの議論の様子を示す。

○グループ１(２点間の距離の公式を活用した解法のグループ)

このグループは、２点間の距離の公式を活用した解法だけを考えた生徒が２名、２点間の距離の公式を活用した解法と余弦定理を活用した解法の２通りで考えた生徒が３名、無答の生徒が１名の、合計６名のグループである。このグループでは、解法と解法を説明するための工夫については、すぐに議論がまとまっていた。議論が集中したのは、解法のメリット、デメリットについてであった。

Ａ：考え方としては２点間の距離の公式を覚えていればすぐに思いつくけど、実際に始めると、計算が大変だよね。（無答の生徒）
Ｂ：$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ も知らないといけないし、半角の公式や２倍角の公式も知らないといけないし、結構大変だよね。

Ｃ：ぼくは、半角の公式を思い出せなかったから、中途半端な答えになっちゃったよ（前ページに示した解答の生徒）。
Ｄ：私は、最初にこの２点間の距離の公式を使ってやってみて、その後、余弦定理を使ってみたけど、どっちでやっても計算は大変だったよ。でも、まだ余弦定理の方が楽だったかな（２通りの解法で考えた生徒）。
Ａ：余弦定理でも大変なの？だったら、余弦定理よりも、２点間の距離の公式の方が楽かな。結局、数学は計算力がないとだめなんだね。
Ｃ：余弦定理を使っても、半角の公式を使うの？
Ｄ：最後には使うことになるかな。
Ｃ：そうか、大変だね。やっぱり。
Ｅ：そうすると、この解法のメリット、デメリットを挙げるとどうなるかな。
Ｃ：メリットは、２点間の距離の公式を覚えていればできるから、すぐにでも解き始めることができることかな。デメリットは、とにかく計算が大変。それに、いろいろな公式を知らないとできない。
Ｆ：２点間の距離の公式を使うときは、あまり図形の性質を考えなくてもいいというメリットもあるかな。さっき、隣の見たら、円周角とか、中心角を使っていたから。この方法だったら、あまり考えなくても計算が始められるよ。

Ａの「計算が大変だよね」という同意を求める発言に対して、ＢやＣが具体的に言い直している。表現する場合は、「大変」という抽象的な表現にとどまることなく、具体的にその大変さを表現することができるかがポイントとなる。これらは、全て言語的表現であるが、その中でも、「$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$、半角の公式、２倍角の公式」といった具体的な公式、定理などの名称を使って表現することで、よりその大変さが生徒同士の中で共有されることになる。具体的な公式、定理など名称も言語的表現ではあるが、ここでは、より記号的表現に近い。

○グループ２（三角比の定義を活用した解法のグループ）

このグループは、三角比の定義を活用した解法だけを考えた生徒が４名、２点間の距離の公式を活用した解法と三角比の定義を活用した解法の２通りで考えた生徒が１名、無答の生徒が１名の、合計６名のグループである。このグループは、問題文を読んで図を描くときの留意点について、時間をかけて議論していた。

Ａ：２点間の距離の公式を使うよりもすごく簡単な方法だよね。ぼくは、２点間の距離の公式で解いてから、いろいろ考えて三角比を使ったんだけど、こっちの方がすごく簡単に答えが出たよ（２通りの解法で考えた生徒）。
Ｂ：Ａ君の方法を見ると、ＰＣとかＰＡを求めるためには、ずっと楽だよね。でも、ＰＤを出すのが大変だよね。僕は答えまでいかなかったよ。
Ｃ：ＰＤも難しいけど。この問題読んで、この図を描くのがすごいよ。でも、何でこれ、ここの角度が 90°になるの（無答の生徒、∠ＡＰＣを指して）？
Ａ：直径の円周角だから 90°になるんだよ。
Ｃ：そうか、これは直径か。でも、直径の円周角は 90°だっけ。
Ｄ：直径だと中心角が 180°だから、その円周角は 90°になるんだよ。
Ｃ：そうか。分かった、分かった。そうすれば、ＰＣとＰＡは簡単だね。
Ｅ：だけど、ＰＤが難しいよね。だって、ＰＣ、ＰＡとは図も違うよね。何で？（Ｂと同様にＰＣ、ＰＡまでは求められたが、ＰＤを求めることができなかった生徒）

Ｂ：そうだね。ここが難しいよね。何で難しいだ。
一同：…
Ｅ：別々の三角形を作らなくちゃいけないから難しいんだよ。でも、２つの図で共通することはあるの？。
Ｄ：２つの図を比較してみれば分かるけど、Ｐのところが円周角になっていて、しかも、90°になっているじゃない。そして、うまく直径が使えるように三角形を描いていることが同じことなんだよ。
Ｃ：言っていることが分からない。
Ｄ：三角比は、直角三角形で考えるから、どうやって直角三角形を作るかがポイントなのかな。要するに、直角三角形を作るときに、直径が入って、そして、求めたいところが辺として入るように作ることが必要なんだよ。
Ｆ：なるほど、だいぶ分かったよ。
Ｃ：分かったけど。難しい。最初にそう考えることが難しいよね。最初から、三角比を使おうと考えないと描けないよね。

短い時間での話し合いの中に２つの論点がある。１つは、「直径の円周角が 90°」であることの表現である。教師も往々にして使ってしまう表現ではあるが、それがすぐに理解できない生徒もいることを改めて確認できた。表現する場合は、なるべく正確に、そして、学習したことに基づくことが大切である。他者に説明するときには、自分が分かる表現でも、相手に通じないこともあることを生徒自身も実感できていた。

もう１つは、「図の描き方」である。言語的表現から図的表現へ変換する際の考え方である。言語的に表現された文章をそのまま図的に表現するのではなく、ある意図をもって取り組まなければならないことが確認された。生徒にとっては難しいことであるが、数学の問題に取り組むときには大切なことの１つである。本問題の場合は、問題そのものに三角形は示されていない。しかし、線分の長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めることにつながり、角の大きさが与えられていることから、辺の長さと角の大きさの関係から「三角比」をイメージしなければならないことが分かる。また、円周上の４等分点であることから、直径が引かれ、その円周角が 90°であることを使って、直角三角形をイメージすることになる。問題の文章を読んだだけで、これだけのイメージをもって、言語的表現から図的表現に変換が行われる。それだけ、基本的な知識の理解が重要であることが分かる。その上での表現力である。

○グループ６（ベクトルの内積、成分を活用した解法のグループ）

このグループは、ベクトルの内積を活用した解法で考えた生徒が１名、ベクトルの成分を活用した解法で考えた生徒が１名、２点間の距離の公式を活用した解法とベクトルの成分を活用した解法の２通りで考えた生徒が１名、無答の生徒が１名の、合計４名のグループである。このグループでは、ベクトルを使うということはどういうことか、それをどう伝えればいいのかが議論されていた。特に、ベクトルの成分を活用した解法は、本問題の解決においては、ベクトルの大きさしか考えないので、メリットは大きくない。それぞれの生徒が納得するような説明ができるかどうかがポイントであった。

Ａ：ベクトルを使った解き方というけど、２つあるけどどちらがいいの？（無答の生徒）
Ｂ：私とＣ君がやったのは、ベクトルの成分を考えて、ベクトルの大きさを求めたんだよね。Ｄさんのは、何を使っているの？

Ｄ：ちょっと前にベクトルを勉強したときに、大きさの２乗を計算することが印象に残っていたから、とりあえず、２乗してみたの。そしたら、分かりやすいベクトルの大きさと内積で表現できたので、そのままやってみたら、うまくいったの。でも、ＰＣだけしか終わらなかった（ベクトルの内積を活用した解法で考えた生徒)。

Ｃ：ぼくは、ベクトルの成分を計算したのと、ベクトルを使わずに２点間の距離の公式を使ってやってみたんだけど、実は、ほとんど同じだったんだ（２通りの解法で考えた生徒)。

Ａ：同じ？何が同じなの？

Ｃ：計算の仕方というか、中身というか…。計算が全く同じだったんだ。

Ｂ：そうか、ベクトルの大きさを求めるということは、２点間の距離を求めることと同じことだよ。ベクトルの大きさも点と点の間の距離を求めているだけだもん。

Ｃ：ということは、ベクトルを使うということは、Ｄさんがやったようにやらないとだめなのかな…。

Ａ：Ｄさんがやった方法は、どんな方法なの。何が違うの？

Ｄ：私がやったのは、成分は考えずに、とりあえず、$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$の大きさを２乗してみたの。そしたら、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$が出てきて、その大きさは１だから、内積だけで表せたの。その内積も、ベクトルの大きさが１だから２つのベクトルの角だけで表せるから、うまくいったの。

Ａ：えっ。何で２乗したの？

Ｂ：そうか、$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$は、大きさが１の２つのベクトルの足し算で表せて、しかも、そのなす角が 2θ とわかっているから、うまくいくのか。何で２乗したかというと、２乗すると２つのベクトルの大きさと内積で表せるからだよ。

Ａ：でも、どうして、この問題を読んだときにベクトルの大きさの２乗を考えようと思うんだい。ベクトルとも何とも書いていないのに。

Ｃ：線分の長さを求めることが問題だから、それは、ベクトルの大きさを求めることだと思えればいいんだよ。ぼくも、そこまでは気が付いたんだけど、ベクトルの大きさを求めるので、成分を計算したくなっちゃったんだよね。

Ｄ：私は、何となく２乗したけど、本当は、わかっていることを確認して、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$や$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$が大きさ１のベクトルだから、$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$の大きさの２乗は$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$や$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の大きさで表せることに気が付かなくちゃいけないんだよね。それに、∠ＰＯＡがわかっているということは、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$のなす角も分かっていることに気が付くとすぐだよね。

このグループでは、ベクトルの成分を活用した解法は、座標平面上の２点間の距離の公式を活用した解法と同じであり、ベクトルの成分を活用した解法で考える意味を見いだせなかった。そこで、もう１人の考えたベクトルの内積を活用した解法について検討した。しかし、この問題を読んだときに、ベクトルの大きさの２乗を考えることが解決につながると見通すことができる知識がなかったことを反省していた。ここでも、図的表現から数学的な性質をどれだけ見出せるかがポイントであることが確認できた。線分の長さをベクトルの大きさとして捉えたり、その大きさを求めるための材料（ここでは、大きさが１のベクトルの存在、なす角の大きさなど）を図的表現に変換している際に気付いたりすることが大切となる。

また、このグループには、余弦定理を活用した解法で考えた生徒がいなかったため、グループ内の検討のときには、ベクトルの内積を活用した解法は、実は余弦定理を活用した解法と同じであることには気付くことができなかった。このことは、全体発表の際に余弦定理を活用した解法のグループの発表を聞いて気付いた。

②全体での発表会

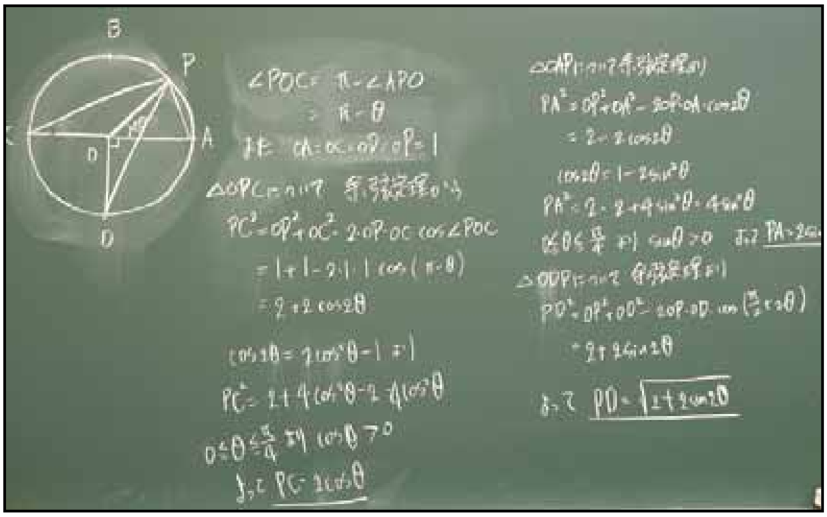
各グループに、解法についての説明、解法のメリット・デメリットについて発表させ、その後、質疑の時間を取った。発表は、質疑も含めて１班５分程度とした。また、発表の際には、板書したものを利用して、話し方に留意し、聞き手に分かりやすく説明するよう促した。主な発表内容の要点、質疑の様子は次のとおりである。

○グループ３（余弦定理を活用した解法のグループ）の発表

発表内容

☆問題を解決するために

- 問題文を図に表す。
- 線分の長さを求めることは、辺の長さを求めることだから、求める線分を辺とする三角形を探す。
- 三角形において、２辺の長さとその間の角の大きさが分かっているので、余弦定理を使うことができる。
- 三角関数についての基本的な知識（余弦定理、２倍角の公式、半角の公式、相互関係）をしっかり身に付ける。
- 最後まで計算することができる計算力を付ける。



☆解法のメリット・デメリット

メリット　・余弦定理は比較的やさしい知識なので、解法の方針が立ちやすい。

デメリット　・計算力を必要とする。

　　　　　　・三角関数の知識を必要とする（覚えていないと使えない）。

質疑

・質問１「なぜ、余弦定理を使おうと思ったんですか？」

回答「長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めることだと思いました。そして、三角形を書き始めたら、余弦定理が使えることに気が付きました。」

・質問２「僕たちの班では、ＰＤは $\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\,\sin\theta$ になったんですが、結果が違うと思うんですが？」（三角比の定義を活用した解法を考えた班から）

回答「 $\sqrt{2+2\sin2\theta}$ じゃないの…？」

教師「それについては発表が終わったらみんなで検討してみましょう」

・質問３「僕たちの班はベクトルの内積を使って計算したんだけど、計算がほとんど同じです。これは、どうしてでしょうか。」

回答「ベクトルの内積は考えていなかったので分かりません。」

教師「グループ以外でもいいですが、誰か、今の質問に答えられる人はいますか」

一同沈黙

教師「ベクトルの内積で考えたグループはどうですか？」

生徒「…」

教師「それでは、発表が終わったらみんなで検討してみましょう。」

このグループは、解法についての留意点を箇条書きで準備し、それを読み上げた。簡潔な言葉で、分かりやすく発表することができた。ただし、自分たちの思いや感情までは述べることはできなかったので、ややあっさりとした発表になってしまった。箇条書きにしたメモを読み上げてしまったことで、口頭による発表ではあるが、記号的表現がやや多く、言語的表現によるよさを発揮することができなかった。しかし、板書した解答は、最初のワークシートに表現したものと比べると、式の羅列ではなく、それぞれについて説明を加え、分かりやすい記述となっていた。

質疑では、余弦定理を活用しようとした理由を尋ねられた。本質を問うよい質問であったが、それに対する回答も、図的表現から数学的性質を見抜くポイント（線分の長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めること）が示されていて、聞き手の生徒も納得していたようであった。しかし、質問２、質問３のような想定外の質問に対しては、戸惑いが見られた。特に、質問３については、他の解法との関わりもあったので、その場で少し考えさせてみた。しかし、よいアイディアが出なかったので、発表後に全員で再度考えてみることにした。

○グループ４（正弦定理を活用した解法のグループ）の発表

発表内容

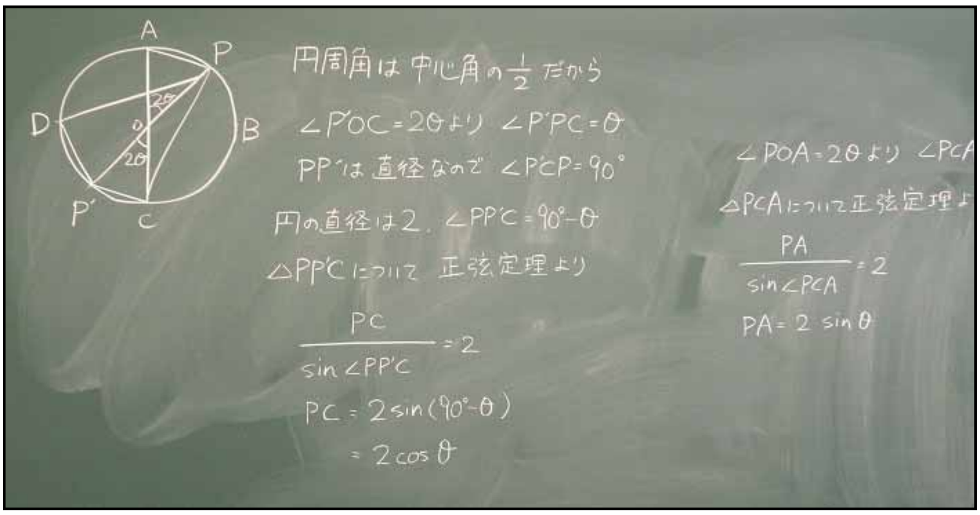
☆問題を解決するために

・長さを求めることは、三角形の辺の長さを求めることと同じである。
・図を描くと、三角形とその外接円がある。したがって、正弦定理が使えると考えた。
・正弦定理を使うためには、１つの角とその対辺の長さ、そして、外接円の直径が必要なので、図形の性質を利用して、求める辺に対する角の大きさを求めようと考えた。
・Ｐ’を考えて、ＰとＰ’を結ぶ。
・正弦定理、円周角と中心角の関係、90°－θの公式を知っていれば解決することができる。ただし、ＰＣ、ＰＡは求めることができたが、ＰＤを求めることができなかった。他の方法を考えないといけない。

☆解法のメリット、デメリット

メリット　・１年生で学んだ三角比の知識だけで求めることができる。
（２倍角の公式や半角の公式を忘れても大丈夫。）
・他の解法に比べると計算が楽。

デメリット　・ＰＤを求めることができなかった。
・補助線を引くなど、図形の性質をいろいろと考えないといけない。



質疑

・質問１「どうしてＰ'を引くことを思いついたんですか。」

回　答「ＰＣを求めるときに、Ｐを通る直径を引けば、三角形ができて正弦定理が使えると気付いたからです。」

質　問「ＰＣを求めるときに、△ＰＣＡで正弦定理を使ってもいいじゃないですか。」

回　答「…本当だ。Ｐ'はいらないのか…。」

生徒１「でも、この場合、∠ＤＯＰ'＝90°－2θだから、∠ＤＰＰ'がその半分で 45°－θとなるから、∠ＤＰ'Ｐを求めることができて、そうすれば、正弦定理を使ってＰＤを求めることができるじゃないかな。」

回　答「そうか、そうすれば、ＰＤを求めることができるね。ということは、Ｐ'を考えた意味も出てくるんだ。」

・質問２「△ＰＰ'Ｃも△ＰＣＡも直角三角形だから、わざわざ正弦定理を使わなくても、２番目のグループのように三角比の定義を使って求められたんじゃないですか。」

回　答「直角三角形か…。さっきのグループのように、三角比でできるんだね。」

質　問「だとしたら、この回答はあんまりよくないということですか？」

教　師「皆さんはどう思いますか。」

生徒２「三角比でできるんだったら、その方が楽だよ。計算自体は、さっきと同じだし。」

教　師「この解法のよさは何だろう。」

生徒３「計算は、２点間の距離の公式や余弦定理より簡単にできるところだと思います。でも、三角比でも同じ計算なので、よさってあるのかな。」

教　師「では、三角比の解法と比べると、正弦定理を使うことのよさは何だろう。」

生徒４「正弦定理とか余弦定理は、直角三角形じゃなくてどんな三角形でも使えることがよいことだったから、この場合も直角三角形にならないときに使えるんじゃないの。」

生徒５「逆に三角比は直角三角形でしか使えなかったから、条件が変わると使えないかも知れない。」

教　師「そうだね、三角比の定義を活用した解法に比べると、それがこの解法のメリットでもあるよね。」

このグループの発表では、質疑に時間を割いた。Ｐ'の必要性について質問があり、担当グループが必要でないことを認める一幕もあった。しかし、他の生徒の発言によって、グループ内では求めることができなかったＰＤの解法が確認されたことで、Ｐ'の必要性を全体で共有することができた。

また、正弦定理を活用することのよさについても同様である。本問題では、三角比の定義を活用すれば解決に至る。しかし、この問題は特殊な場合であり、一般化を図る上では、正弦定理の活用は有効な手段の１つであることを、生徒自身が自らの言葉で表現したことに価値がある。１番よい解法、１番楽な解法しか考えなかった生徒が、様々な解法のよさを考える際に問題の状況を発展的に考えることができた。この場合は、教師の誘導による生徒の発言ではあったが、生徒だけでは考えることができないときには、教師が介在し、発展的に捉える視点を投げかけることも大切であると感じた。

③授業後の振り返り

○全体での振り返り

６つのグループの発表後、全体での課題であった「ＰＤの表現」、「余弦定理を活用した解法とベクトルの内積を活用した解法との相違点」について、教師がリードしながら意見を交換した。

まず、「ＰＤの表現」については、$\mathrm{PD}=\sqrt{2+2\cos 2\theta}$ を$\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$に変形した方がその後の問題に取り組みやすいことを確認し、その変形の方法について意見を求めた。２倍角の公式から平方完成することがなかなか出なかったが、試行錯誤の結果、どうにか変形することができた。

「余弦定理を活用した解法とベクトルの内積を活用した解法との相違点」については、自由に意見を求めた。生徒は、最初は困惑していたが、$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2$を展開した式が余弦定理の式と同じであることに気付き、計算上は同じであることを納得した。しかし、計算上では同じであるが、考える出発点が全く違うという意見が出てきた。それぞれの解法のよさを認識することができてきたと思われる。

最後に、本時の授業についての感想について発表してもらった。「内容が難しかった」、「いろいろな解き方があることを知った」、「おもしろかった」という感じたことをそのまま述べる生徒もいた。しかし、「問題を読んだときの最初のイメージが大切で、いろいろなイメージがもてるようになるには、基本的なことをしっかりと覚えておかなければならない」といった意見も出された。何人かの意見を発表させた後、「今回の授業で分かったこと」、「今自分に必要なこと」、「授業の感想」の観点で、自由記述でまとめを行った。以下に主な生徒のものを示す。

1つの問題でも、複数の解法があるものには
ちゃんとメリットやデメリットがそれぞれあって、
自分に合わせた解法をよく考えたいと思った。
計算力を上げること！
あと、思考力（今まで習ったことでできること全ての可能性を
考えること）を高める！！
難しかったが、わかるとスッキリ！！

1つの問題を解くだけでも何通りも解法があるが、
それぞれメリット・デメリットがあり、問題によって
解法の使い方を変えるだけで、より簡単に、
速く解けるようになるということ。
様々な角度から問題を見ること。
計算力を高めること
いつもの授業よりおもしろいと思いました。
（解いたものの解説は答え冊子とか見て家でもできるので、
授業では、今回の授業のように いろんな解法や見方を説明してほしいです。）

3　実践を振り返って

多くの生徒は、手に入れた考え方を自分の思うように使うことが出来ないと、授業していて常々感じていた。生徒は問題を解く際に、模範解答とされる解答例に近づけることを目標としていることが多い。中には、示された解答例と自分の解答が異なっていると、自分のものは誤答と考える生徒もいる。単元毎の学習では、ある解法が定着するまで繰り返し練習することが必要である。しかし、総合的な演習になっても、その定着された解法だけに縛られて、その解法に固執してしまう。したがって、基礎がある程度身に付いた後、単元の枠を越えて考えることができる問題に取り組むことが重要となる。

今回の取組を通して、授業を進める際に留意しなければならないこととして、次の２つのことを感じた。

①数学的な表現力を育成することの重要性

自分の考え方を言葉、式、図で表すことができるようになるためには、問題に示された言葉、式、図から数学的な性質を感じ取ることが大切である。数学的な表現力を育成することは、言葉、式、図の双方向の情報交換を可能にすることである。そして、その情報交換の中で感じることが新たな「発想」につながる。今回の取組では、問題を読んで図に表したときに、線分の長さをどう解釈するかで解法が異なった。線分の長さそのもので考えた生徒は、２点間の距離の公式を活用した。三角形の辺の長さと考えた生徒は、三角比の定義、余弦定理、正弦定理を活用した。ベクトルの大きさと考えた生徒は、ベクトルの成分や内積を活用した。その最初の感じ方が大切であることを生徒自身が感じ取ってくれたことが、大きな成果であった。また、グループによる検討の際に他の生徒に理解してもらえるように説明すること、クラス全体の前で解法やそのメリット・デメリットを発表し質問に答えること、これらのことの難しさを生徒が感じ、そして、何とかして分かってもらおうと努力したことが、生徒の数学を学ぶ姿勢によい影響を与える。

②数学という「言語」を使う場面の設定

生徒に対して「よく考えなさい」と言っていた。しかし、教師主導の授業を展開するだけは、生徒は「考える」ことはできない。消化しきれない知識の波に飲み込まれ、ただ解法を覚えるだけになってしまう。「考える」ことができる生徒を育成するためには、授業の中で、考える場面を適切に設定するとともに、それを表現させる場面を設けることが必要である。表現させる場面としては、紙の上に表現させるだけではなく、友達と話し合ったり、クラス全体に説明したりする場面を設定することが有効となる。数学は、「科学を表現する言語でもある」という言葉がある。その数学の理解を深めさせ、数学を学ぶ意義を実感させるためには、生徒自身が数学という「言語」を使う場面を授業の中で随所に設定することが大切である。