事例２　具体物による操作的表現とコミュニケーション活動
〜漸化式の指導の工夫〜

１　事例の概要

数列に関する学習では、等差数列、等比数列などの一般的な数列について学習した後、漸化式で表された数列の一般項の求め方を学習する。高校で学習する漸化式はいくつかのパターンに分類できるので、その解法パターンさえ覚えてしまえば一般項を求めることはできる。

しかし、大学の入試問題では最初から漸化式が与えられておらず、生徒は自分で漸化式を作らなければならない場合が多い。しかも、漸化式を解くことは得意でも漸化式を導き出すことが苦手な生徒は多い。その大きな要因としては次の２つが考えられるのではないだろうか。

要因１：自然界には、海岸線、雲、シダの葉、ひまわりの種など、再帰的なモデルとして捉えることができる構造がいたるところに現れているにもかかわらず、それらを再帰的に捉えて考察するといった経験に乏しい。
要因２：再帰的な構造を見つけやすくするために、どのような図を描けばよいか分からない。

そこで、次のような仮説を立てた。

仮説１：再帰的な構造をもつパズル教材を用いて、意図的に再帰的に捉えて考察するといった経験をさせれば、構造をつかみやすくなる。
仮説２：再帰的な構造を見つけるために図を描いて考えさせ、他の生徒が描いた図と比較、吟味するといった活動をさせれば、どのような図を描けば効果的であるかがわかるようになる。

今回は、数列の学習が漸化式まで一通り終わった後、再帰的な構造をもつパズル教材としてハノイの塔を使い、グループ学習を行った。写真のハノイの塔をグループの数だけ用意した。

ほとんどの生徒がハノイの塔のパズルを使うことは初めての経験であったので、十分な時間を確保した。具体物を操作することで再帰的な構造の実感がわくので、生徒に興味をもたせることができる。


ゲーム教材：ハノイの塔

また、再帰的な構造をつかむ過程や漸化式を導く過程では、コミュニケーション活動を取り入れ、生徒一人一人の思考の過程を全員で共有させた。

ハノイの塔を使った活動後にプリントを配り、漸化式を導く過程で図を描いて考える演習を行った。プリントの左側には、漸化式を自分で導かなくてはならない問題を、ヒントとなる図と一緒に載せ、右側には思考の過程を記入できるように補助線のみの図を載せた。ここでは、生徒が一人で試行錯誤する時間を確保するとともに、思考の過程を発表させる際には、描き込んだ図についても板書させ、全員で考察するといったコミュニケーション活動を取り入れた。

さらに、定着を図るため、授業で扱った問題の類題 2 題に取り組ませ、レポートの形で提出させた。

実際の生徒の様子については、授業の記録にまとめた。

２　指導計画

(１)本時の目標（評価規準）

関心・意欲・態度	数学的な見方・考え方	表現・処理	知識・理解
A1　ハノイの塔のパズルの中にある数学的な規則性に興味・関心をもつ。	B1　円盤の枚数が１枚少ない場合を使って最少手数を考察することができる。	C1　最少手数の関係を式（漸化式）に表すことができる。 C2　自分の考えをわかりやすく説明できる。 C3　図や表を使って第 n 項と第 $n+1$ 項の関係を式に表すことができる。 C4　漸化式を解き、一般項を求めることができる。	D1　ハノイの塔のパズルの中にある数学的な構造を理解する。

(２)指導展開

【１時限目】

学習活動		学習のねらい（評価規準との関連）	指導上の留意点
導入	ハノイの塔のゲームの説明（5 分）		パズルに慣れさせるために自由に操作させる。
展開	ハノイの塔を使ったグループ活動（15 分）	ハノイの塔のパズルを通して数学的な規則性を考察する。A1、B1、D1	全員が思考活動できるようにパズルはグループの数だけ用意する。
	漸化式を導くコミュニケーション活動（15 分）	漸化式を導き出す過程で自分の考えをわかりやすく説明したり、他の説明を理解したりする。C1、C2	なるべく多くの生徒から考えを引き出せるようにする。
	ハノイの塔の漸化式の導出（10 分）	漸化式を導き出すために必要な考え方を理解する。C1、C4	考え方のヒントを与え、なるべく生徒達から漸化式が導き出せるようにする。
まとめ	授業の振り返り（5 分）	ハノイの塔のパズルの中にある数学的な構造を理解する。D1	漸化式で考察することの有用性を確認する。

【２時限目】

学習活動		学習のねらい（評価規準との関連）	指導上の留意点
展開	演習プリントを使った数学的活動（20 分）	図や表を使って第 n 項と第 $n+1$ 項の関係を式に表すことができる。C3	図や表を使って考えるように促す。
	漸化式を導くコミュニケーション活動（15 分）	漸化式を導き出す過程で自分の考えを分かりやすく説明したり、他の説明を理解したりする。C2	なるべく多くの生徒から考えを引き出せるようにする。
まとめ	課題の解決（15 分）	漸化式を解き、課題の解決を図る。C4	机間指導で漸化式が解けない生徒を援助する。

３　授業記録【１時限目】

(１)ハノイの塔のゲームの説明

前回学習した漸化式が応用できるパズルゲームとしてハノイの塔を用意する。ハノイの塔のゲームは、100 円ショップにおいてグループの数だけ購入した。

ハノイの塔と、ゲームのルールが書いてあるプリント「ハノイの塔で数学を」を配付し、ゲームのルールを説明する。

プリント「ハノイの塔で数学を」(A4 判)

ハノイの塔で数学を

1　ハノイの塔（The Tower of Hanoi）とは

1883 年にフランスのリュカ（1842-1891、図１）が発明したゲームで、３本の棒を立てた板と、中央に穴の開いた大きさの異なる複数枚の円盤からなる（図２）。初めは３本の棒のうちの１本に、すべての円盤が大きいものを下にして順番に積み重ねられている。これらの円盤を、他の２本のうちの１本になるべく少ない手数で移動したい。ただし、以下のルールに従うものとする。

図１　François Édouard Anatole Lucas（Wikipedia より）

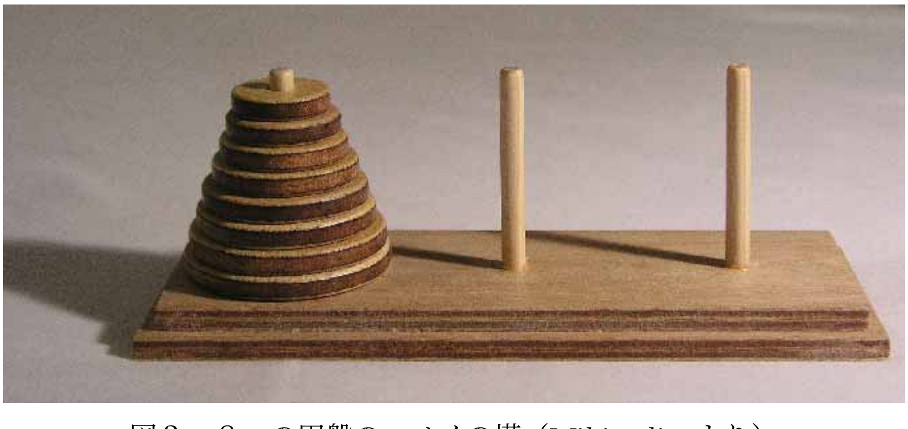


図２　８つの円盤のハノイの塔（Wikipedia より）

2　ルール

(ア)１回に動かせる円盤は１枚である。

(イ)大きな円盤を小さな円盤の上に重ねることはできない。

3　問題

n 枚の円盤を移動させる最少手数は何回か？

(２)ハノイの塔を使ったグループ活動

指示「これから少し時間をとるので、１枚のとき何回か、２枚のとき何回か調べてみよう。各班共通になるよう、最初すべての円盤は左端に積み重ねられていることにします。それをルールに従って動かし、最終的にすべて右端に積み重なるようにします。１枚のときから７枚のときまで調べてください。」

以下、あるグループの生徒のやりとり。

Ａ：１枚は１回じゃん。
Ａ：そして２枚のときはこうやって（㊧→㊥)、こうやって（㊧→㊨)、こう（㊥→㊨）で３回。
Ａ：３枚のときはこうやって（㊧→㊥)、（ちょっと考えて)、あ、だめだ、だめだ、(㊥に置いた円盤を㊨に移す)、２（㊧→㊥)、(Ｂが一緒に指で誘導する)、３（㊨→㊥)、４（㊧→㊨)、５（㊥→㊧)、６（㊥→㊨)、７（㊧→㊨）で７回。
（今度は４枚にしてＢが動かす）
Ｂ：(３枚のときと同じように動かし始める。Ａは一緒に指で誘導する)（３枚の円盤を㊧から㊨に動かし終わったところで）あ、できないよ。(㊨にある一番小さな円盤を㊧に動かそうとして）できないね。(もう一度並べ直す）
Ａ：法則見つければいいんだよね。３枚のときは最初㊨に動かしたよね。１（㊧→㊥)、２（㊧→㊨)、(ＢとＣも一緒に指で誘導する)、３（㊥→㊨)、(㊨にあるいちばん小さな円盤を移動しようとして㊧と㊥のどちらにさせばよいか迷っている)。
Ｃ：駄目だね、動かせないよ。
Ｂ：もう１回３枚のときでやってみよう。
Ａ：(３枚のときをみんなで確認しながらＡが動かす）３枚のときは３本あるからできるんだよ。(もう１度４枚並べて）
Ａ：(㊧→㊨、㊧→㊥まで動かして）ここまでは絶対こうしなくちゃいけないんだよ。それで（㊨を㊥に移しながら）これをここに重ねなくてはならないから（㊨→㊥)、これを（㊧→㊨)
Ｂ：㊥を指さしてどっちかをこう（指で㊥から㊧に移動する動き）こう（指で㊥から㊨に移動する動き）ってやれば。(Ａが㊥の一番上にある円盤をどちらに移動するか迷っていると）
Ｃ：(㊥を指さして）最初ここに移動させてみたら。
Ａ：(もう一度４枚を最初の状態に戻してから）(㊧→㊥)、(㊧→㊨)、(㊥→㊨)、(㊧→㊥)、（ここまでやって迷っていたら）
Ｂ：(㊨に刺さっている一番小さな円盤を指さして）これしか動かせないから、これをこうやって（㊨→㊧)、(ＢもＣも一緒に指で誘導しながら）(㊨→㊥)
Ａ：すごい、これをこうやって（㊧→㊥)、これをこうやって（㊧→㊨)、(㊥→㊧)、(㊥に刺さっている２番目の大きさの円盤をどこに動かそうか迷って)。
Ｃ：あ、だめだ。
Ａ：あははは。(笑いながら㊨に刺して）(㊥→㊨)、(㊧→㊥)、(㊨→㊧)、(㊥→㊧)、(㊥→㊨)、(㊧→㊥)、(㊧→㊨)、(㊥→㊨)（完成する)。

Ａ：あはは、でも何回だろう。（拍手している）数えなきゃだめだ。
Ｂ：もう１回やってみよう。
Ａ：（もう一度４枚を最初の状態に戻してからみんなで一緒に指で誘導しながら）１（㊧→㊥）、２（㊧→㊨）、３（㊥→㊨）、４（㊧→㊥）、５（㊨→㊧）、６（㊨→㊥）、７（㊧→㊥）、８（㊧→㊨）、９（㊥→㊧）、10（㊥→㊨）、（㊧にある一番小さな円盤を移動させようとして）
Ｂ：あ、だめだ、11（㊧→㊥）、12（㊨→㊧）、13（㊥→㊧）、14（㊥→㊨）、15（㊧→㊥）、16（㊧→㊨）、17（㊥→㊨）。
教師：（生徒が書いた表を見て）違うよ。最初の３つはあっているけど４つ目は違うよ。
Ｃ：もう１回やるしかないな。
Ａ：数え間違えたかな。（もう一度やってみるがさっきと同じ 17 回となる。）

他のグループも同じように試行錯誤を繰り返していたが、規則性に気付いて７枚のときまで手数を調べられたグループが何グループか出てきたところで次の発問をした。

発問「円盤の枚数によって最少の手数はどのように変わりますか。円盤の枚数が１枚増えたときの最少手数は増える前の最少手数を使って漸化式でどのように表せるか考えてみよう。」

生徒は円盤の枚数を変えながら最少手数を数えている。少し時間をとった後、生徒に漸化式を作ることができたか聞いたところ、何人かの生徒が手を挙げた。その中のＤさんに発表してもらう。

Ｄさんの作った漸化式：$a_{n+1} = 2a_n + 1$

Ｄさんと同じ漸化式ができた生徒に挙手させたところ、Ｄさんの他に３名いた。

これとは違う漸化式ができたか聞いたところ、Ｅさんが手を挙げたので発表してもらう。

Ｅさんの作った漸化式：$a_{n+1} = a_n + 2^n$

Ｅさんと同じ漸化式ができた生徒は他にはいなかった。
Ｄさん、Ｅさんの作った漸化式以外の式を作った生徒はいなかった。

（３）漸化式を導くコミュニケーション活動

漸化式を作れなかった生徒が多かったので、Ｄさん、Ｅさんはどのようにして式を導き出したのか、コミュニケーション活動を通して理解させる。
黒板には、２人が発表した漸化式が書いてある。
まず、Ｄさんの漸化式について考える。

発問「Ｄさんの漸化式はどうして出てきたのかな。分かった人は説明して下さい。」

以下、生徒達とのやり取り。

Ｆ：分かった。
教師：Ｆさん分かったのなら説明してください。
Ｆ：必ず前の数の２倍に１を足した数になっています。
教師：前の数の２倍に１を足した数って言ったけど、皆さんどういうことか分かりますか。
何人かの生徒：あ、本当だ。

教師：分かった人もいるようだけど、まだ分からない人もいるようだから、誰か分かりやすく説明してくれますか。
※　Ｄさんが発表したときに同じ式ができたと手を挙げていたＧさんと目が合った。
教師：ＧさんもＤさんと同じく最初にこの式を作っていましたね。Ｇさんはどのように考えて作ったのかみんなに分かりやすく説明して下さい。
Ｇ：表にまとめていったら関係に気づきました。
教師：Ｇさんは表にまとめたんだって。同じように表にまとめた人はいますか。
※　クラスの３分の１くらいが手を挙げる。
教師：それではＧさんはどんな表にまとめたのか板書して説明してくれますか。
※　Ｇさんの書いた表と説明。

円盤の枚数(n)	1	2	3	4	5	・・・
最少移動回数	1	3	7	15	31	

×2＋1　×2＋1　×2＋1　×2＋1

Ｇ：円盤の枚数と最少手数を表にまとめると必ず×2＋1 になっています。だから、a_{n+1} も a_n の×2＋1 になります。
教師：皆さん分かりましたか。
Ｈ：先生、私達は４枚のときに 17 回だったんだけど。
何人かの生徒：私達も 17 回だった。
Ｊ：それ数え間違いだよ。15 回が正しいんじゃない。
教師：４枚の時の回数で意見が分かれているけど、Ｄさんの漸化式と同じ式になった人はＧさんのように考えたのかな。この考え方は皆さん分かりましたか。Ｅさんは異なる式を作ったようだけど分かりましたか。
Ｅ：はい。
教師：同じ漸化式だったけどＧさんとは異なる考え方をした人はいますか。
※　異なる考え方をした生徒はいなかったので、Ｅさんの漸化式について考える。

次に、Ｅさんの漸化式について考える。

発問「それでは、今度はＥさんの漸化式はどうしてでてきたのか考えてみましょう。分かった人は説明して下さい。」

以下、生徒達とのやり取り。

教師：誰も分からないようなのでＥさん説明してください。
Ｅ：私もＧさんのように表で考えました。
教師：それでは表でどのように考えたのか板書して説明してくれますか。
※　Ｅさんの書いた表と説明

円盤の枚数(n)	1	2	3	4	5	・・・
最少移動回数	1	3	7	15	31	

Ｅ：表はＧさんと同じなのですが、最少手数の差を。
※　差と言ったところで言葉をさえぎる。
教師：ちょっと待った。今、差って言いましたね。Ｅさんがどのように考えたか分かりましたか。
※　生徒はノートに書き込み始め考えている。

Ｋ：先生、分かった。
何人かの生徒：私も分かった。
教師：何人か分かったようだけど、他の皆さんはどうですか。
※　まだ考えている生徒が多くいる。
教師：それではＫさん、前に来てＥさんの続きを説明して下さい。
※　Ｋさんの説明

円盤の枚数(n)	1	2	3	4	5	・・・
最少移動回数	1	3	7	15	31	

2　　2^2　　2^3　　2^4

Ｋ：最少手数の差をとると２の累乗になっています。指数は１枚少ない円盤の枚数になっているので、a_{n+1} は a_n に 2^n を足した数になっています。
教師：Ｅさん、Ｋさんの説明でよかったですか。
Ｅ：はい。同じです。
教師：皆さん分かりましたか。

(４)ハノイの塔の漸化式の導出

生徒から出された２つの漸化式は、試行の結果をまとめた表を基に導かれていたため、表の値が間違っているときには成り立たないこと、表の値が正しいことに確信がもてないことに気付かせ、最少手数が分からなくても漸化式を導けるかどうか考えさせる。

発問「２つの漸化式がどうやってできたのか分かったけど、２つとも表から求めていました。ところで、さっきも表の値が違うって言っていた人がいたけど、本当にこの表の値は正しいと言えますか。」

以下、生徒達のやり取り。

Ｌ：実際に操作して確認しているから間違いないんじゃない。
Ｍ：だけど４枚のときに間違えていた人もいたよ。
Ｎ：５枚のときは、やっているうちに何回なのか分かんなくなっちゃった。

少しの間、お互いの意見を述べ合った後、最少手数を求めずに漸化式を作ることができるかどうか考えさせる。

発問「円盤の枚数が多くなると、最少手数に確信がもてなくなるようですね。それでは、各枚数の最少手数を求めずに漸化式を作ることはできませんか。」

どう考えてよいか分からないようなので、円盤の枚数を４枚にして操作し、考え方を引き出す。
円盤の枚数が４枚しかないが $n+1$ 枚あるとして考えるように説明する。n 枚（実際には３枚）を移動させる最小手数を a_n とし、a_{n+1} を a_n を使って表せないか考えさせる。

以下、生徒達とのやり取り。

教師：それでは円盤の枚数を４枚にして考えてみましょう。４枚しかありませんがこれを $n+1$ 枚と思って下さい。上の３枚が n 枚ということです。それでは、一番下の１枚を残して上の n 枚を移動させる最小手数を a_n とします。一番大きい円盤を移動するには、まず上の n 枚を移動させなくてはなりません。どの棒に移動させますか。

O：まん中の棒です。

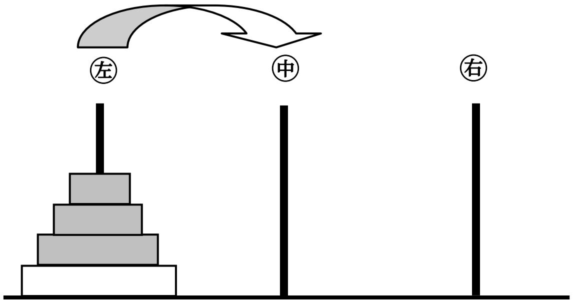
教師：そのために必要な最小手数は何回ですか。

※　少し考えている。

教師：n 枚を移動させる最小手数ということですよ。

P：a_n 回です。

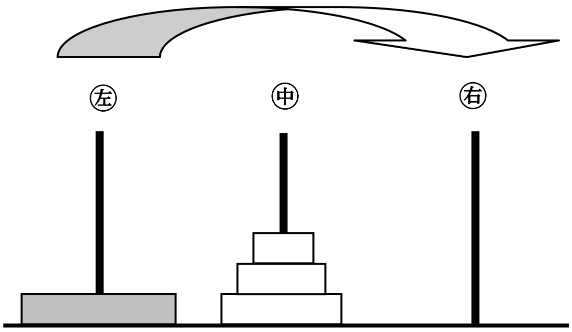
教師：そうですね。a_n が何回か分からなくても、n 枚の円盤の最小手数を a_n で表せることがポイントですね。皆さん分かりますか。



※　皆が納得したようなら次に進める。

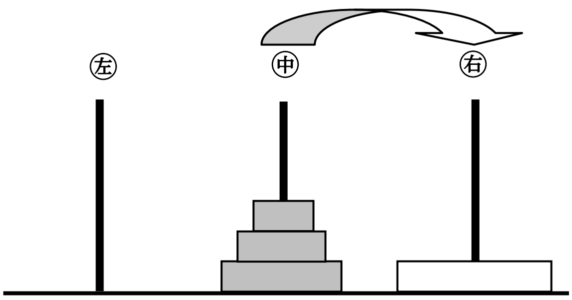
教師：それでは残った一番大きな円盤１枚を㊧から㊨に移動するのは何回ですか。

Q：１回です。



教師：これはいいですよね。１枚の円盤を移動するのは１回ですね。それでは、再び㊥にある３枚の円盤を㊥から㊨に移動するのは何回ですか。

何人かの生徒：a_n 回です。



教師：これで㊧にあった $n+1$ 枚の円盤を㊨に移動することができました。それでは、a_{n+1} を a_n を使って表すとどうなりますか。

R：$a_{n+1}=2a_n+1$ です。

S：あ、さっきと同じ形になった。

教師：さっき求めた漸化式と同じ式になりましたけど、今の考え方では各項の値が分からなくても求められました。漸化式を求めるには、第 $n+1$ 項と第 n 項の関係だけに着目すればいいんですね。

(５)授業の振り返り
A5 判（A4 判に上下二段で印刷）

＜振り返りシート＞

□ ハノイの塔のパズルの中に数学が使われていることに興味をもった。
□ 漸化式を考えるときに図や表を使って考えることができた。
□ 円盤の枚数が n 枚の最少手数を使って、円盤の枚数が $n+1$ 枚の最少手数を考えることができた。
□ 最少手数の関係を式（漸化式）に表すことができた。
□ 自分の考えをわかりやすく説明できた。
□ 式（漸化式）を解いて、n 枚の円盤の最少手数を求めることができた。
□ 他にも数学と関係のあるパズルがあるかどうか調べてみたい。

＜授業の感想＞

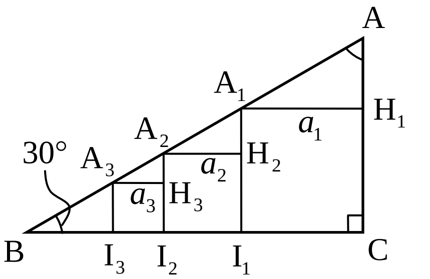
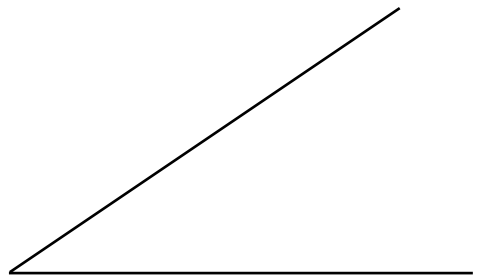
(６)生徒の感想

・ 漸化式の発想が少し分かったように思える。実際に物を使って頭で考えた方が理解しやすいし、おもしろいと思った。
・ ハノイの塔の実験は難しかったけどおもしろかった。漸化式が実際のこういう場面で使われているのを知ったのは初めてで新鮮だった。
・ 漸化式を解く前に、ハノイの塔を使って考え方が確認できて分かりやすかった。解き方だけでなく、作り方も知れておもしろかった。
・ ルールに従って条件を満たしていくのは思った以上に難しかったです。計算ができても円盤を動かすとその数字にならなかったり、毎回違くなってしまったり、コツをつかむまで時間がかかりました。お店に売っているこのような道具に条件を加えるだけで、ある法則が見つかったり、漸化式が関わっていたり、おもしろいなと思いました。
・ 枚数が少ないときは簡単にできたけど、多くなると難しかった。途中で法則みたいなものを見つけて予想してやったら、その通りになったのでうれしかったです。漸化式を解けなかったので復習します。ゲームみたいなのをやって数学を勉強できて楽しかったです。
・ ハノイの塔を使いながらだったのでとても分かりやすかったです。初めは、何の授業か全然結びつかなかったけど、最終的にはすごく結びついてびっくりしました。
・ ハノイの塔だけでここまで考えるとは思わなかった。途中で、黒と白の円盤を交互に入れ替えなきゃいけないことや、漸化式を使うことなど、初項や階差の規則が分かるにつれてとても楽しくなった。この授業を通して「考える」ことを学んだ。
・ 規則性は見つけられたが、実際にその回数でできなくてとても大変だった。普段は公式的な見方しかしていなかった。漸化式には難しいというイメージがあったが、少し考え方が分かりやすくなったと思う。
・ 実際に自分で実践してみることによって、漸化式などの数列がどのような理由で成り立っているのかが分かり、公式を覚えるのではなく、自分で作るということを実感できた。

4　授業記録【2時限目】

(1)演習プリントを使った数学的活動

前時のハノイの塔から漸化式を導き出す学習の応用として、以下の演習プリントを行う。(2)の a_{n+1} と a_n の二項間の漸化式を導く問題では、ヒントとして図を描いて考えるように促し、プリントの右側に補助線のみの図を予め準備しておく。

> $A=60^\circ$、$B=30^\circ$、$AC=1$ である直角三角形ABC内に、図のように1辺の長さが a_1、a_2、a_3、…の正方形が並んでいる。
>
> 
>
>
> 
>
> (1)　a_1、a_2、a_3、…の値を求めよ。
>
> (2)　a_{n+1} と a_n の間に成り立つ関係式を導け（問題の図にならって、右図の中に a_{n+1} と a_n の関係を図示してみると・・・）。
>
> (3)　a_n の値を n を用いて表せ。

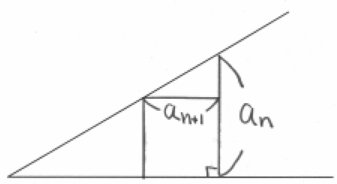
生徒は、a_1、a_2、a_3 の値を求めるのに、直接問題の図の中に関係を書き込んで考えていた。多くの生徒が思った以上に(1)に時間がかかってしまったようで、(2)、(3)まで取り組んでいないようであった。(1)はカットしてもよかったかもしれないが、かえって漸化式で考えることのよさは実感できたようである。

(2)漸化式を導くコミュニケーション活動

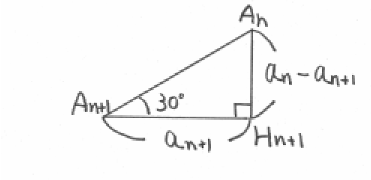
漸化式を導くのに自分が描いた図と他の生徒が描いた図を、比較・検討させるため、コミュニケーション活動を取り入れる。(2)まで取り組んだ生徒がいなかったので、全員で考える。

> 発問「前時のハノイの塔で漸化式を導いたように、各項の値がわからなくても漸化式を求めるためにはどのような図を描いて考えればいいですか。」

少し考えさせてからの生徒とのやり取り。

> 教師：a_n と a_{n+1} の関係だけが知りたいんだよね。
>
> Q：a_n の辺を引いてから一辺が a_{n+1} の正方形を作ればいいのかな。
>
> 教師：今Qさんが言ったこと分かったかな。どんな図になるか誰か描いてくれませんか。
> それではRさん板書してください。
>
> ※　Rは右のような図を描いた。
>
> 
>
>
> 教師：QさんRさんの描いた図でよかったかな。
>
> Q：はい。
>
> 教師：この図から漸化式は求められるの。
>
> ※　生徒はプリントに書き込みながら考えている。

教師：a_n と a_{n+1} の関係が作れればいいんだよね。
S：あ、ここの角度は 30° だ。直角三角形の辺の比が使える。
T：そうか、$1:2:\sqrt{3}$ になるんだ。
教師：できそうかな。それじゃＳさん、みんなに分かりやすいように黒板に図を描いて下さい。
※　Ｓさんは右のような図を描いた。

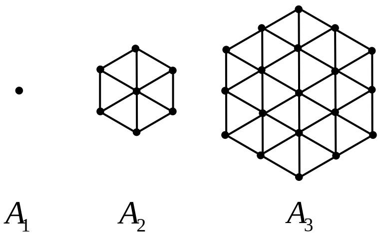


教師：それではＳさん、どのように考えればよいか説明してください。
S：この図のこの三角形を取り出すと、この辺が $a_n - a_{n+1}$ でこの辺は a_{n+1} になります。
30°、60°、90° の直角三角形の辺の比だからこれが $1:\sqrt{3}$ になります。
教師：ここまでの説明は分かったかな。この図から漸化式を求められそうですか。
それではＴさん、式はどうなりますか。
T：$a_{n+1} : (a_n - a_{n+1}) = 1 : \sqrt{3}$　$a_{n+1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}} a_n$

(３)レポート

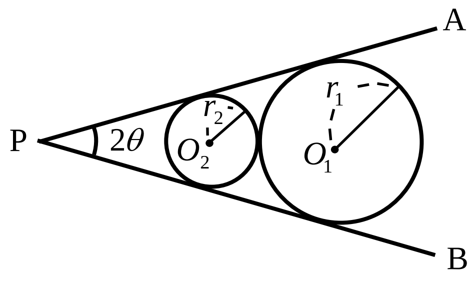
定着を図るため、授業終了時に次の課題２題を A4 判両面に１題ずつ印刷して配り、レポートとして提出させた。

$\boxed{\text{課題１}}$
右の図のように点の個数を増やしていく。
n 番目の図形 A_n に含まれる点の個数を a_n とする。



(1) a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 を求めよ。
(2) a_{n+1} と a_n の間にどのような関係が成り立つか。
(3) a_n を n を用いて表せ。

$\boxed{\text{課題２}}$
$\angle \mathrm{APB} = 2\theta$ $(0^\circ < 2\theta < 180^\circ)$ とし、半直線 PA、PB に半径 r_1 の円 O_1 が接している。$r_1 = r$ として、以下の問いに答えよ。



(1) 円 O_1 の中心と P との距離 d_1 を r を用いて表せ。
(2) 図のように、半直線 PA、PB に接し、かつ円 O_1 に外接して円 O_1 より小さい円を O_2 とする。円 O_2 の半径 r_2、およびその中心と P との距離 d_2 を r を用いて表せ。
(3) (2)にならい、一般に半直線 PA、PB に接し、かつ円 O_n に外接して O_n より小さい円 O_{n+1} をかく手順を考える。円 O_n の半径を r_n とするとき、r_{n+1} と r_n の関係を求めよ。
(4) 円 O_n の面積を S_n とするとき、S_n を求めよ。
(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ。

(4)生徒の解答

生徒の問題解決の手法は、課題１と課題２で大きく違うものとなった。課題１では、(1)で各項の値を求めさせたため、階差数列を使って漸化式を導き出している生徒が多かったが、課題２では、授業で学習したように図を描いて漸化式を導き出している生徒が多かった。

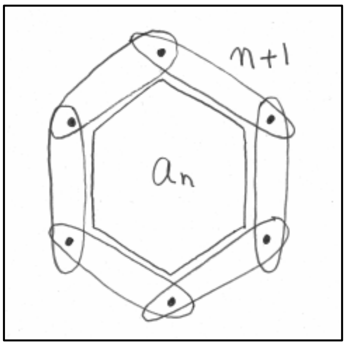
以下に、各課題の分析結果を示す。

課題１		漸化式が求められたか	
		○	×
A_{n+1} と A_n の関係の図が描いてあるか	ある	6	1
	ない	22	7

課題１は、授業で扱った演習プリントの問題と同じように、初項から第５項までを求めさせていたため、多くの生徒が図を描かずに階差数列から漸化式を求めていた。授業で扱った演習プリントの反省でも触れたが、本実践のねらいを考えると(1)はカットした方がよかったのかもしれない。中には図を描いていた生徒も何人かいたが、A_{n+1} と A_n の関係に着目した図を描いた生徒は一人だけであった。

また、各項の値から類推して一般項を求めた生徒に対しては、条件によっては数学的帰納法による証明が必要となることを補足しておかなくてはならないだろう。

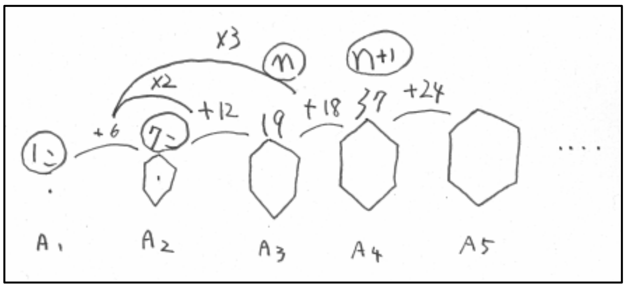
【 A_{n+1} と A_n の関係に着目して描いた図】



左図が、A_n と A_{n+1} との関係に着目して描いた図である。この生徒は、A_n のまわりを１辺あたり $n+1$ 個の点で囲めば A_{n+1} の六角形ができることと、その頂点は２辺が共有していることを略図でうまく表現している。

もし、(1)の各項の値を求めさせる問いをカットしていたなら、もっと多くの生徒が二項間の関係だけに着目した図を描いていたかもしれない。

【その他の生徒が描いた図】



この生徒は、A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 の略図を描いて考えているが、二項間の関係だけに着目した図とはなっていない。階差が等差数列になっていること利用して漸化式を類推しているが、階差数列を用いた多くの生徒は図を描いていなかった。

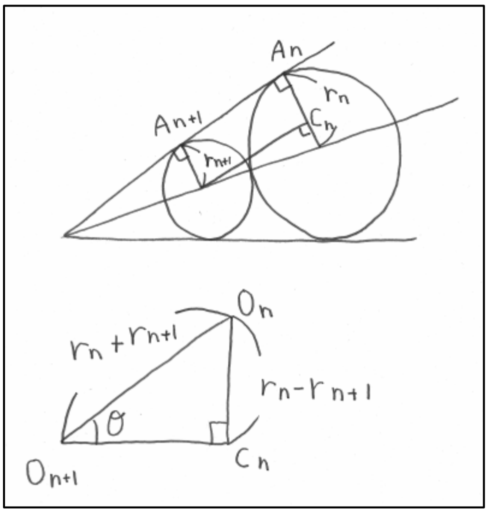
課題２		漸化式が求められたか	
		○	×
r_{n+1} と r_n の関係の図が描いてあるか	ある	18	6
	ない	4	8

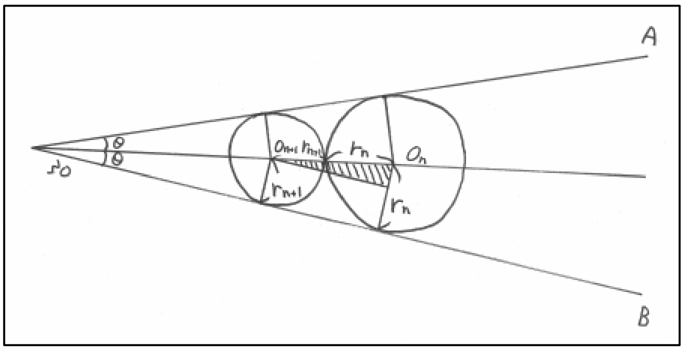
課題１とは違って r_2 , r_3 などが簡単に求められないため、多くの生徒が r_{n+1} と r_n の関係の図を描いて漸化式を求めていた。図を描かずに漸化式が求められた生徒もいたが、 r_1 と r_2 の関係式から漸化式を類推しているだけであり、完全正答はいなかった。また、図は描けていたものの、漸化式を求められなかった生徒もいたが、この課題の場合、 r_{n+1} と r_n の関係の図が描けたかどうかがポイントであったようである。

【生徒が描いた図】

左下の図は、授業で扱ったように、 A_n と A_{n+1} の関係の図を描いた後、関係式を導くために三角形を取り出して描いている。

また、右下の図のように、 A_n と A_{n+1} の図は同じように描いてあっても三角形を取り出すのではなく、直接図中の関係式を導ける部分に斜線を引いている生徒もいた。





5　実践を振り返って

生徒にとって、数学的帰納法のように自然数の公理に関する考え方や、漸化式のように再帰的に定義される考え方は抽象的で理解し難いところである。今回は、その抽象的で分かりにくい部分を、ハノイの塔という具体物を使うことで理解させることができるのではないかという仮説に基づいて実践した。生徒の感想からも分かるように、具体物を操作しながら考えることは、実感がわいて分かりやすかったばかりか、興味関心も高められたようである。身近なパズルを教材として使うことで、生徒の興味や感動を誘い、数学の抽象的な概念についても理解させ、深く印象に残るような授業が可能になるのではないだろうか。

さらに、学習の定着を図るために、漸化式を導き出す課題を何題か用意し、授業及びレポート課題として扱った。具体物で考えるのと同様に、紙面に図を描いて考察する活動を行うことで、明らかに生徒の表現力は増し、課題解決を図る上で図や表を効果的に活用できるようになる。提出されたレポートを見ると、漸化式を導こうとする生徒一人一人の意欲が感じられ、仮説に基づいて行った今回の取り組みは、まずまずの効果があったことが伺える。授業では図を描けなかった生徒が、図を描いて考察できるようになったことはよかった。

また、今回の実践では、意識してコミュニケーション活動を取り入れた。自分の考えと他の生徒の考えとを比較、吟味させるといった活動をすれば、それぞれの考えのよさがわかるようになる。生徒一人一人の考えを大切に扱うことで、自己有用感を高めることができ、生徒の授業に対する意識を高揚させることができる。このような活動は今後ますます必要となるだろう。