数学的な表現力について

1　数学的な表現力のとらえ方

これまで、高等学校数学科においては、考える力の育成が重要であるとして数学的な考え方の育成に力を注いできた。中央教育審議会答申では、小学校算数科、中学校・高等学校数学科の改善の基本方針で、「数学的な思考力・表現力を育てる」ことが述べられている。ここで大切なことは、数学的な思考力と表現力がセットで扱われていることである。表現しながら思考し、思考した結果を表現する。これが繰り返し行われることで、生徒の数学的な思考力・表現力は高まり、数学の力が身に付いていくと考えられる。そこで、本研究では、表現する場面だけを重視するのではなく、表現されたものを自分なりに解釈したり、身に付いている知識を活用して再構築したりする場面を適切に設定することで、数学的な表現力の育成を図っていくこととした。

数学的な表現力については、広島大学の中原忠男氏（現在は環太平洋大学教授）が、数学教育における表現様式として、次の５つに分類している。

＜現実的表現＞　実世界の状況、実物による表現。
＜操作的表現＞　教具などの操作による表現。人為的加工、モデル化が行われている具体物、教具などに動的操作を施すことによる表現。
＜図 的 表 現＞　絵、図、グラフなどによる表現。
＜言語的表現＞　日本では日本語、米国・英国などでは英語など各国の日常言語を用いた表現、またはその省略的表現。
＜記号的表現＞　数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現。

この中で、高等学校数学科においては、特に、「図的表現」、「言語的表現」、「記号的表現」を中心に授業が進められている。また、単元の導入では、「操作的表現」も重要な役割を担うことがある。そこで、本研究においては、この４つの表現様式について取り上げる。また、それぞれの表現様式には、下表のように、「表現力」とそれを支えたり高めたりする「表現力に関わる力」が考えられる。それぞれの力が相互に作用し合いながら、数学的な表現力を高めていくことになる。

◎表現様式と能力

表　現　様　式	表現力	表現力に関わる力
＜操作的表現＞ 教具などの操作による表現。	操作する能力	操作する意味を理解する能力
＜図 的 表 現＞ 表、グラフ、図などによる表現。	表・グラフ・図などに表す能力 表・グラフ・図などを活用する能力	表・グラフ・図などに表されたことを理解する能力
＜言語的表現＞ 日本語を用いた表現、またはその省略的表現。	音声言語で表す能力 文字言語で表す能力	音声言語や文字言語で表されたことを理解する能力
＜記号的表現＞ 数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現。	式に表す能力 式を活用する能力	式に表されたことを理解する能力

表現様式については、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現の順で抽象度が高くなる。したがって、表現様式を抽象度の高い表現に変換する際には、曖昧に解釈されないように注意を促すことが必要である。また、説明が難しい場合には、抽象度の低い表現に変換することも有効であることを生徒に実感させる必要がある。

２　生徒の表現力の実態

生徒の表現力の実態を把握するために、数学の解法に関する質問及び問題からなる質問紙による調査を実施した。対象は、研究協力委員の学校の第１学年、第３学年の生徒とした。「記号的表現」を「記号的表現」と「言語的表現」に、「図形的表現」を「記号的表現」と「言語的表現」に変換させることで、表現力の実態の把握に努めた。それぞれの問題では、生徒の表現力の実態だけではなく、問題の構造の把握や数学的な内容の理解の程度も把握することができる。また、解答欄に表現されたものだけではなく、欄外に示された図や計算の過程等も確認し、思考の状況の把握にも努めた。

(１)調査の実施について

①対象・実施時期等

対　　象：研究協力委員の学校の第１学年 140 名、第３学年 70 名の生徒
　　　　　第３学年の生徒については、進学希望者

実施時期：平成 20 年６月～10 月
　　　　　第１学年の生徒については、数学Ⅰ「図形と計量（三角比)」、数学Ａ「場合の数と確率」を学習した後

時　　間：おおむね 20 分程度

②出題のねらい

数学の問題を通して、生徒の表現力の実態を把握する。

◎各問題の出題のねらい

$\boxed{1}$　2007 年度大学入試センター試験の確率の問題の一部を使用し、（１）では、場合の数の問題の構造の把握方法を選択肢を用いて確認する。（２）では、解答を示し、その解答が正しいことを説明させることで、記号だけで表現された情報（記号的表現）を、記号（記号的表現）や言語（言語的表現）を適切に用いて、他者に分かりやすく説明できるかどうかを確認する。

$\boxed{2}$　円に内接する四角形の求積問題について、図形で表現された情報（図形的表現）を、記号（記号的表現）と言語（言語的表現）を用いて、分かりやすく条件設定をしたり、問題設定をしたりすることができるかどうかを確認する。

$\boxed{3}$　総合教育センター主催の平成 19 年度土曜開放講座（中学校・高等学校数学科）において、筑波大学の礒田先生が講座の中で受講者に出題したものである。表面的には、容易な表現を用いて示されているが、奥に隠された数学的な内容を他者に分かりやすく説明できるかどうかを確認する。

(２)問題の正答率と生徒の状況

①記号的表現→言語的表現、記号的表現

$\boxed{1}$　次の問題を読んで下の問いに答えなさい。

　１辺の長さ１の正六角形があり、その頂点の一つをＡとする。一つのさいころを３回投げ、点Ｐを次の（ａ)、(ｂ)、(ｃ）にしたがって、この正六角形の辺上を反時計回りに進める。

（ａ）頂点Ａから出発して、１回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める。

（ｂ）１回目で点Ｐがとまった位置から出発して、２回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める。

（ｃ）２回目で点Ｐがとまった位置から出発して、３回目に出た目の数の長さだけ点Ｐを進める。

　このとき、３回進めたとき、点Ｐが正六角形の辺上を１周して、ちょうど頂点Ａに到達する目の出方は何通りあるか。　(2007 年度大学入試センター試験から)

（１）上の問題を読んで解答しようとするとき、あなたはまずどうしますか。あてはまるものの記号に○をつけなさい。

ア　場合の数を求めるので、順列、組合せ、積の法則等のうちどれを使うか考える。

イ　頂点Ａに到達するような場合の樹形図を書いてみる。

ウ　問題に示された条件を図や絵で表してみる。

（２）Ａ君は、「３回進めたとき、１周して、ちょうど頂点Ａに到達する目の出方の場合の数」を次のように求めた。

$$3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}=6+3+1=10$$

したがって、10 通り

Ａ君が考えた式「$3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}$」が成り立つことを説明しなさい。

◎生徒の解答状況

設問	（１）			（２）			
	ア	**イ**	**ウ**	説明できた	説明が不十分	説明できない	無答
第１学年	7.1	5.7	87.1	32.9	4.3	40.7	22.1
第３学年	2.9	4.3	92.9	58.6	4.3	22.9	14.3

(数字は対象生徒数に対する割合（%))

問題は、2007 年度大学入試センター試験の数学ⅠＡで出題されたものである。

（１）では、この問題の構造を把握する方法について確認した。解答からも分かるとおり、ほとんどの生徒が、**ウ**の「問題に示された条件を図や絵で表してみる。」と解答している。この問題の場合は、問題がやや長めの文章で示されており、図が描かれていないことから、**ウ**を選択した生徒が多かったと思われる。当初は、図や絵を描いて問題を把握することよりも、「順列なのか、組合せなのか」を考える生徒が多いのではないかと予想していたが、いい意味で予想が裏切られた。この結果を受けて、生徒の解答用紙を調べ、用紙に図が描いてある生徒数を確認したところ、次のようになった。

◎図を描いて問題を把握している生徒の割合

設問	**ア**		**イ**		**ウ**		**合計**	
	図あり	図なし	図あり	図なし	図あり	図なし	図あり	図なし
第１学年	0.7	6.4	2.1	3.6	54.3	32.9	57.1	42.9
第３学年	0.0	2.9	2.9	1.4	78.6	14.3	81.4	18.6

(数字は対象生徒数に対する割合（%))

この結果を見ると、**ア**と解答した生徒の多くは図を描かない。**イ**と解答した生徒の中には、樹形図を書くと同時に、問題の把握のために図を描いている者がいることが分かる。**ウ**と解答した生徒の中には、「問題に示された条件を図や絵で表してみる。」と解答しているにもかかわらず、図を描いていない生徒がいることが分かる。問題に取り組む意識と実際の取組に若干の乖離が見られる。

また、**ア**、**イ**、**ウ**の解答状況は、第１学年と第３学年とではほぼ同程度の割合であるが、実際に図を描いた生徒の割合を比較すると、第３学年の方が約 1.5 倍になっていた。これは、調査対象とした３校における指導の成果と考えられる。問題の状況を把握するために図を描くことが定着してきていると考えられる。

（２）では、表現された式を言語的表現や記号的表現を用いて説明できるかどうかを確認した。確率が既習事項の生徒ではあるが、説明できた生徒の割合は、第１学年で 32.9%、第３学年で 56.8% と、大きな違いがある。また、無答率も第１学年が第３学年を大きく上回る。説明できない生徒の記述内容を見ても、第１学年では、何を述べていいのか分からずに、戸惑っている様子が見て取れる解答が多かった。以下に、説明できた解答の中から、第３学年と第１学年の生徒の主なものを示す。

◎第３学年の生徒の解答

解答Ａ

3回進めたとき、1周して、ちょうど頂点Aに到着する目の出方は

(i) 1, 2, 3 の3つの数字の出る出方 → 3!

(ii) 1, 4 の 1が2つ, 4が1つ出る出方

→ $\frac{3!}{2!}$ ← 3つの数字の並べ方 ← 1が2つなのでだぶるからそれを無くすために2!である.

(iii) 2が3つ出る出方

→ $\frac{3!}{3!}$ ← 2が3つなのでだぶってしまうからそれをなくすために3!である.

この(i)(ii)(iii)は同時には起こらないので和の法則をつかって

$3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3}{3!}=6+3+1=10$ よってこの式は成り立つ。

解答Ｂ

$3!=6$, $\frac{3!}{2!}=3$, $\frac{3!}{3!}=1$

1と2と3を1回ずつ使う場合が6回

1と1と4を使う場合が3回

2を3回使う場合が1回

1周してAにつくためには、3回投げた合計が $\boxed{6}$ になればよい。

◎第１学年の生徒の解答

解答Ｃ

1が1回、2が1回、3が1回の出方が 3!通り

1が2回、4が1回の出方が 3!通りあるうち、1の区別をなくすと、$\frac{3!}{2!}$通り

2が3回の出方は 3!通りあるうち区別をなくすと $\frac{3!}{3!}$通り

すべてを足すから $3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{3!}$

解答Ｄ

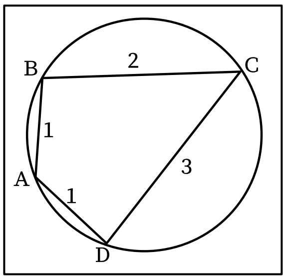
まず、3!とは、1回目、2回目、3回目が全て異なった数字の時のことで、
1回目も(1,2,3)のどれか、2回目も(1,2,3)のどれか、3回目も(1,2,3)のどれかなので、
1～3回目は3つの出方があることがわかる。よって3!。
$\frac{3!}{2!}$とは、上の問題でいう(1,1,4)(1,4,1)(4,1,1)のことである。
1回目・2回目・3回目の中で必ず2つは同じ数字がでてくるので区別をつけるため2!で割っている。
$\frac{3!}{3!}$とは、全て同じ数字の時である。3回とも同じ数字なので区別がつかなくなってしまう。
しかし、5の問題では、1回目・2回目・3回目と順番があるので区別をつけなくてはならない
そのため3!で割っている。最後に、この3つの事柄は同じ時に起こりえないので、
足していることがわかる。

第３学年で説明できた生徒の解答は、解答Ａのように、言語的表現と記号的表現をうまく組み合わせて、構造的に記述することで、相手に見やすく、分かりやすく説明しているものが多い。しかし、中には、解答Ｂのように、表現力が身に付いておらず、言語的表現が少なく、また、構造的に表現していないので、記号的表現の羅列になってしまうものがいくつかあった。

第１学年で説明できた生徒の解答は、解答Ｃのような記述が多い。言語的表現と記号的表現を組み合わせて表現しているものの、構造的な表現にまでは至っていない。特に、解答Ｄのように、言語的表現の羅列なってしまい、一目では分かりにくく、相手が理解できるようになるまでには時間がかかる表現がいくつかあった。いずれにしても、相手に分かりやすく書けるようになるまでにはトレーニングが必要であり、言語的表現と記号的表現を適切に使いながら、番号を振ったり改行したりするなど、表現するポイントの指導が必要であることが分かる。

②図形的表現→言語的表現、記号的表現

$\boxed{2}$　右の図の四角形ＡＢＣＤの面積を求める問題の文章を作りなさい。ただし、問題には図を利用せず、すべて文章（式を含む）だけで表現しなさい。また、問題は、最初に状況の設定を述べ、次に小問に分け（(1)、(2)、…など）、最後の小問は「四角形ＡＢＣＤの面積を求めよ」にしなさい。



典型的な問題である「円に内接する四角形の求積問題」を取り上げ、図から問題の文章と小問を設定させた。図に示されている情報を正しく読み取り、それを言語的表現に変換することができるかどうかを確認する。また、どのようなステップで四角形の面積を求めるのかをイメージしながら小問を設定できるかどうかを確認する。

◎生徒の解答状況（問題作成の状況）

問題作成の状況	問題として適した文章を作成できた	問題として不備があり問題が成立しない	無答
第１学年	52.9	39.3	7.8
第３学年	82.9	15.7	1.4

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

問題として適した文章を作成できた生徒の割合は、第３学年が第１学年を上回った。問題として適した文章を作成できた生徒の中でも、第３学年と第１学年では、ややその表現が異なっていた。第３学年の生徒のほとんどは、「円に内接する四角形」、「ＡＢ＝ＡＤ＝１、ＢＣ＝２、ＣＤ＝３」

という２つの条件を組み合わせて表現していた。しかし、第１学年では、正しく表現できた生徒（全体の 52.9%）のうち、約 25%が「円に内接する四角形」という条件を使わずに表現していた。第３学年の生徒は問題に慣れているため、同じように表現する者が多いが、第１学年の生徒はまだ問題に慣れていないためか、様々な表現があった。逆に言うと、第１学年の解答は生徒の自然な発想が読み取れる点で評価できる。考え方や表現方法を無理に限定せず、自由な発想も大切にしたい。

一方、問題の表現として不備があって問題が成立しない解答であった生徒の中では、円に内接していることに触れていない生徒、内接と外接を逆に表現している生徒が第１学年で全体の約 15%いた。問題を適切に表現できることは、問題の把握にもつながるので、十分に留意し、指導していかなければならない。

◎生徒の解答状況（小問の設定の状況）

小問の設定の状況	三角比の値・角の大きさだけ	辺の長さだけ	三角比の値・角の大きさと辺の長さの両方	その他	設問なし
第１学年	12.1	21.4	15.0	18.6	32.9
第３学年	8.6	8.6	42.9	17.1	22.9

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

四角形の面積を求めるために、四角形を２つの三角形に分割することについては、小問を設定した生徒のほとんどが理解し、表現していた。分割の仕方を見ると、△ＡＢＣと△ＡＤＣに分割している生徒と、△ＡＢＤと△ＣＢＤに分割している生徒の割合は、第３学年でも第１学年でもほぼ２：１であった。しかし、第１学年では、△ＡＢＣと△ＡＤＣに分割しておきながら、小問の中でＢＣの長さを求めさせる小問を設定している解答がいくつかあった。小問を設定する意図を考えることは、自らが問題を解く際の道筋を見通すために大切なことである。したがって、数学的な内容の理解を深めさせるためにも、授業の中で、問題を解かせることだけではなく、時には問題作りに取り組ませ、表現させることが大切となる。

小問の内容でも、第１学年と第３学年とでは異なる結果となった。第３学年では、三角比の値・角の大きさと辺の長さの両方を求めさせてから四角形の面積を求めさせる問題につなげている生徒が全体の 42.9%であったが、第１学年では 15%に止まった。解答の道筋をイメージできる生徒は、余弦定理の式を連立させて辺の長さを求め、そこから、三角比の値、角の大きさを準備することが、面積を求めるために有効であることに気付いている。しかし、第１学年では、イメージできる生徒が少なく、どちらか一方だけになってしまったのではないかと思われる。

以下に、第３学年、第１学年の生徒の解答の中で、三角比の値・角の大きさと辺の長さの両方を設定したもの、辺の長さだけを設定したもの、さらに、ユニークなものをそれぞれ示す。

◎第１学年の生徒の解答

・問題文を適切に設定した解答。△ＡＢＤと△ＣＢＤに分割して小問を設定している。

(問題) 円に内接する四角形ABCDがある。
AB＝1、BC＝2、CD＝3、DA＝1のとき次の問いに答えよ。
(1) BDの長さを求めよ。
(2) ∠BADを求めよ。
(3) △BADの面積を求めよ。
(4) 四角形ＡＢＣＤの面積を求めよ

・「内接する」という表現を用いずに、「円の中に」という表現を用いた解答。第１学年の解答では、問題として適した文章であったにもかかわらず「円の中に」という表現を用いていたものが多かった。また、この解答では、２つの三角形の面積をそれぞれ求めさせる小問を設定している。

（問題）ある円の中に四角形ABCDをつくる。
AB=1，BC=2，CD=3，DA=1をするとき，
(1) △ABCを求めよ
(2) △ADCを求めよ．
(3) 四角形ＡＢＣＤの面積を求めよ

・「円周上に４つの点がある」と設定した解答。

（問題）1つの円の円周上にA、B、C、Dの4つの点が順番に反時計回りに並んでいて、それを結んだ四角形ABCDがある。長さは、AB、ADが共に1、BCが2、CDが3である。

◎**第３学年の生徒の解答**

・問題文を適切に設定した解答。△ＡＢＣと△ＡＤＣに分割して小問を設定している。第３学年では、この解答のような表現方法が最も多かった。

（問題）
円に内接する四角形ABCDがある。各辺の長さはAB=AD=1，BC=2，CD=3である．
(1) ACの長さを求めよ．
(2) cos∠ABCの値を求めよ
(3) 四角形ABCDの面積を求めよ．

・問題文を適切に設定しているが、小問で２つの三角形の求積問題を設定している解答。

（問題）円に内接する四角形ABCDがある。このとき，AB=DA=1，BC=2，CD=3である
(1) △ABCの面積を求めよ
(2) △ADCの面積を求めよ
(3) 四角形ABCDの面積を求めよ

・問題文を適切に設定した解答ではあるが、小問では、辺の長さ、外接円の半径、内接円の半径等考えられるものをいろいろと取り上げている。問題としての是非は別として、発想としてはユニークである。教師にはなかなか作れないが、生徒ならではの小問でもある。

四角形ABCDは円に内接しており
AB=AD=1，BC=2，CD=3を満たしている。
次の問に答えよ。
(1) BDの長さを求めよ。
(2) 四角形ABCDの外接円の半径を求めよ。
(3) 四角形ABCDの内接円の半径を求めよ。
(4) ACの長さを求めよ
(5) 直線CBと直線DAの交点をPとするとき
PBとPAの長さを求めよ。
(6) 直線BAと直線CDの交点をQとするとき
AQとDQの長さを求めよ。
(7) △ABPの面積を求めよ。
(8) 四角形ABCDの面積を求めよ

③言語的表現、記号的表現による説明

$\boxed{3}$ $\sqrt{72.3}$ は８に近いか９に近いか、根拠を明らかにして説明しなさい。

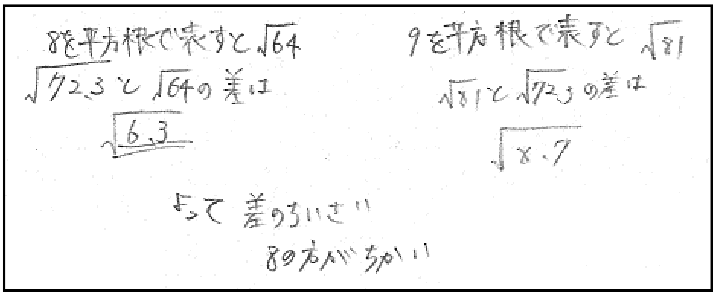
容易な言語、記号を用いて表現された問題であるが、奥に隠された数学的な内容を読み取り、それを他者に分かりやすく表現できるかを確認した。

◎生徒の状況

	８に近い			９に近い
	それぞれを平方し比較	$\sqrt{72}$ を計算し、その結果を活用	その他	8.5の２乗を計算し、その結果を活用
第１学年	76.4	3.6	17.9	2.1
第３学年	68.6	2.8	22.9	5.7

（数字は対象生徒数に対する割合（%））

結果から明らかに分かるように、第１学年、第３学年ともに多くの生徒が「８に近い」と答えている。その理由としては「それぞれの数を平方し差を取ると 72.3 は 8^2 に近い。したがって、８に近い。」としているものがほとんどであった。無理数の大小関係を考える際に、平方して比較することは、有効な手段の１つであり、それについてはよく理解されている。しかし、今回の問題については、それだけでは解決することができない。また、その説明として、数字を並べただけのもの、数直線を示しながら説明したもの、言語的表現を用いて説明したものなど、様々な解答があった。特に、それぞれを平方し比較しているが、例えば、$\sqrt{72.3}$ と８を比較するときに、次のような解答がいくつかあった点が気になった。

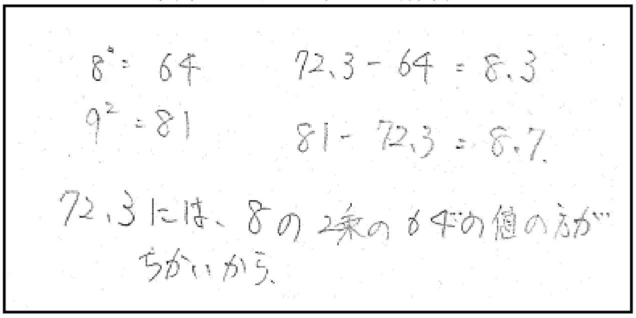


$\sqrt{5}-\sqrt{2}=\sqrt{3}$ といった計算をしない生徒であっても、このような問題が出題されると、思わず引き算をしまうことがある。確かな知識を定着させた上で、表現できるようにさせることが大切である。

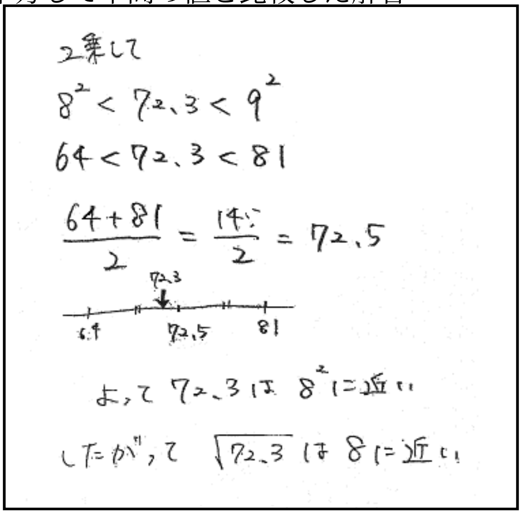
以下に、それぞれ平方して比較することで８に近いと解答した生徒のもの、９に近いと正しく解答できた生徒のものを示す。

◎主な誤答例

・それぞれを平方して差を取った解答

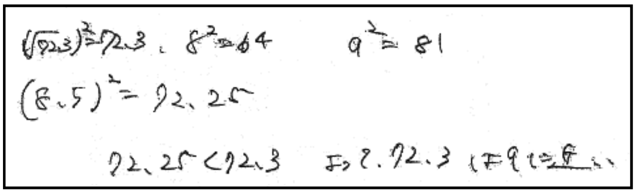


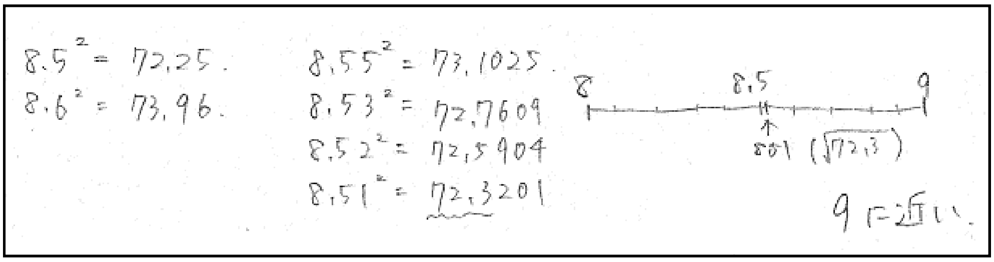
・平方して中間の値と比較した解答



◎主な正答例

・8.5の2乗を計算し、その結果を活用





(３)生徒の表現力の実態と指導の工夫について

質問紙による調査から、次の３つの課題が明らかになった。

- ・数学的記号や言語を用いて構造的に表現する能力
- ・図や式から適切に情報を読み取る能力
- ・基礎的な知識や数学の用語を正しく理解し、それを用いて表現する能力

１つめの「数学的記号や言語を用いて構造的に表現する能力」は、相手に分かりやすく伝えるためには、不可欠な要素である。生徒の解答を見ると、文章の羅列や、式の羅列が多い。読みやすく、分かりやすい表現にするためには、内容を理解し最終的な結論を見通して表現することが大切である。それだけではなく、番号をつけたり、段落に分けたりするなど、分かりやすくするためのスキルを身に付けていく必要もある。これらは、あらゆる場面で指導していかなければならないことである。また、相手の理解を得るためには、記号的表現だけではなく、言語的表現や図的表現を用いるなど、具体的な表現様式を用いることが有効であることを、指導を通して実感させる必要がある。

２つめの「図や式から適切に情報を読み取る能力」は、数学の問題を解決するためには必要な能力である。図や式などの意図を読み取り、問題の解決に必要な情報とそうでない情報とに分けることができるようになれば、自ら図を描くことや式を立てることに大いに役立つことになる。ただし、画一的な見方を教え込むことは好ましくない。例えば、今回の調査では、$\boxed{2}$の問題で、第３学年の生徒の方がより正しく表現することができたが、第１学年の生徒の方が表現が多様であり、アイデ

ィアに富んだものが多かった。自由な発想を生かしながら、その中で、必要な情報を読み取ることができるようにさせていくことが大切である。

この調査で顕著だったことは、３つめの「基礎的な知識や数学の用語を正しく理解し、それを用いて表現する能力」が身に付いていないことである。例えば、$\boxed{2}$の問題において「円に内接する四角形」と表現すべきところを「円の中にある四角形」と表現したり、$\boxed{3}$の問題において平方根の減法について $\sqrt{72.3}-\sqrt{64}=\sqrt{8.3}$ と表現したりする解答があった。これらは、基礎的な知識や数学の用語を正しく理解していないことから起こるものであり、これらを不適切な表現と思える感性を身に付けさせていかなければならない。

数学的な表現力の育成を重視した授業を展開するには、授業の中で、生徒が自分自身の考え方を形にすること、自分自身の考え方を他者に分かりやすく伝えること、他者が表現したことを見たり聴いたりすることを随所に盛り込んでいくことが大切となる。これらの活動を繰り返すことによって、数学的な表現力の高まりが一層期待できる。また、これらの活動をより有効に行うためには、多様な考え方ができる問題の設定が不可欠である。様々な考え方に触れる場面で、上述した３つの課題について留意するとともに、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現の変換を意図的に行わせる必要がある。これらの方針のもとに、事例の作成に取り組んだ。