高等学校における教科指導の充実

数　学　科

生徒の主体的活動を取り入れた授業展開の工夫

栃木県総合教育センター
平成20年３月

ま　え　が　き

教育課程実施状況調査や学力に関する国際的な調査では、日本の高校生の学力の状況や学習に対する意識などが明らかにされ、文部科学省等からも学力向上のための様々な対策や提言がなされています。このような中で、平成19年４月には、小学校第６学年と中学校第３学年を対象に、国語科、算数・数学科の２教科で、「全国学力・学習状況調査」が実施されました。10月末に公表された調査の結果から指摘された課題は、小・中学校においては喫緊の課題となっていますが、一朝一夕に解決することは難しい問題であると思われます。したがって、小・中学校における現在の課題は、とりもなおさず高等学校の課題としても引き継がれることになるでしょう。また、12月には、2006年のPISA調査の結果も公表され、科学的リテラシーをはじめ、数学的リテラシー、読解力を向上させるための対策が急がれる結果となりました。

各学校においても、教育活動の充実・改善に努めているところですが、特に教科指導においては、限られた時間の中で効果的な指導を展開して、生徒の学力向上を図ることは言うまでもありません。

これらのことを踏まえ、総合教育センターでは、「高等学校における教科指導の充実に関する調査研究」に取り組んでいます。この調査研究の目的は、基礎・基本の確実な定着を図るための授業改善を目指して、教科指導の在り方について研究し、その成果を普及することにより、学力の向上に資することにあります。

今年度は、国語科、地理歴史科、数学科、理科において、教育課程実施状況調査の調査結果等から指摘されている課題を踏まえ、その解決を図るための授業改善の方策等について研究に取り組みました。研究の成果をまとめた本冊子を、各学校の実情に応じて有効に御活用いただければ幸いです。

最後に、今年度の調査研究を進めるにあたり、御協力いただきました研究協力委員の方々に深く感謝申し上げます。

平成20年３月

栃木県総合教育センター所長
五　味　田　謙　一

目　　　　　　　次

生徒の主体的活動を取り入れた授業展開の工夫

はじめに

平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査（以下、「教育課程実施状況調査」とする）の結果が平成 19 年 4 月に公表された。そこでは、ペーパーテスト、生徒質問紙調査の結果から、次のような課題が示された。

・基本的な概念や用語・記号の意味の理解が十分でない。
・数学に対する関心や意欲が低く、学習内容についての理解が浅い。
・数学的な表現力が十分でない。
　特に、問題場面や事象の本質を数学的に表現する能力や、自分自身の問題解決の過程や推論の過程を論理的かつ的確に表現する能力が十分でない。
・身近な事象や社会生活全般において、数学の果たす役割や有用性が実感できていない。

このような結果のもと、次のような指導上の改善点が示された。

調査結果を踏まえた指導上の改善点

○中学校から移行された内容の学習指導の充実をはじめ、基礎・基本の確実な定着を図る
○生徒の主体的活動に基づく学習指導の工夫
○数学的な表現力や数学的な思考力の育成
○社会生活における様々な事象との関連を図るなどの工夫によって､数学の有用性を実感させる

特に「生徒の主体的活動に基づく学習指導の工夫」については、その具体的な方策として、「数学的活動を充実させること」､「数学的コミュニケーションを生かした授業の工夫」､「コンピュータやグラフ表示が可能な電卓などのテクノロジーを活用した学習指導の工夫」の３点が挙げられている。これらの工夫を図ることによって、数学に対する関心や意欲を高め、学習内容の深い理解を得ることができ、さらに、数学的な表現力、思考力の育成につながると考える。そこで、本研究では、「生徒の主体的活動を取り入れた授業展開の工夫」をテーマとして、３つの授業実践に取り組んだ。

各事例の内容は、次のとおりである。

事例１　数学的コミュニケーションを生かした「２次関数」の指導の工夫

数学Ⅰ「２次関数とそのグラフ」の単元全体を通して、「話し合い」活動、「書く」活動を取り入れることで、数学的コミュニケーション能力の育成を図るとともに、数学に対する関心や意欲を高め、数学的な表現力の向上をめざして取り組んだ。実践例として、２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフのかき方を取り上げた。

また、今回の取組では、事前・事後に数学的コミュニケーションに関わる意識についてアンケート調査を実施し、生徒の意識の変容を確認した。

事例２　コンピュータを活用した「三角関数」の指導の工夫

数学Ⅱ「三角関数」の単元全体を通して、コンピュータを活用し、生徒が主体的に学習活動に取り組む授業を計画し、実践した。コンピュータを活用して数学的な関係や性質をイメージさせ、そのイメージをもとに感じたこと、考えたことを表現させることで、生徒の主体的活動を促すことができる。そして、単元全体を通してイメージが膨らみ、変容していくことで、数学的な理解が深まると考えた。特に、数学Ⅱ「三角関数」では、多くの公式が登場し、生徒が苦手とする単元でもある。公式を単に暗記するのではなく、それぞれの意味が理解できるようにさせることをねらいとした。

事例３　「積分」の導入段階での指導の工夫

数学Ⅱで扱う積分は、微分の逆の演算として導かれる。多くの生徒が、計算に苦心し、積分の計算の意味を理解できないまま学習が進んでしまうことがある。そこで、積分の導入として小単元「積分の探求」を設定し、区分求積法から考察していくことで、積分の計算の意味が実感できるようにした。授業の各場面では、ワークシート、コンピュータを活用することで数学的活動を促し、積分が学問として成立していく過程を追体験できるようにした。

授業の実践では、生徒にアンケート調査を実施し、生徒の授業に対する反応を把握することに努めた。また、各事例では、学習指導案の形式にとらわれずに、実際の授業での生徒と教師のやりとりで授業の様子を示したり、生徒が表現したワークシートを示したりするなど、生徒の主体的活動が読み取れるよう配慮した。各事例の中から、生徒の数学に対する興味や関心、数学的な表現力の高まりを読み取っていただきたい。

なお、各事例における単元のねらい、評価規準、学習計画・評価計画、教材等は、実践していただいた研究協力委員の先生方の学校の実態に合わせて設定したものである。

＜研究協力委員＞

栃木県立宇都宮清陵高等学校	教　諭	小　島　浩　二
栃木県立鹿沼高等学校	教　諭	國　安　　貴
栃木県立栃木商業高等学校	教　諭	黒　川　真由弥

＜研究委員＞

栃木県総合教育センター　研究調査部	指導主事	吉　川　孝　昭
栃木県総合教育センター　研　修　部	指導主事	植　木　　淳

事例１　数学的コミュニケーションを生かした「２次関数」の指導の工夫

１　事例の概要

生徒のペーパーテストの解答に、表現力の未熟さを感じることがある。「式の羅列に終始し、読み手を意識した解答になっていない」、「数値や式を求めることに夢中になり、解法の方針や考え方の道筋を表現することが苦手である」というようなことがそれに相当する。

これらの課題を改善する１つの方法として、報告書では「教師による説明中心の授業にとどまるのではなく、生徒が自分の解決過程や推論過程を筋道立てて発表する場や、他者の考えを解釈する場、さらに、多様な考えの比較検討を通じて数学的な見方や考え方のよさを実感させる場を設けるなど、数学的コミュニケーションに基づく学習指導を工夫する」ことが挙げられている。

しかし、数学科の授業におけるコミュニケーションの現状は必ずしも良好であるとは言えない。教育課程実施状況調査の生徒（28,999 名）、教師（867 名）への質問紙調査では、次のような結果が挙げられている。

対象	質問事項	回答状況	
生徒	数学の時間に、いろいろな考え方を発表し合うのは楽しいですか。	楽しい	7.8%
		どちらかといえば楽しい	26.6%
		どちらかといえば楽しくない	25.5%
		楽しくない	39.3%
教師	生徒同士または生徒と教師との対話等、コミュニケーションを重視した授業を行っていますか。	行っている方だ	26.9%
		どちらかといえば行っている方だ	44.9%
		どちらかといえば行っていない方だ	21.3%
		行っていない方だ	6.6%

＊生徒、教師とも「その他」、「無答」があるため 100%にならない。

この結果を見ると、70%を超える教師はコミュニケーションを重視した授業を実施していると回答している。その一方で、生徒は、いろいろな考え方を発表し合うことについて約 65%が楽しいことではないと回答している。教師は、コミュニケーションを生かした授業を実施しているが、生徒はそれを楽しいと感じていないということになる。

そこで、本事例においては、生徒が楽しいと感じながら、数学に対する関心や意欲を高め、数学的な表現力の向上をめざした「数学的コミュニケーションを生かした授業」にするために、授業の中で友達と話し合ったり、議論したりする場面の工夫改善に取り組むことにした。

(1)　「数学的コミュニケーションを生かした授業」について

そもそも「コミュニケーション」とは、広辞苑によると「社会生活を営む人間の間に行われる知覚・感情・思考の伝達。言語・文字その他視覚・聴覚に訴える各種のものを媒介とする。」とされている。本事例では、「数学的コミュニケーションを生かした授業」とは、学習内容の理解を深めるとともに、数学への関心や意欲を高め、数学的な表現力を向上させていくために、「話し合い・議論の場面」、すなわち、「考えを伝達する場面」、「考えを聞く場面」、「考えを比較検討する場面」を随所に設定した授業であると考えた。

そして、話し合い・議論を有効に展開させるために、単に「話し合い・議論の場面」を設定するだけではなく、その前後に、「考える場面」、「ノートに考えや感じたこと等を表現する場面」を適切に設けることにした。話し合い・議論の前に、自分自身の考えをノートに表現することで、学習内容を整理できることはもちろん、自らの考えを分かりやすく伝える準備ができる。また、話し合い・議論の後に、振り返って感じたことをノートに表現することで、自らの考えを客観的に捉え直し、数学的

な表現力の高まりや学習内容の深い理解につながる。さらに、自分の考えや友達の異なる考えの存在を再認識することができ、それは、生徒自身の情意的な変容につながることになる。

「話し合い・議論の場面」は、数学的活動の外的活動である。それに対して、「考える場面」、「ノートに考えや感じたこと等を表現する場面」は、内的活動になる。今回の取組では、内的活動と外的活動がそれぞれの質を高めるという、相乗効果が期待できる。

(2) 生徒の実態

教育課程実施状況調査によると、数学の時間にいろいろな考え方を発表し合うことを楽しいと感じていない生徒が多い。そこで、研究協力委員の学校の第１学年の生徒を対象に、自分で考えること、友達の考えを聞くこと、話し合いや議論をすることへの意識について、「数学の授業に関するアンケート」と題してアンケート調査を実施し、生徒の意識を詳しく確認することにした。

①対象および実施時期

対　　象　研究協力委員の学校の第１学年の生徒　合計 231 名

実施時期　平成 19 年 10 月～11 月

②質問項目とその結果

質問事項(1)～(18)に対して、同意の程度を

「とてもよくあてはまる」　・・・・・・・4

「どちらかといえばあてはまる」　・・・・3

「どちらかといえばあてはまらない」　・・2

「まったくあてはまらない」　・・・・・・1

とし、回答させた。１から４を点数化し、項目ごとに全体の平均値を算出した。その結果をまとめたものが次の**表１**である。

表１「数学の授業に関するアンケート」の結果

質　問　事　項	平均値
(1)　数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.9
(2)　数学の授業のとき、友達がなぜそのように考えたのか、そのわけを聞きたいと思います。	2.7
(3)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えてみたいと思います。	3.2
(4)　数学の授業のとき、友達の発表に対して、問い返したいと思います。	1.8
(5)　数学の授業のとき、友達の考えに、付け加えたいと思います。	1.8
(6)　数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3
(7)　数学の授業のとき、いろいろな考え方のわけを聞くことは大切です。	3.4
(8)　数学の授業のとき、自分でじっくりと考えることは大切です。	3.6
(9)　数学の授業のとき、問い返すことは大切です。	2.7
(10)　数学の授業のとき、付け加えることは大切です。	2.5
(11)　数学の授業のとき、友達の考えが同じか、違うかを知ることは大切です。	2.9
(12)　数学の授業のとき、よりよい考えに高めていくことは大切です。	3.3
(13)　数学の授業のとき、友達と話し合うことは大切です。	3.2
(14)　数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすることは、数学の勉強によいことです。	3.1
(15)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えていくと、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになります。	2.9

質　問　事　項	平均値
(16) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えをはっきりとしたものにすることができます。	3.0
(17) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えを深めることができます。	3.1
(18) 数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、新しい考えをつくりだすことができます。	3.0

③結果の考察

○自分で考えることと友達の考えを聞くことについて

「自分でじっくり考えていく」ことのよさを捉えているかどうかについて

(3)	数学の授業のとき、自分でじっくり考えてみたいと思います。	3.2
(8)	数学の授業のとき、自分でじっくりと考えることは大切です。	3.6
(15)	数学の授業のとき、自分でじっくり考えていくと、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになります。	2.9

「友達の考えを聞く」ことについて

(1)	数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.9
(6)	数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3

数学の授業では、「友達の考えを聞く」こと、「自分でじっくり考える」ことの重要性はそれぞれ認識しているものの、「友達の考えを聞く」姿勢よりも、むしろ「自分でじっくり考える」姿勢がやや強い。しかし、項目(15)で見られるように、「自分でじっくりと考える」ことで、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになると感じている生徒数は減少する。実際の場面では、「何を考えればいいのか、どう考えればいいのかが分からない」、「自分だけでは解決できないことが多い」と思っている生徒がいるのではないかと考えられる。

数学の学習を進めるにあたっては、自分でじっくり考えることと友達の考えを聞くこととは、決して対立するものではない。むしろ、友達との話し合いや議論という外的活動によって、自分でじっくりと考えるという内的活動の高まりが期待できる。そのためにも、「友達の考えを聞いてみたい」という思いを高め、それが自らの考えを深める上で有効であることを認識させることが大切となる。

○友達の考えを聞くことについての意識と重要性の意識

友達の考えを聞くことの意識

(1)	数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.9
(2)	数学の授業のとき、友達がなぜそのように考えたのか、そのわけを聞きたいと思います。	2.7
(4)	数学の授業のとき、友達の発表に対して、問い返したいと思います。	1.8
(5)	数学の授業のとき、友達の考えに、付け加えたいと思います。	1.8

友達の考えを聞くことの重要性の意識

(6)	数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3
(7)	数学の授業のとき、いろいろな考え方のわけを聞くことは大切です。	3.4
(9)	数学の授業のとき、問い返すことは大切です。	2.7
(10)	数学の授業のとき、付け加えることは大切です。	2.5

友達の考えを聞くことの目的の意識

(11)	数学の授業のとき、友達の考えが同じか、違うかを知ることは大切です。	2.9
(12)	数学の授業のとき、よりよい考えに高めていくことは大切です。	3.3

「大切だ」という意識（項目(6)(7)(9)(10)）の方が、「してみたい」という意識（項目(1)(2)(4)(5)）よりも高い。このことは、友達の考えを聞くことは大切であるが、実際にそうしてみたいという気持ちは、気恥ずかしいこともあり、それほど強くもてないと考えられる。授業の中で教師が問いかけたときに、生徒は分かっていても、何か言いたくても、それに応えないことがある。高校生という発達段階を考えると、いたしかたがない面もあるが、その場で生徒の考えをいかに引き出すかが大切となる。実際に友達の考えを聞くことができるようになるためには、自分の考え方と友達の考え方との違いを明確に認識できるようになるとともに、相手に理解されるように問うたり、考えの違いを明確にしながら話したりする技能を身に付けていくことが必要となる。そして、それらの技能を身に付けさせるためには、生徒の発言の取り上げ方がコミュニケーション活動を成立させる上で重要となる。

○話し合いや議論の大切さについての意識とその価値の捉え方

話し合いや議論の大切さの意識

(13)	数学の授業のとき、友達と話し合うことは大切です。	3.2
(14)	数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすることは、数学の勉強によいことです。	3.1

話し合いや議論をすることの価値の捉え方

(16)	数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えをはっきりとしたものにすることができます。	3.0
(17)	数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えを深めることができます。	3.1
(18)	数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、新しい考えをつくりだすことができます。	3.0

数学の授業のおいては、友達と話し合ったり議論したりすることよりも、自分でじっくり考えることの方が大切である（項目(8)）という意識がやや高い。これは、従来の授業が、内的活動が中心で、問題に一人で取り組むことが多かったからではないかと考える。そこで、授業の中で、友達と話し合ったり議論したりする場面では、何を話し合うのか、何のために話し合うのか、どのように話し合うのかを明確にして、話し合ったり、議論したりすることのよさを生徒に十分味わわせることが大切であると考える。

アンケートの結果から、今回の取組を通して、「友達と話し合ったり議論したりする」という外的活動が、「自分でじっくり考える」という内的活動の質を高めることに有効であり、それが、数学的な表現力の向上にもつながることを確認していきたい。

2　指導の展開

生徒の実態を踏まえ、数学Ｉ「２次関数とそのグラフ」の単元を通して数学的コミュニケーションを生かした授業に取り組んだ。実践例は、「２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフのかき方」である。

(1) 単元「２次関数とそのグラフ」の目標・評価規準、学習計画・評価計画

①単元「２次関数とそのグラフ」の目標・評価規準

単元の目標

具体的な事象と関連付けて、関数概念の理解を深め、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識できるようにする。また、２次関数について、表、式、グラフなどを用いてその関係を考察させ、２次関数について理解を深めるとともに、２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかくことができるようにする。

単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
Ⓐ1具体的な事象の中にある２つの数量関係に関心を持ち、関係を調べようとする。 Ⓐ2２次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。	Ⓑ1２つの数量関係を表、式、グラフを用いて考察することができる。 Ⓑ2２次関数のグラフの特徴を考察することができる。	Ⓒ1２つの数量関係を表、式、グラフを用いて表現することができる。 Ⓒ2２次関数のグラフの位置関係、グラフと式の関係を把握し、グラフをかくことができる。 Ⓒ3２次関数の式を一般形から標準形に変形することができる。	Ⓓ1関数の定義や関数のグラフの意味を理解している。 Ⓓ2グラフの平行移動について理解している。

②学習計画・評価計画

時　間	学　習　活　動	評価規準とのかかわり	評　価　方　法
第１時間	○時間と距離の関係を表、式、グラフを用いて表現し、「関数」とは何かを考察する。 ○関数の値を求めるとともに、定義域、値域について理解し、さらに、１次関数における定義域、値域について考察する。	Ⓐ1、Ⓑ1、Ⓓ1	関数関係にあるものについて、課題レポート(関数関係とはどのような関係か)を提出させ、取組の状況を確認する。
第２時間	○２次関数 $y=ax^2$ について、対応表を作成し、そのグラフを点をプロットすることによってかく。 ○グラフを観察し、２次関数のグラフの特徴を考察する（グループによる話し合い)。	Ⓑ2、Ⓒ1	グラフの特徴についてグループで話し合った内容（自らの考え、友達の考え、その違い）を、レポートで確認する。
第３時間 第４時間 第５時間	○$y=2x^2$、$y=2x^2+3$、 $y=2(x-2)^2$、$y=2(x-2)^2+3$ について、対応表を作成し、グラフをかく。 ○４つの２次関数の表、式、グラフの共通点、相違点について考察する（グループによる話し合い)。	Ⓐ2、Ⓑ2、Ⓒ2	グラフの共通点、相違点についてグループで話し合った内容をレポートにまとめさせ、確認する。
第６時間 第７時間	○ $y=ax^2$、 $y=ax^2+q$、 $y=a(x-p)^2$、$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの特徴から、グラフのかき方を考察し、グラフをかく。	Ⓑ2、Ⓒ2	小テストにより定着の状況を把握する。
第８時間 **（実践例の授業）** 第９時間 第10時間	○２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフのかき方を考察する（グループによる話し合い)。 ○２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフをかく。	Ⓐ2、Ⓑ2、Ⓒ2、Ⓒ3	グラフのかき方をグループで話し合い、自らの考え、友達の考え、その違いについて、レポートで確認する。 小テストにより定着の状況を把握する。

③単元「２次関数のそのグラフ」の中での数学的コミュニケーションを生かした授業の工夫

本単元では、３度の話し合いを取り入れるとともに、それをレポートにまとめさせた。話し合いの前には、生徒各自が考えたこと、気がついたことをそれぞれノートにまとめさせた。また、話し合いの活動の際には、友達の意見もそこに付け加えさせ、考え方の違い、気付きの視点の違い、表現の違いについてノートにまとめさせた。

第２時間では、２次関数$y=ax^2$のグラフの特徴について、話し合わせた。２次関数のグラフの特徴について、グラフの概形、グラフの対称性、グラフの凸を含めたaの値によるグラフの違いなどについて、次のような意見が出された。

グラフの概形について
- 「全てのグラフが原点を通り、そこでは、一番丸みを帯びている」
- 「必ず上半分か、下半分にしかグラフはない」

グラフの対称性について
- 「y軸で折ると重なる」
- 「x座標の絶対値が等しい点では、y座標が等しい」

aの値によるグラフの違いについて
- 「aの値が大きくなるほど開き方が狭くなる」
- 「aの値が“＋”の時は上半分にグラフが現れ、aの値が“－”の時は下半分にグラフが現れる」

それぞれについて、質問や意見が出されたが、まだまだ活発に話し合われたとは言い難い。しかし、それぞれの特徴を分類し、言葉を定義し、まとめたときには、教師から与えられたのではなく自分たちが見出した特徴であるとの実感がもてたようである。

第５時間は、４つの２次関数$y=2x^2$、$y=2x^2+3$、$y=2(x-2)^2$、$y=2(x-2)^2+3$のグラフの特徴について話し合った。それぞれのグラフの共通点、相違点について次のような意見が出された。

共通点について
- 「全てのグラフに頂点がある」
- 「グラフの形が同じ」
- 「頂点から横に１、２…と離れたときの、yは２、８…と増えていく」

相違点について
- 「同じグラフであるが、かかれている場所が違う」
- 「式に$+3$がついているときは、グラフは上にある」
- 「式に$(x-2)^2$があるときは、グラフは右に２だけいったところにある」
- 「式に$(x-2)^2$があるときは、グラフの軸が変わる」

それぞれ生徒自身の言葉であり、表現としては十分でないところがあるが、第２時間と比べると、表現に数量的なものが含まれるようになった。友達との話し合いを通して、他の人を説得するためには、数量的なものを含めて説明することが有効であることを実感できた生徒が現れてきた。また、第２時間のときは、既習事項（中学校で学んだこと）を生かすことができなかったが、ここでは、第２時間に学んだ語句や性質を用いて表現することができていた。話し合いの場面では、質問がいくつか出るようになった。「どのくらい変わるの？」、「どのくらい上にあるの？」といった質問がいくつかのグループから出ていた。また、意見を比較したり、分類したりすることができるように

なった。「それは、さっきの意見と同じことだよね」、「さっきの意見とはここが違うね」という言葉が、会話の中で交わされるようになった。

(2) 実践例

①授業の概観（授業のねらい、数学的コミュニケーションの視点）

授業のねらい（評価規準）

・２次関数の標準形、一般形の違いに関心を持ち、その違いを自らの言葉で表現する。

（Ⓐ2 ２次関数の表、式、グラフの相違点に関心を持ち、その違いを調べようとする。）

・２次関数のグラフの特徴から、一般形で表現された２次関数のグラフのかき方を考察する。

（Ⓑ2 ２次関数のグラフの特徴を考察することができる。）

数学的コミュニケーションの視点

数学的コミュニケーション能力の育成を図りながら、授業のねらいを達成するために、授業を進める上で留意しなければならいないことがある。それは、他者の視点を得る（外的活動）ことによって、自らの視点が高まっていく（内的活動）ことが実感できる授業となることである。さらに、考え方のよりどころとなる既習事項を効果的に活用しながら考える場面を設定することである。本授業では、１次関数のグラフと２次関数のグラフの特徴、２次方程式の解の公式で学んだ平方完成を活用して考える場面を設定した。これらをもとに、生徒同士の話し合いを進めるとともに、筋道を立てて考えることができるようにさせたい。ときには、できるかできないかだけではなく、どこが難しいのか、なぜ難しいのかを考えさえることによって、課題の解決への糸口を探らせることも必要となる。

②授業展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・２次関数の一般形について	○２次関数の一般形について $(x-1)(x-2)=0$ や $x^2-3x+2=0$　は、なんと呼ばれるものでしょうか。そうですね、２次方程式です。２次方程式もいろいろな形がありました。では、$y=ax^2+bx+c$ は何でしょうか？今まで学習したものの中に相当するものがあるでしょうか？ ・２次関数を表す式には、標準形（$y=a(x-p)^2+q$）と一般形（$y=ax^2+bx+c$）があることを知る。 ○２次関数の一般形のグラフの確認 ・コンピュータを用いて、一般形でかかれた２次関数のグラフも、放物線になることを確認する。	 ・コンピュータを用いて、$a(\neq 0)$、b、c の値に関わらず、放物線になることを確認する。

<table>
<tr><th>指導内容</th><th>学習活動（課題、発問、活動等）</th><th>指導上の留意点</th></tr>
<tr><td>・２次関数の一般形のグラフのかき方の手立ての考察
（場面１）</td><td>○２次関数のグラフのかき方の考察
（課題１）
２次関数$y=x^2-4x+3$のグラフをかこう。

$y=x^2-4x+3$のグラフをかくためには、どうしたらいいだろう？

（予想される生徒の反応）
・一般形で表現された式を標準形に変形して、グラフをかく。
・２次関数のグラフの頂点をグラフの対称性から求め、グラフをかく。
自分の考えをノートに記述
ノートに記述する際には、式の羅列ではなく、言葉、式、図を用いて表現する。
グラフのかき方の発表
考え方が分かるように発表する。
発表者への質問、意見を述べる。</td><td>・既習事項を思い出させながら確認する。
・点をプロットすることについては、認めるが、ここでは取り扱わないこととする。
・出された意見を適宜まとめさせる。</td></tr>
<tr><td>・２次関数の一般形のグラフのかき方の考察
（場面２）</td><td>○グループでかき方を決め、具体的にどうすればかけるのかを話し合う。
・１つのかき方について、具体策を模索し、$y=x^2-4x+3$のグラフをかく。
・発表
かき方が分かるように発表する。
発表者への質問、意見を述べる。</td><td>・前出の意見の中からグループで１つに決め、具体的なかき方を考察させる。
・同じかき方でも表現が異なる場合は、どこが違うのか、どう違うのかを考えさせる。</td></tr>
<tr><td>・グラフのかき方のまとめ</td><td>○グラフのかき方のまとめ
・グラフの特徴をもとにしたグラフのかき方
・式の特徴をもとにしたグラフのかき方
○グラフのかき方について、感じたこと、考えたことをノートにまとめる。</td><td></td></tr>
</table>

③授業の具体的場面の考察

場面１（２次関数の一般形のグラフのかき方の手立ての考察・一斉指導）

実際の授業展開の様子を教師（Ｔ）と生徒（Ｓ）の会話で示す。ＴとＳの後ろの数字は、順序を表すもので、教師は１人である。また、生徒については、何名かの生徒が数回発言をしている。

Ｔ１：今まで、$y=(x-1)^2+2$のような２次関数のグラフをかいてきました。
では、$y=x^2-4x+3$のグラフをかきたいのですが、どうしたらいいでしょうか？考えたことを発表してください。

Ｓ１：今まで２次関数のグラフの書くときは、$y=ax^2$のグラフをどのように平行移動したかを考えてグラフをかいてきたんですよね。だから、どう平行移動したか分かればグラフがかけるんじゃないかな。

Ｓ２：平行移動によって、結局、グラフの頂点や軸がわかりました。そして、実際にグラフをかくときは頂点と軸と y 軸との交点の座標を考えてグラフをかいていたので、この場合もそれが分かるとグラフがかけるはずですよね。

Ｔ２：そうですね。さきほど、コンピュータで見てもらったように、$y=ax^2+bx+c$ のグラフは、今までかいてきた放物線ですね。だとすると、$y=x^2-4x+3$ のグラフの頂点や y 軸との交点の座標が分かればグラフがかけそうだね。今まで学習したことを考えて、グラフの特徴や式の特徴から頂点や y 軸との交点の座標が分からないかな。

Ｓ３：y 軸との交点は、$x=0$ を代入すればいいから、今までより簡単に求められそうだけど、頂点はどうすれば分かるんだろう。

Ｓ４：それが、先生の言ったグラフの特徴や式の特徴から考えるということかな。

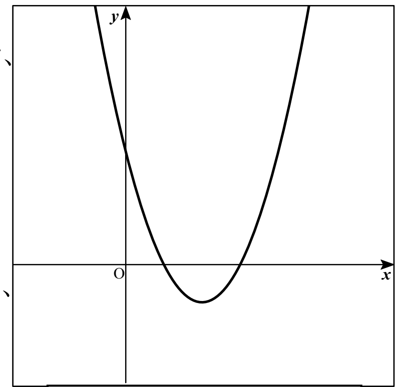
Ｓ５：グラフの特徴って、軸に関して対称だったり、上に凸か下に凸かということだったよね。

Ｓ６：今までグラフをかいたとき、x 軸と交わったときに、その交わった点の x 座標の真ん中が頂点だったから、x 軸と交わっているところの点が分かれば、頂点が分かるんじゃないかな。

Ｓ７：・・・・

Ｔ３：よく分からない人がいるようなので、だれか他の人で、説明できる人いないかな、前に出てきて黒板で説明してくれないかな。

Ｓ８：（適当な放物線を黒板にかき、説明を始める）
さっき、Ｓ６君が言ったのは、このグラフのここところが（放物線と x 軸との交点を指しながら）分かれば、それのちょうど真ん中が頂点になっているから、ここところが（放物線と x 軸との交点を指しながら）分かれば、頂点が分かるということだと思います。



Ｓ８が板書したグラフ

Ｓ９：えっ、本当にいつも真ん中なの？

Ｓ10：だって、２次関数のグラフは対称なんだから、真ん中になるんじゃないかな。

Ｔ４：確かに２次関数のグラフは軸に関して対称だから、うまく２点が分かれば頂点が分かりそうだね。問題は、「どうしたらこの２点が分かるか」だよね。これは、このあとグループになったら考えてみてください。
他の考え方はないかな。

Ｓ11：よく分からないんだけど…、

Ｔ５：いいよ、自分の言葉で説明してみて。

Ｓ12：さっきのは「グラフの特徴」だけど、「式の特徴」ってさっき言ってたから、$y=x^2-4x+3$ が、うまく今までやっていたような形に変えられれば、グラフがかけるんじゃないかな。

Ｔ６：今までやっていたような形って言うのは？

Ｓ13：$y=(x-1)^2+2$ みたいな形。

Ｓ14：どうやって、変えればいいんだ？

Ｓ15：そういえば、今までグラフをかいていたものは、だいたいカッコの２乗があったから、カッコの２乗になればいいんじゃないかな。
Ｓ16：カッコの２乗って前にも出てきたような気がするけど…。
Ｔ７：誰か覚えている人はいますか？
Ｓ17：２次方程式のところでやったんじゃなかったけ。解の公式のところで…。
Ｔ８：なかなかおもしろくなってきたね。式の特徴を考えてもグラフがかけそうだね。では、このあとは、グラフの特徴か、式の特徴か、どちらの方法でグラフをかくかを決め、そのかき方をグループで考えてグラフをかいてみてください。

場面１では、発表する生徒に、自分自身の言葉で表現するよう留意した。分かりにくければ、黒板に図を書かせたり、具体的なものを使って説明させたりすることが考えられる。その際、聞いている生徒のつぶやきを聞き逃さないことが大切である。つぶやいただけでは、その生徒の内的活動で終わってしまうので、それを話し合いの場に引き出すことによって外的活動である話し合いが活発化する。その結果、内的活動がさらに高められ、生徒自身が数学を創っていっていることを認識させることになる。

また、ここでは、Ｔ３の発言にポイントがあった。発表者以外の生徒に、発表された意見を考えた理由や具体的な例を発表させる。また、発表を中断させ他の生徒にその続きを説明させる。これらのことは、話し合いや議論を活発化させるには有効な手段である。また、多くの生徒が参加することで、内容の理解や表現力の向上にもつながる。ここでは、分かりにくかった発言（Ｓ６）を、黒板を使って分かりやすく説明することを他の生徒に求めた。

さらに、Ｔ６、Ｔ７の指導は、既習事項と結びつける際に、教師が説明してしまうのではなく、生徒自身に思い出させ、生徒自身の言葉で表現させることをねらいとしている。既習事項は、生徒が考えるよりどころとなるものであるので、教師が与えるのではなく、生徒自身から導きださせたい。

生徒の成長がうかがえる場面もあった。Ｓ３、Ｓ４、Ｓ９、Ｓ14は、他の生徒の発言に対して、率直に疑問を訴えることができていた。また、Ｓ５、Ｓ15は、多くの生徒が既習事項を思い出すことに十分寄与したと思われる。これらの発言が自由に、しかも、規律の中で出てくることによって、話し合いが活発になり、数学的な表現力、数学に対する関心・意欲の高まりにつながると思われる。

場面２（２次関数の一般形のグラフのかき方の考察・グループ学習）

あるグループ（５人）に焦点を当てて、その会話を示す。途中、教師の助言が入っている。

Ｓ１：どっちで考える？
Ｓ２：グラフで考えるのは、難しそうだから式で考えようよ。
Ｓ３：どんなふうに難しいと思う。
Ｓ４：グラフがかけないのに、どうやったら２つの点が分かるか難しくないかな。
Ｓ５：えっ、式も難しそうだよ。どうやったらカッコの２乗になるの？
Ｓ６：結局、両方大変そうだね。とりあえず、グラフでやってみて、だめだったら式にしてみようか。
Ｓ７：そうだね。

Ｓ８：さっき、「どうやったら２つの点が分かるかが難しい」って言ってたけど、どうしたらいい。
Ｓ９：・・・・・
Ｔ１：何で難しいのかな。
S10：グラフがかけないし、２次関数だし、・・・。
Ｔ２：じゃ、何だったらわかりそうかな。
S11：１次関数だったら、中学校のときにやったからできそうだよ。
S12：そういえば、１次関数のときに x 軸との交点を求めなさい。とか、やったよね。どうやったんだっけ。
S13：y を０にしたんだよ。
S14：そうだ。じゃ、２次関数でも、y を０にすれば、２つの点の座標が分かるんじゃない。やってみよう。
S15：1 と 3 になったよ。
S16：その真ん中だから、2 だ。頂点は、2 だ。
S17：でも、それは、x だよね。y はどうすればいいんだ？
S18：さっき、分からないときに１次関数で考えたから、また、１次関数で考えればいいんじゃない。
S19：１次関数で x が分かっているときは、式に代入すれば、y が出てきたんだから、今度も、式に入れればいいんだよ。
…

このグループでは、グラフの特徴からグラフをかくことに挑んだ。生徒同士の話し合いでは、難しいか、難しくないかが中心となり、どこにその難しさがあるかを考察しないことが多い。ここでは、教師がその補助を行った。そして、難しさに潜む解決のヒントを既習事項に結びつけることによって、このグループでは解決に至ったことが読み取れる。

生徒同士の話し合いの中で、自分の考えを伝えたり、友達の考えからヒントを見出し自分の考えをまとめたりすることで、グループとして筋道だった考察、表現になっていることを実感させることが大切である。このことは、生徒同士の話し合いという外的活動が、自分でじっくり考えるという内的活動の質を高めることにもなる。

また、既習事項を思い出しただけでは、関連を図ることにはならない。思い出した既習事項を用いて、直面している課題を解決に導かなければならない。今回は、すぐに解決に向かったが、ときには、解決に結びつかないこともある。そのことも生徒にとっては、学習になるであろう。

数学的な表現としては、まだまだ稚拙なところもあるが、以前と比較すると、発言の回数が増え、発言の内容も飛躍的に進歩している。今後、話し合う機会、書く機会を継続して設定することによって、表現力も徐々に身に付いていくことが期待される。

④授業後の取組と生徒の感想

本授業後に、グラフの特徴からグラフをかく方法、式の特徴からグラフをかく方法、それぞれのよさを話し合った。生徒からは、「２次関数のグラフの特徴をよく理解できた」「２次関数と２次方程式がこんなところでつながっているとは思わなかった」との感想が出されたが、生徒の話し合いで、今後は式の特徴からグラフをかく方法、すなわち、平方完成をしてグラフをかくことになった。その上で、２次関数の式の１次の係数が奇数である場合、２次の係数が１以外の場合について考察

し、２次関数のグラフのかき方としてまとめた。授業後に自由記述で授業の感想を書かせた。以下はその主なものである。

最初は(　)²の形ができなくて手がとまってしまったのですが、友達からのヒントのおかげで問題が解けました。また、授業をやっていて楽しかった。

友達の意見をきちんと聞くと思いがけないヒントがあり、次のステップへ進んでいけることが改めてわかりました。

友達と話し合いをして、問題を解けたのは、よかった。でも、逆に友達にたよりすぎてしまうところもあった。

友達の考え方をきいて、いろいろな考え方があるなあと思った。こういう授業だと数学が楽しくなると思います。

他の人の意見を参考にして考えることができた。他の人の意見を聞くことは大切だと思った。

生徒の感想を見ると、おおむね好意的に受け止めている生徒が多かった。しかし、「友達に頼りすぎてしまうところもあった」、「あまり自分の思ったことを口にすることができなかった」という感想のように、生徒によっては消極的な感想も若干見られた。今後は、これらの生徒が活躍できるようなグループ編成、問題場面の設定、助言の仕方も考えていかなければならない。

3　指導の結果と成果

(1) 生徒へのアンケート調査結果

授業を実施したクラスで、再度「数学の授業に関するアンケート」を実施した。その結果をまとめたものが次ページの**表２**である。その結果を見ると、意識の変容が見て取れる。特に、事前の調査では、友達の考えを聞くことの重要性の意識（「大切だ」という意識　項目(6)(7)(9)(10)）が高く、友達の考えを聞くことの意識（「～してみたい」という意識　項目(1)(2)(4)(5)）が低かったが、事後の調査では、友達の考えを聞くことの意識が高まっていることが分かる。実際に授業の中で、友達の考えを聞き、それに対して質問したり、意見を述べたりする経験を重ねることによって、自分たちにもできることが実感できたからであると考えられる。さらに、話し合ったり議論したりするという外的活動が、自分でじっくり考えるという内的活動の質を高めることになったことを実感できたからであると考えられる。これは、教師にとっては大いに反省をすべきことでもある。初めから無理だと決めつけずに、様々な経験を積ませることによって、生徒は大きな変容を見せる。今後、このような授業を継続することによって、生徒の数学の授業や数学そのものに対するイメージが、問題を解くことだけが数学の学習なのではなく、考えることとそれを他者に分かるように表現することも大切な要素であることが認識されるようになる。

表２「数学の授業に関するアンケート」（実施後）の結果

質　問　事　項	平均値		
	取組前		取組後
	全体	実施クラス	実施クラス
(1)　数学の授業のとき、友達の考えを聞いてみたいと思います。	2.8	2.8	3.3
(2)　数学の授業のとき、友達がなぜそのように考えたのか、そのわけを聞きたいと思います。	2.7	2.6	3.4
(3)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えてみたいと思います。	3.1	3.1	3.6
(4)　数学の授業のとき、友達の発表に対して、問い返したいと思います。	1.8	1.8	3.6
(5)　数学の授業のとき、友達の考えに、付け加えたいと思います。	1.8	2.0	3.4
(6)　数学の授業のとき、友達の考えを聞くことは大切です。	3.3	3.4	3.4
(7)　数学の授業のとき、いろいろな考え方のわけを聞くことは大切です。	3.3	3.4	3.6
(8)　数学の授業のとき、自分でじっくりと考えることは大切です。	3.5	3.5	3.7
(9)　数学の授業のとき、問い返すことは大切です。	2.7	2.7	3.6
(10)　数学の授業のとき、付け加えることは大切です。	2.5	2.7	3.4
(11)　数学の授業のとき、友達の考えが同じか、違うかを知ることは大切です。	2.9	3.3	3.3
(12)　数学の授業のとき、よりよい考えに高めていくことは大切です。	3.3	3.5	3.5
(13)　数学の授業のとき、友達と話し合うことは大切です。	3.2	3.4	3.6
(14)　数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすることは、数学の勉強によいことです。	3.0	3.2	3.6
(15)　数学の授業のとき、自分でじっくり考えていくと、分からないことや疑問に思っていることが分かるようになります。	2.8	2.9	3.1
(16)　数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えをはっきりとしたものにすることができます。	3.0	3.1	3.4
(17)　数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、考えを深めることができます。	3.1	3.2	3.5
(18)　数学の授業のとき、友達と話し合ったり議論したりすると、新しい考えをつくりだすことができます。	2.9	3.1	3.5

（２）　実践を通して

今回取り組んで、課題となることが大きく２点あった。

１つは、生徒の表現力の未熟さである。考えを発表する前に、自分のノートに考えを書かせたが、内容は十分ではなかった。図だけで示されていて何を示しているのかが分かりにくいもの、文章だけで表現されていて数学的な表現ができていないもの、式の羅列に終始していて式の意味やその式が成り立つ理由が不明なものなどがあった。また、発表の内容が、周囲に理解されないものもあった。数時間の授業では、生徒の表現力を十分に養うことはできない。３年間を見通して、考え方を記述したり、話し合ったり、議論したりする場面を設定することで、数学的な表現力の育成を図っていく必要がある。

もう１つは、単元の計画を数学的コミュニケーションの視点から改めて見直すことである。全ての授業で、話し合ったり議論したりする時間を設けることは難しい。そこで、単元全体の中で、どの場面で何を考えさせるのかを明確にすることが大切となる。その単元の主となる考え方の学習には、やはり生徒にじっくりと取り組ませたい。既習事項や今後学習する内容との結びつきを踏まえて、生徒に考えさせたいこともある。また、話し合ったり議論したりする時間を設定しなくても、発表者以外の生徒に、発表された意見を考えた理由や具体的な例を発表させたり、発表を中断させ他の生徒にその続きを説明させたりするなど、生徒の発言の取り扱い方を工夫するだけでもコミュニケーションが活発化し、内的活動を充実させることができる。これらのバランスを考えながら、単元全体でメリハリのある計画を設定する必要がある。その際、授業で扱う課題の設定も重要となる。教科書に載って

いる例や例題をそのまま課題として設定することができる場合もあれば、生徒の実態を踏まえて課題を新たに設定しなければならないこともある。数学的コミュニケーション能力の向上を図るためには、生徒の既習事項の習得状況、表現力、数学の学習への関心や意欲を十分に把握し、生徒の実態にあった課題を設定する必要がある。

　今回の取組を通して、生徒は大きな収穫を得ることができた。それは、数学的課題を材料として、友達と話し合ったり議論したりすることができ、そして、そのよさを再認識したことである。さらに、「数学を考える」ということがどういうことかを経験したことである。これらの意識の変容をここで終わらせることなく、さらに大きな変化となるよう授業の改善に取り組む必要がある。

事例２　コンピュータを活用した「三角関数」の指導の工夫

１　事例の概要

「コンピュータを活用した授業展開の工夫」については、以前からその必要性が指摘されている。下の表は、平成 14 年度、平成 17 年度の教育課程実施状況調査において、全国の数学科の教師 900 名弱に質問紙調査を実施した結果である。教室に、プロジェクタ、ノートパソコンが設置されて数年経過したが、この結果を見ても明らかなように、まだまだ活用状況は十分とは言えない。

コンピュータを活用した授業を行っていますか。	平成 14 年度	平成 17 年度
行っている方だ	6 (0.7)	10 (1.1)
どちらかといえば行っている方だ	17 (1.9)	18 (2.1)
どちらかといえば行っていない方だ	72 (8.0)	87 (10.0)
行っていない方だ	794 (88.5)	749 (86.1)
無回答・その他	8 (0.9)	6 (0.7)
全体	897 (100)	870 (100)

数字は人数。カッコ内はその割合。

一方、実際の授業の場面で、課題が与えられたときに、生徒は、どう計算するか、どの公式を用いるかに躍起になり、与えられた課題を絵に表したり、図に表したり、グラフに表したりして、課題の全体像を把握しようとする努力を怠ることがある。これらのことは、課題の解決について、考えることよりも、とにかく答えを求めることができればよいと思っていること、さらに、課題の全体像をイメージする習慣がないことに起因するのではないだろうか。

そこで、コンピュータの動的操作性やシミュレーション性を活用することによって、生徒自らが、課題の全体像を把握し、そこから、数学的な関係や性質を主体的に探求するような授業を実践することにした。また、コンピュータを活用するにあたっては、単に映像・画面を見せるだけでなく、見たものをさらに発展的に捉え直すなどの活用場面を設定することによって、深い理解へと導けるよう配慮した。そのためには、見せた映像・画面を再確認する場面、発展的に捉え直す場面などを随所に盛り込んだ単元の計画の見直しが必要となる。今回は数学Ⅱ「三角関数」の全体計画を見直すとともに、各授業の場面のつながりを意識した計画を立てて実践に取り組んだ。

２　指導の展開

数学Ⅱ「三角関数」の単元は、多くの公式が出てくることから、数学の苦手な生徒にとってあまり歓迎されない単元である。そこで、コンピュータを活用することによって、グラフや公式のイメージをもたせるとともに、各授業のつながりに配慮することによって、三角関数についての理解を深めることができるような単元の指導計画を立てた。また、それによって授業時間数が増えないようにすることにも配慮した。

(1) コンピュータを活用した授業について

コンピュータを活用した授業を実践する上で、次の２点について留意した。１つは、準備が簡単にできることである。これは、ネット上にある多くのフリーソフトウェアを利用することで解決することができる。特に、高等学校の数学科の授業では、大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久先生が作成された「GRAPES」、群馬県立桐生工業高等学校の和田啓助先生が作成された「Function View」、愛知教育大学の飯島康之先生が作成された「Geometric Constructor」等の利用が有効である。もう１つは、コンピュータで様々な変化の様子を見せることではなく、見せたことによって何を考えさせるかに重点をおくことである。コンピュータはあくまでも道具であり、生徒の主体的学習のきっかけとして活用するものである。また、授業を進める際には、導入、ワークシート、グループ学習等の学習形態、発問などを工夫する必要がある。

(2) 単元「三角関数」の目標・評価規準、学習計画・評価計画

①単元「三角関数」の目標・評価規準

単元の目標

三角関数の特徴を理解するとともに、関数についての理解を一層深め、具体的な事象の考察に活用できるようにする。

単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	表現・処理	知識・理解
Ⓐ1角度を一般角で表すよさを認識する。 Ⓐ2三角関数を具体的な事象の考察に活用しようとする。 Ⓐ3弧度法のよさを認識する。	Ⓑ1三角関数の加法定理や三角関数の合成を、証明を通して認識する。 Ⓑ2三角関数の相互関係や加法定理を用いて式を簡単にすることを考察することができる。	Ⓒ1三角関数の周期について理解し、そのグラフをかくことができる。 Ⓒ2三角関数の方程式や不等式を解くことができる。 Ⓒ3三角関数を合成することによって、最大値と最小値を求めることができる。	Ⓓ1三角関数について理解し、関数についての理解を深めている。 Ⓓ2三角関数のグラフの特徴について理解している。

②単元「三角関数」のコンピュータを活用した学習計画

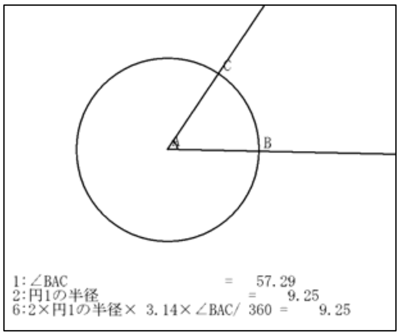
小単元名	指導内容	学習活動	コンピュータの活用	評価規準とのかかわり
三角関数 (13 時間)	角の拡張	○一般角を定義することで、角の拡張を行う。 ○弧度法を定義し、扇形の面積や周の長さの求め方を考察する。	・弧度法の定義を扇形の周の長さから推測する。	Ⓐ1、Ⓐ3
	三角関数とそのグラフ	○一般角に拡張した三角関数の定義を理解する。 ○三角関数のグラフの特徴を考察する。	・三角関数のグラフが単位円から生成される様子を確認する。 ・いろいろな三角関数のグラフからその特徴を考察する。	Ⓐ3、Ⓒ1、Ⓓ1、Ⓓ2
	三角関数の性質	○三角関数の相互関係や三角関数の性質を単位円、グラフを用いて考察する。 ○三角関数についての方程式・不等式を解くことができるようにするとともに、具体的な事象の考察に活用する。	・三角関数の性質を単位円、グラフを用いて考察し、導く。 ・周期的に変化する事象をコンピュータを用いて具体的に考察し、解決する。	Ⓐ2、Ⓑ2、Ⓒ2
加法定理 (７時間)	加法定理	○三角関数の加法定理に興味をもち、活用できるようにするとともに、その証明ができるようにする。		Ⓑ1、Ⓑ2

	加法定理の応用	○２倍角の公式、半角の公式を理解し、導き出すことができるようにする。 ○三角関数の合成について考察し、活用できるようにする。**（実践例の授業）** ○２倍角の公式、半角の公式、三角関数の合成を利用して、関数の最大値・最小値を考察したり、方程式・不等式が解けるようにする。	・グラフの合成から三角関数の合成を考察する。	Ⓑ2、Ⓒ3
問題演習（２時間）				Ⓐ2、Ⓓ1

従来の授業時数は、小単元「三角関数」が 12 時間、「加法定理」が７時間、「問題演習」が２時間、合計 21 時間であった。今回は、コンピュータを活用する時間と生徒が考察する時間が必要になるが、教材の精選によって、上記の表のように合計 22 時間で実施することにした。三角関数についての方程式・不等式の扱いがやや軽くなっているが、その分、三角関数のグラフの理解、加法定理・合成についての理解を深めたい。

③単元「三角関数」の中でのコンピュータの活用

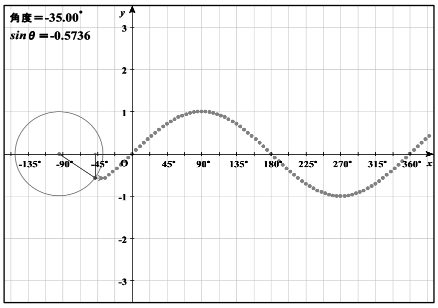
弧度法の定義



弧度法を定義する授業では、定義を与えるだけではなく、円の中心を通る２つの半直線が円の半径と同じ長さの弧の長さを切り取るときの角度を θ として、2θ、3θ のときの円の半径と弧の長さ、扇形の面積について考察させた。規則性に気付いた生徒自身とともに、新たな角度の単位として、弧度法を定義した。

ここで利用したソフトウェアは、Geometric Constructor である。

三角関数のグラフと単位円

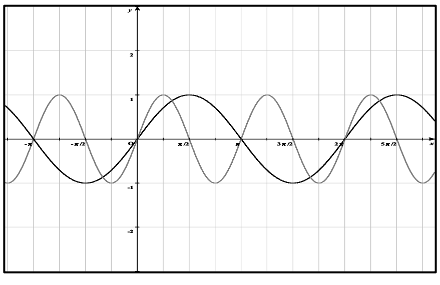


三角関数のグラフでは、単位円からグラフを生成し、その変化の様子を確認させた。

$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$ のグラフについて、それぞれのグラフがどのようになるかを各自に予想させ、その後、グループで話し合わせた。最後に、コンピュータを使って確認した。

ここで利用したソフトウェアは、Function View であり、$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$ ともに、サンプルファイルの中にあるものを利用した。

三角関数のグラフの特徴



$y=a\sin x$、$y=\sin kx$、$y=\sin(x-\theta)$について、それぞれのグラフがどのようになるかを各自に予想させ、その後、コンピュータを使って確認した。

ここで利用したソフトウェアは、Function View である。

それぞれの授業では、まず生徒一人一人に自ら考えたグラフを表現させ、次に、グループになって生徒同士でそのグラフを確認し、グラフの特徴について意見を交換させた。その後、実際にコンピュータの画面でグラフの概形を確認した。自らのグラフを表現させるときには、前時までに学習したことを発表させるなどして考えるための時間を設けた。

(3) 実践例

①授業の概観

授業のねらい（評価規準）

$y=\sin x$、$y=\cos x$ のグラフから、それらの和のグラフの概形を予測させ、$y=\sin x+\cos x$ のグラフの特徴について考察させる。グラフの特徴から、そのグラフを表す関数の式を予測、証明するとともに、合成できる条件を考察させる。（Ⓑ1）

展開の工夫（ワークシート、コンピュータの活用）

授業ではワークシートを活用した。生徒がプロジェクタに映し出されたグラフと手元にあるワークシート内のグラフを見比べながら作業ができるように配慮した。ただし、ワークシートには、考え方の道筋を極力示さずに、生徒が自ら考えたことを書き込めるようにした。

また、コンピュータを利用して見せるグラフについては、なるべくシンプルに作成し、生徒のイメージを膨らませ、多様な意見を引き出せるようにした。

作成したワークシート（４枚）

三角関数　6　　ワークシート１

２年　　組　氏名

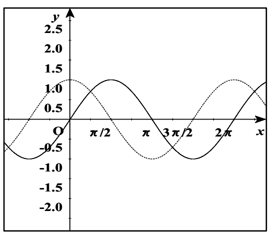
問１　次の三角関数の最大値・最小値を考えてみよう。

(1)　$y=\sin x$　　最大値：______　最小値：______

(2)　$y=\cos x$　　最大値：______　最小値：______

(3)　$y=\sin x+\cos x$
最大値：______　最小値：______

◇グラフを考えてみよう。



$y=\sin x$ と $y=\cos x$ のグラフから、$y=\sin x+\cos x$ のグラフがどうなるか考えてみよう。

グラフから分かる最大値、最小値
最大値：______　最小値：______

◇グラフから $y=\sin x+\cos x$ は、どんな式に変形することができるだろうか。
グラフから分かること

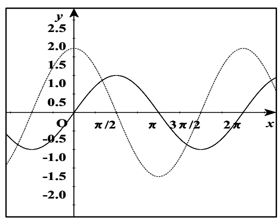
$y=\sin x+\cos x$ は？

三角関数　6　　ワークシート２

２年　　組　氏名

◇$\sin x+\cos x=$ $\boxed{}$ を証明してみよう。

問２　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフから最大値、最小値を考えてみよう。



$y=\sin x$ と $y=\sqrt{3}\cos x$ のグラフから、$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフがどうなるかを考えてみよう。

グラフから分かる最大値、最小値
最大値：______　最小値：______

◇グラフから $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ は、どんな式に変形することができるだろうか。
グラフから分かること

$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ は？

$y=\sin x+\cos x$ のグラフを考察し、そこから、式の変形を予測する場面でのワークシート

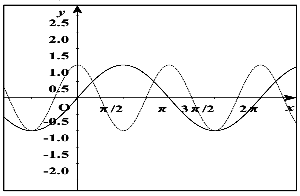
変形した式の代数的な証明と、$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフを考察し、そこから、式の変形を予測する場面のワークシート

三角関数 6　ワークシート３

２年　組　氏名

関数 $y=a\sin x+b\cos x$ について分かったこと！

問３ (1)　$y=\sin x+\cos 2x$ は $y=\sin x+\cos x$ と同じように変形することができるだろうか。



(2)　$y=\sin 3x+\cos 2x$ は？

(3)　$y=\sin 3x+\cos 3x$ は？

(4)　$y=\sin 6x+\cos 6x$ は？

以上のことから分かること

ワークシート１、２で分かったことをまとめ、さらに、どのようなときに変形することできるかを考察する場面のワークシート

三角関数 6　ワークシート４

２年　組　氏名

◇$y=\sin(cx)+\cos(dx)$ について、考えてみよう。

・$c=0$ または $d=0$ のとき
$y=\sin 0x+\cos x=$

$y=\sin x+\cos 0x=$

$y=\sin 0x+\cos 0x=$

・$c=1$ または $d=-1$ のとき　$y=\sin x+\cos(-x)=$

・$c=-1$ または $d=1$ のとき　$y=\sin(-x)+\cos x=$

これらのことから

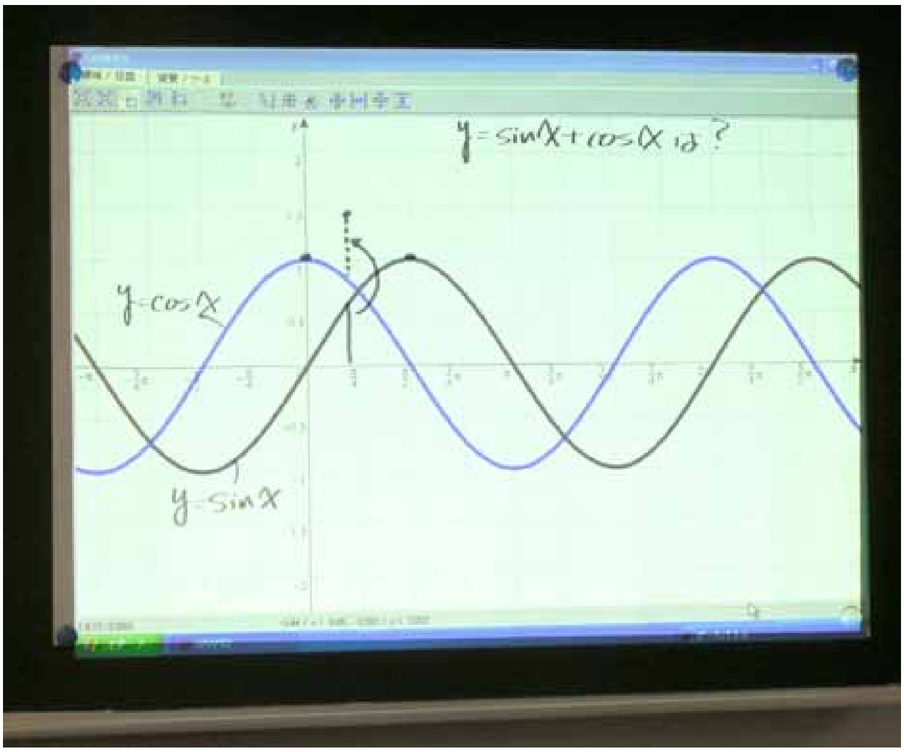
$y=\sin(cx)+\cos(dx)$ は、c、d の値によって容易に区別することはできないが、

【まとめ】
$y=\sin x+\cos x$、$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のように、関数 $y=a\sin(cx)+b\cos(dx)$ は、

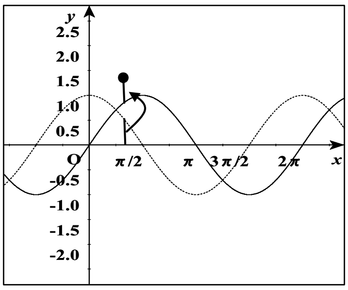
まとめの場面のワークシート

コンピュータの活用

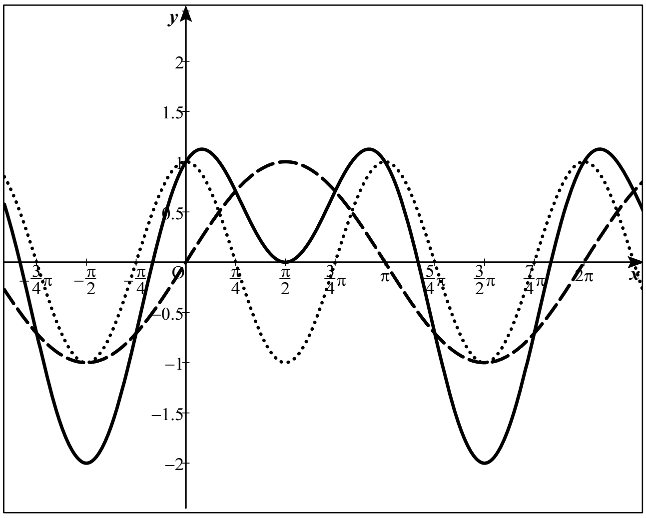
模造紙をスクリーン代わりに用いて、そこにプロジェクタでグラフを映し出した。模造紙は、点を書き入れたり、線分を書き入れたりすることができ、関数の和のグラフを考える際に大変有効であった。グラフを表示させたソフトウェアは GRAPES である。



②授業展開

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・課題の提示	○　いろいろな三角関数の最大値、最小値 問１　次の三角関数の最大値、最小値を考えてみよう。 (1)　$y=\sin x$　　最大値：________　最小値：________ (2)　$y=\cos x$　　最大値：________　最小値：________ (3)　$y=\sin x+\cos x$ 　　最大値：________　最小値：________ $y=\sin x+\cos x$ の最大値、最小値はどうなるか予想してみよう。 （予想される生徒の反応） ・最大値２、最小値－２ どうすれば、$y=\sin x+\cos x$ の最大値、最小値を求めることができるだろう。 （予想される生徒の反応） ・グラフをかく。 ・値を調べる。	・$y=\sin x$､$y=\cos x$ の値域について確認する。 ・$\sin x=1$、$\cos x=1$ になるときの x の値を確認する。
・$y=\sin x+\cos x$ のグラフの考察	○ $y=\sin x+\cos x$ のグラフの考察 $y=\sin x$、$y=\cos x$ のグラフから $y=\sin x+\cos x$ のグラフをかいてみよう。どうすれば、$y=\sin x+\cos x$ のグラフをかくことができるだろう。 ・２つの関数の和で表された関数の値は、１つの x の値に対応する $\sin x$、$\cos x$ の値を加えたものだから、グラフも x 軸からの長さを加えればよいことを確認する（コンピュータによる提示）。  ・同じようにして、長さを取って､いくつかの点をプロットし、$y=\sin x+\cos x$ のグラフを完成させる。（作業） ・完成したグラフから最大値、最小値を求める。（コンピュータによる提示） $y=\sin x+\cos x$ のグラフの特徴を読み取り、ワークシートに気付いたことを書いて、発表してみよう。 （予想される生徒の反応） ・$y=\sin x$ や $y=\cos x$ のグラフと同じように周期のある関数のグラフ ・$y=\sin x$ のグラフを y 軸方向に拡大し、x 軸方向に平行移動したグラフ ・$y=\cos x$ のグラフを y 軸方向に拡大し、x 軸方向に平行移動したグラフ	・コンピュータでグラフを提示しながら生徒から意見を引き出す。 ・y の値がマイナスのときに注意させる。$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$ などの特別な角については、具体的に値を求めさせる。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
・$\sin x+\cos x$ の変形	○ $\sin x+\cos x$ の式の変形の予測と確認 $y=\sin x+\cos x$ のグラフの特徴から、$\sin x+\cos x$ はどのように変形できるか考えてみよう。 （予想される生徒の反応） ・$\sin x+\cos x=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ ・$\sin x+\cos x=\sqrt{3}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ ・$\sin x+\cos x=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})$、$\sin x+\cos x=\sqrt{3}\cos(x-\frac{\pi}{4})$ がそれぞれ計算の上でも成り立つかどうか確認する。	・どちらも正しいことを確認する。 ・コンピュータで実際に両方の式を入力し、一致することを確認する。
・$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフの考察	○ $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフの考察 問２　$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ のグラフから最大値、最小値を考えてみよう。 $y=\sin x+\cos x$ のときと同じようにしてグラフを作成し、最大値、最小値を求め、そのグラフから $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ がどのような式に変形できるか考えてみよう。	・今までの学習を振り返り、同じように考えながら各自で取り組ませる。
・$y=a\sin x+b\cos x$ の確認	○ 関数 $y=a\sin x+b\cos x$ について分かったこと。 問１、問２から分かったことをワークシートに書いて、発表してください。 （予想される生徒の反応） ・$\sin x$ と $\cos x$ の和の関数は、$\sin x$、$\cos x$ のいずれか１つで表現することができる。 ・$\sin x$ と $\cos x$ の和の関数は、$\sin x$（$\cos x$）を y 軸方向に拡大し、x 軸方向に平行移動したグラフになる。	・２つの学習内容を確認し、生徒自身の言葉で分かったことを書かせる。多くの生徒の意見を発表させる。
・$\sin(cx)+\cos(dx)$ の変形の吟味	○ $\sin(cx)+\cos(dx)$ の吟味 どんな場合でも同じように、$\sin x$、$\cos x$ のいずれか１つで表現することができるだろうか。 問３(1)　$y=\sin x+\cos 2x$ は $y=\sin x+\cos x$ と同じように変形することができるだろうか。 (2)　$y=\sin 3x+\cos 2x$ は？ (3)　$y=\sin 3x+\cos 3x$ は？ (4)　$y=\sin 6x+\cos 6x$ は？ ・(1)は、グラフを作成し、そのグラフの特徴を読み取り、式が変形できるかどうか確認する。	・$y=\sin x+\cos 2x$ については、２倍角の公式を用いて $\sin x$ の２次関数になることを確認させる。 ・(1)から(4)までのグラフをコンピュータで提示し、確認する。

指導内容	学習活動（課題、発問、活動等）	指導上の留意点
		・(1)、(2)については、正弦曲線になっていないことをコンピュータを用いて確認する。 ・周期によって、変形できたり、できなかったりすることに気付かせる。
	・sin$x$、cos2x、sin3x、cos3x、sin6x、cos6x の周期、値域を確認する。	
	問１、問２と問３を比較して分かることをワークシートに書いて、発表してみよう。	
	（予想される生徒の反応） ・x の係数が等しい場合は、変形することができる。 ・x の係数が等しい場合は、それぞれの関数と等しい周期の関数として変形することができる。 ・x の係数が異なる場合は、不思議な形で、正弦曲線にならないが周期的に変化はする。	・生徒自身の言葉で分かったことを書かせる。また、発表の際には、どこからそれが分かったかを確認する。
	○ sin(cx)＋cos(dx) の c、d が特別な場合の吟味	
	x の係数が異なる場合は、本当にできないかな。いろいろと確認をしてみよう。	
	・c=0 または d＝0 のとき、c＝1 または d＝−1 のとき、c＝−1 または d＝1 のときについて確認する。	
・本時のまとめ	○ まとめ y＝sin$x$＋cos$x$、y＝sin$x$＋$\sqrt{3}$cos$x$ のように、 関数 y＝$a$sin(cx)＋$b$cos(dx) は、周期が等しい正弦、余弦の和であれば、「１つの正弦、または、余弦」で表現することができる。このことを、三角関数の合成と呼ぶ。	

3　指導の結果と成果

(1) 生徒へのアンケート調査結果

単元終了後に生徒にアンケートを実施し、実践の状況を確認した。

○コンピュータを利用した授業はどうでしたか。

回　　答	割　合	主　な　理　由
良かった	62.2%	・どのように変化するか改めてよく分かった。 ・再確認ができた。 ・イメージができた。
まあまあ良かった	31.1%	
あまり良くなかった	6.7%	・見ている時間が長いと眠くなる。
良くなかった	0.0%	

○コンピュータを利用したことによって、その後の理解度は高まりましたか。

回　　答	割　合	主　な　理　由
高まった	35.6%	・結果をイメージしながら学べたのがよかった。 ・公式が問題を解くだけのものではないことが分かった。 ・視覚的な確認ができた。
まあまあ高まった	38.9%	
あまり高まらなかった	23.3%	・板書の説明で理解できたので、なくてもよい。 ・結局、問題を解くときには公式だけを使う。
高まらなかった	2.2%	

○今後、どのような授業を望みますか。（複数回答可）

回　　答	回答数
これまでのような板書中心の授業	72
パソコンなどを使い視覚的な確認ができる授業	67
作業などを通した体験的な活動を取り入れた授業	32

授業を実施した第２学年 90 名の生徒の回答

アンケート結果を見ると、コンピュータを利用した授業を肯定的に捉えていた生徒が多かった。従来、板書中心の授業であったため、生徒には新鮮に感じる部分も多くあったと思われる。しかし、

「視覚的に確認できたので、三角関数のイメージがなんとなく頭の中に残った。」

「公式がたくさん出てきたが、公式にはそれぞれ意味があることが分かった。」

「２つのグラフを比較したり、足し合わされたりする様子がイメージできた。」

といった感想を見ると、三角関数の単元でコンピュータを利用し、イメージをもたせながら授業を進めたことは効果的であった。授業の中では、前時で見たコンピュータの映像を言葉で表現させたり、学習のつながりのある場面ではその映像を思い出させ、共通点、相違点を考えさせたりしながら授業を進めたので、単元の中でつながりのある知識になったと思われる。

また、「今後どのような授業を望みますか」という問いに対して、生徒は、「これまでのような板書中心の授業」を望んでいる一方で、「パソコンなどを使い視覚的な確認ができる授業」も同様に望んでいることが分かる。さらに、「作業などを通した体験的な活動を取り入れた授業」と回答した生徒が少ないことは、それがどのような授業なのか分からないことに原因があると思われる。今回の取組の中でも、例えば「$y=\sin x+\cos x$ のグラフを完成させる」場面のように、何度か作業的な学習を取り入れたが、生徒はそれを実感することができなかったのかもしれない。

（２） 実践を通して

今回の取組を通して、今後さらに推進しなければならないことが２つある。

１つは、コンピュータなどの情報機器を積極的に活用することである。生徒の理解を助けるために、概念を視覚的に理解できるようにすることは重要なことである。特に、動きが伴う場合は有効である。今回取り組んだ三角関数の単元は、その有効な場面の１つであった。グラフ、公式の意味を確認していく際には、コンピュータは大いにその役割を果たした。コンピュータを活用した授業では、単に映像・画面を見せるだけでなく、コンピュータによって得たイメージを活用させる場面を設定することが大切である。そのことで、学習内容の理解を深めることができ、さらに学習意欲を向上させることができる。したがって、コンピュータを活用した授業を実践するためには、各授業のつながりを見直すこと、生徒に見せる映像・画面を検討することなど、単元全体の指導計画を十分練り直す必要がある。コンピュータを活用する際には、インターネット上に使い勝手のよいフリーソフトウェアが数多く存在するので、それらを利用することが得策である。また、今回の取組では、模造紙をスクリーン代わりにすることで、映し出されたグラフの中に生徒が考えたことを直接書き込むことができた。このことによって、従来の黒板の授業以上の効果を得ることできた。生徒にとって有効な様々な情報機器の活用方法を今後とも研究していくことが必要である。

もう１つは、授業の中に生徒の主体的活動を取り入れることである。従来、「授業時間が足りない」という理由で、一般に教師中心の授業が行われてきた傾向がある。一方で、生徒の家庭学習が不足し、基礎学力がなかなか定着しないという問題もある。この現状を断ち切るためには、やはり、授業の改善が大切である。そして、その改善の１つの視点は、「生徒の主体的活動」である。授業の中で、教師が一方的に知識を与えるのではなく、事象を観察させ、比較させ、そこで気付いたことを生徒自身の言葉で語らせることで、生徒の思考は活発になる。問題の解法だけに頭を悩ませるのでは、数学のおもしろさを感じ取らせることに限界がある。今回の取組では、グラフを見て気付いたこと、いくつかのグラフを比較して気付いたことなどを生徒の言葉で語らせた。授業の中では、生徒の表現力の未熟さが感じられる場面が何度かあったが、繰り返し発表させることで、徐々に表現力が向上してきた。そして、表現したことが、問題演習の場面で、問題の状況を把握するときや解法の試行錯誤のときに大いに役立っていた。従来、「どの公式を使うのか」ということにとらわれていた生徒たちから、「さっきの問題とはここが違う」とか「このことと同じことだ」といった気付きの声が多く聞こえてくるようになった。これらの声は、学習内容の理解とともに、数学の学習に対する興味・関心の高まりを示していると考えられる。問題に取り組む生徒の前向きな姿は、数学の授業の改善の成果を表すものである。今後も授業の中に生徒の主体的活動を取り入れ、生徒の学力の向上を図っていく必要がある。

事例３　「積分」の導入段階での指導の工夫

１　事例の概要

教育課程実施状況調査や国際的な学力調査によると、基礎的な計算技能の定着については低下傾向は見られなかったが、計算の意味を理解することなどに課題が見られた。このことは以前から指摘されていたことであり、本研究においても、これまで数学Ｉのいくつかの分野について、計算の意味が理解できるような授業実践に取り組んできた。本年度の取組では、計算方法の習得に終始し、その意味が理解しにくいと言われていた数学Ⅱ「積分」において、導入の工夫に取り組んだ。

積分の導入については、学習指導要領解説には、次のように述べられている。

「微分の逆の演算として不定積分を導く。」

「定積分については、具体的なイメージを与えるため、面積を求める例などと関連付けて導入することも考えられる。」

「区分求積法の考えに基づいて定積分の定義を直感的に扱うことも考えられる。」

これを受け、多くの教科書では、原始関数を定義し、原始関数を求めること、すなわち、微分の逆の演算として不定積分を導き、定積分を定義し、面積の計算へと指導を展開していく。しかし、このような教科書通りの学習の進め方では、教師が定義を説明し、生徒は黙々と計算に苦しみ、積分を単純な計算と捉え、微分・積分のおもしろさが分かる前に、苦手意識をもってしまうことがある。そこで、導入の段階で「積分の探求」という小単元を設定することで、積分の計算の意味が実感を伴って理解できるように工夫した。授業では、生徒の主体的活動である数学的活動を通して、「微分積分学の基本定理」に生徒自身が気付き、そして、積分の概念を創り上げることをめざした。授業では、ワークシートを活用して生徒一人一人の活動を促すとともに、コンピュータを利用してイメージを膨らませる。その過程で、生徒自身が規則性を発見し、微分、積分の理解が深まることを期待した。

２　指導の展開

(1)　単元の計画

「数学Ⅱは、大きく４つの内容に分かれ、それを４単位で実施するには時間があまりない」という声をよく耳にする。そのような状況の中で、数学的活動を取り入れた授業を実践するためには、従来の時間数と同程度の時間数で実施できること。さらに、授業を実践することで、生徒の理解を深められるようにしなければならない。これらのことを前提に次のような計画を立てた。

<table>
<tr><th rowspan="3">小単元名</th><th rowspan="3">指導内容</th><th>従来の指導</th><th colspan="2">生徒の数学的活動を取り入れた指導</th></tr>
<tr><th rowspan="2">時間数</th><th colspan="2">時間数</th></tr>
<tr><th>理系</th><th>文系</th></tr>
<tr><td>積分の探求</td><td>積分の導入</td><td>－</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>不定積分と定積分</td><td>不定積分の計算
定積分
定積分の性質
微分と積分の関係</td><td>7</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>面　　積</td><td>面積と定積分
２曲線間の面積
演習</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">合　　計</td><td>１３</td><td>１３</td><td>１３</td></tr>
</table>

「積分」の導入として、小単元「積分の探求」を位置付け、理系、文系のそれぞれのクラスで同じ内容ではあるが、扱いを変えて実施した。「積分の探求」の指導計画は以下の通りである。また、授業ではワークシートを用いて進めた。

「積分の探求」の計画（時間数）

授業内容 ／ クラス時間数	積分の探求１	積分の探求２	積分の探求３	積分の探求４	積分の探求５
	区分求積法による面積の探求	コンピュータによる面積の解析	区分求積法による面積の計算	ニュートンの発見（微分積分学の基本定理の探求）	ラクラク積分と記号作りの名人の登場
理系クラス	1.5	0.5	1.5	0.5	1.0
文系クラス	1.0	0.5	1.0	0.5	1.0

「積分の探求」では、区分求積法を用いて面積を考察させ、そこから微分積分学の基本定理に気付かせ、積分の記号を定義した。原始関数、不定積分には触れずに定積分を定義し、その後教科書に戻り、「積分の探求」で見出したことを確認しながら授業を進めた。「不定積分の計算」と「定積分」では、新たに説明することも少なく、演習中心に進めることができたので、「不定積分と定積分」では３時間、「面積」では２時間（文系は１時間）時間を短縮することができた。

(2) 指導の実際　～積分の探求～

①積分の探求１「区分求積法による面積の探求」

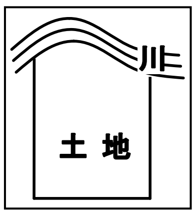
授業のねらい

曲線を含む図形の面積を求める方法を考察することによって、区分求積法の考え方に気付かせる。

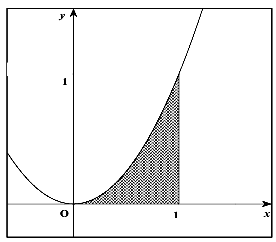
授業を進める際の留意事項

面積については、小学校第４学年で初めて学習する。その際、単位の大きさとなる正方形（１cm²、１m²などの正方形）の個数として面積を学習する。その後、三角形、円の面積、立体の表面積等を学習すると、生徒は面積の定義を忘れ、公式だけに頼るようになってしまう。そこで、面積の定義を振り返らせ、それをもとに曲線で囲まれた図形の面積の求め方について考えさせていく。具体的な土地の面積、放物線と直線で囲まれた図形の面積を考えさせることによって、区分求積法の考え方に導いていく。また、様々な考え方が出されたら、ユークリッドの「原論」にある「取り尽くし法」、アルキメデスの求積法についての話など数学的な歴史についても触れ、興味・関心を喚起させる。

積分の探求１「区分求積法による面積の探求」
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）
○右図の「土地」の面積を求めるためにはどうしたらよいだろう？
自分の考えを記入してみよう。



○２次関数 $y=x^2$ と x 軸、直線 $x=1$ とで囲まれた図形の面積を求めてみよう。



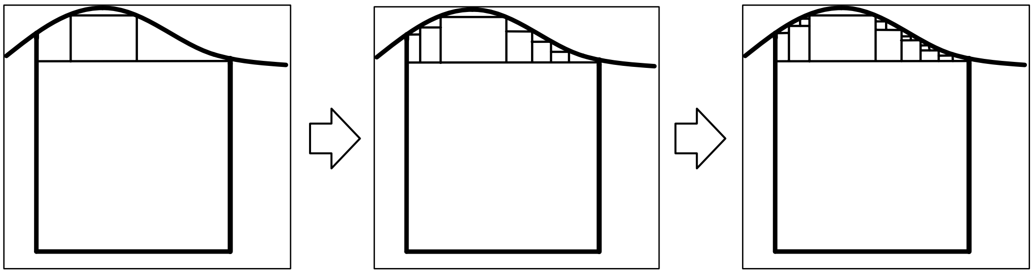
放物線と直線で囲まれた面積については、土地の面積の求め方を参考に考察させる。四角形を作ることはすぐに思いつくと予想されるが、正方形、長方形、平行四辺形、台形など様々な四角形の中で、どの四角形で考えることが有効かを考えさせたい。

実際の授業の場面

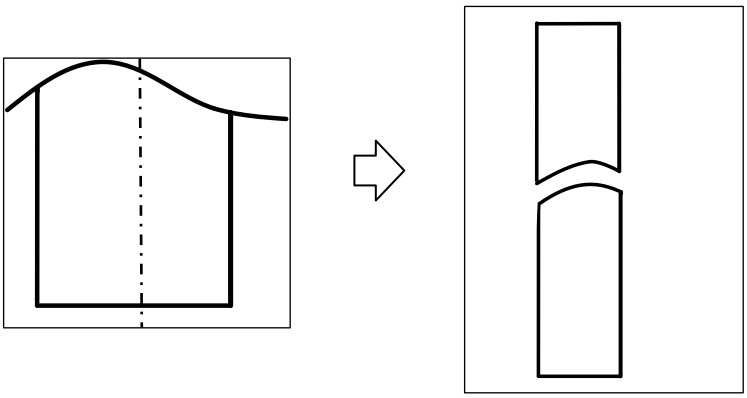
○土地の面積を求める場面

生徒からは、次の２つの考えが出された。

・細かい長方形ですき間を埋めていき、それらの面積を加えて求める。

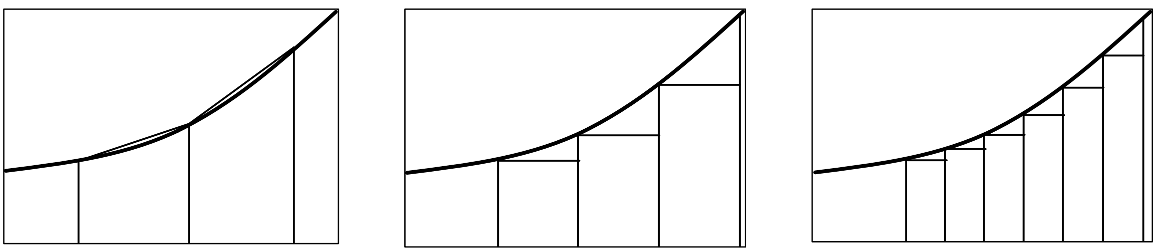


・縦に２つに切って、曲線部分を貼り合わせて、長方形を作り面積を求める。



○２次関数と直線とで囲まれた図形の面積を考察する場面

土地の面積の求め方を参考にして、２次関数と直線とで囲まれた図形の面積を考察させた。最初は、生徒から「台形を使って面積を求めるとよいのではないか。」との意見が出た。そこで、「すき間が少ないので、面積に限りなく近い値が求められそうだね。」と認めたあと、「しかし、計算が大変そうだね。他に何かいいアイディアはないかな」と問いかけた。長方形で考えた生徒は、「これではすき間が大きすぎてしまうのでうまくいかない」と考えていた。そこで、長方形で考えた場合、どうすればすき間が小さくなるかを考えさせた。ある生徒から、「細い長方形をたくさん作れば、すき間は小さくなる」との意見が出たので、その考えに基づいて考察を進めることにした。



・生徒発案の台形で埋め尽くす方法。

・長方形で埋め尽くしたがすき間が大きすぎる。

・細い長方形にすると、すき間が小さくなった。

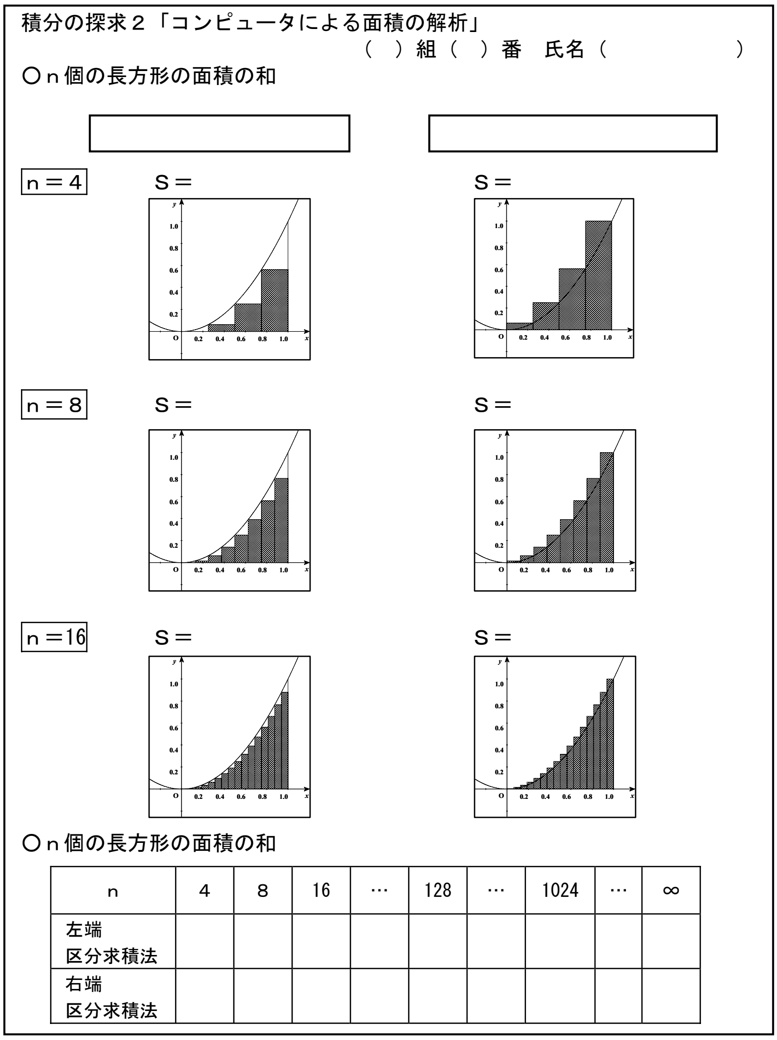
このあと、さらに細い長方形で考えるためにコンピュータを用いて考えていくことにした。また、長方形の作り方にも２種類あることに触れ、それぞれの作り方について考えていくことを伝えた。

理系のクラスでは、時間をかけて生徒たちの意見を引き出した。文系のクラスでは、教師からヒントを出しながら進めた。いずれにしても、考え方にたどり着くまでに時間と手間がかかった。しかし、それは、それだけ先人たちの功績が偉大だったことを実感できた場面でもあった。

②積分の探求２「コンピュータによる面積の解析」

授業のねらい

コンピュータを用いて、左端区分求積法、右端区分求積法による面積を考察させ、両者の値が放物線と直線とで囲まれた図形の面積に限りなく近づくことを実感させる。



積分の探求２「コンピュータによる面積の解析」

（　）組（　）番　氏名（　　　　　）

〇ｎ個の長方形の面積の和

ｎ＝４　S＝　S＝

ｎ＝８　S＝　S＝

ｎ＝16　S＝　S＝

〇ｎ個の長方形の面積の和

n	4	8	16	…	128	…	1024	…	∞
左端 区分求積法									
右端 区分求積法									

授業を進める際の留意事項

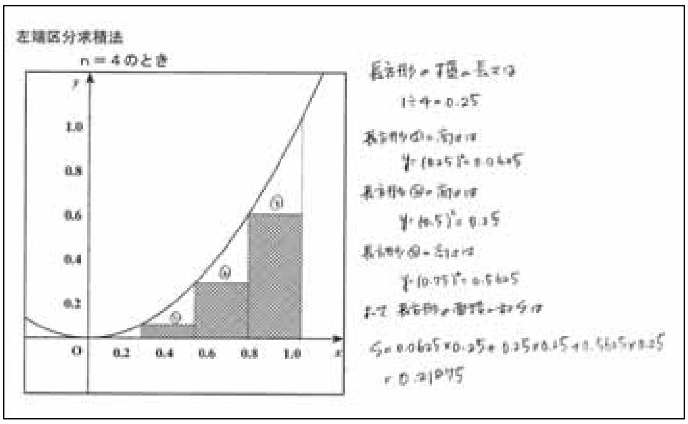
左端区分求積法、右端区分求積法による面積の値が、徐々に近づいていくこと、また、図形的にその値が放物線と直線とで囲まれた図形の面積の値に限りなく近づくことを、コンピュータを用いて実感させる。また、両者の値が、$\frac{1}{3}$に限りなく近づくことに気付かせたい。授業では、ｎ＝４のときの左端区分求積法の値は、生徒に電卓を使って実際に求めさせ、その後、コンピュータを用いてｎの値を１から順に大きくし、ｎ＝４、８、16、128、1024 のときの図形とその値を表示させ、その値を表に記述させる。

また、数学Ⅱでは、無限（∞）についての扱いはないので、ここの場面で簡単に触れておく必要がある。

実際の授業の場面

〇ｎ＝４のとき、左端区分求積法で長方形の面積の和を求める場面

この場面では、電卓を使って面積の和を求めた。長方形の横の長さから、長方形の左下の点の x 座標を求め、それを用いてグラフから長方形の縦の長さを導いていた。多くの生徒が熱心に取り組んでいたが、「大変なだけで、



求めたい部分の面積とはずいぶん違うと思う。」という感想を述べていた。

○コンピュータによる面積の考察の場面

コンピュータを用いて、左端区分求積法、右端区分求積法によって長方形の面積の和を求め、表にまとめた。その後、ｎの値を限りなく大きくすると図形はどうなるか、また、それぞれの値はどんな値になるかを考えさせた。

ｎ	4	8	16	…	128	…	1024	…	∞
左端 区分求積法	0.219	0.273	0.303		0.329		0.332		
右端 区分求積法	0.469	0.398	0.365		0.337		0.334		

ｎの値を限りなく大きくすると、全ての長方形を加えたものは放物線と直線とで囲まれた図形になること、そして、左端区分求積法と右端区分求積法の値はそれぞれ同じ値$\frac{1}{3}$になることを、理系のクラス、文系のクラスの生徒ともに気付いた。極限についての知識が十分でないため表現としては曖昧な表現であるが、生徒は感覚的に気付いたようである。また、スクリーン上でシミュレーションした際には、非常に興味を示し、ｎが 50 を超えたころから、「すごい、ほとんど同じようになった」との声が上がった。

③積分の探求３「区分求積法のよる面積の計算」

授業のねらい

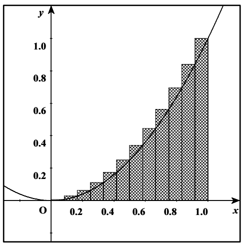
コンピュータを用いて確認した$\frac{1}{3}$を、数学的に処理し確認する。また、区間を［0, x］に拡張し、そのときの極限値に気付かせる。

積分の探求３「区分求積法による面積の計算」

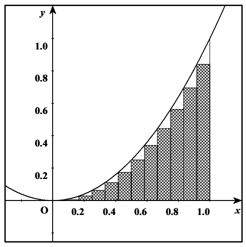
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）

○ｎ個の長方形の面積の和

（右端区分求積法）



（左端区分求積法）



授業を進める際の留意事項

ｎ個の長方形の面積の和を求める際には、数列の和の公式、極限の計算が必要となる。授業の前に、次の２つについて確認した。

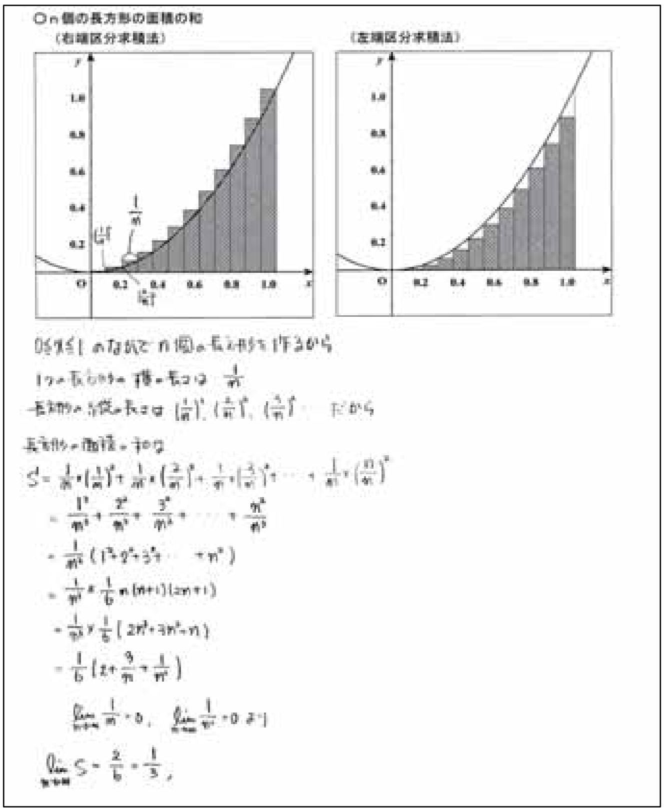
・　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

・　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

授業を進めるにあたっては、適宜助言を与えながら、計算することが主となることがないように配慮して進める。また、理系のクラスでは、右端区分求積法、左端区分求積法による面積の和を個々の生徒に計算させたが、文系のクラスでは、生徒に発言させながら黒板で右端区分求積法による面積の和を計算し、左端区分求積法については結果は同じであることを述べるにとどめた。

また、区間を［0, x］に拡張するときには、コンピュータを活用し、区間［0, 2］、［0, 3］、［0, 4］、［0, 5］、［0, 10］の場合の値を確認し、区間［0, x］の場合を推測させた。

実際の授業の場面



○ｎ個の長方形の面積の和を求める場面

理系のクラスの授業では、長方形の個数、横の長さ、縦の長さを確認したあとに、個々の生徒が面積の和を求めた。その際、確認した数列の和、極限については、板書しておき、随時確認させた。机間指導の際に生徒の状況を確認すると、$\dfrac{1}{n^3}$ でくくる場面、極限の計算をする場面で戸惑う生徒はいたが、おおむねスムーズに取り組んでいた。その後、左端区分求積法による長方形の面積の和を計算させた。

一方、文系のクラスでは、１つ１つ確認しながら、黒板に示していった。文系の生徒でもイメージはつかめたようである。

○コンピュータを用いて区間を［0，x］に拡張する場面

区間［0，2］、［0，3］、［0，4］、［0，5］、［0，10］の場合について、左端区分求積法、右端区分求積法による面積の値をそれぞれコンピュータで表示させ（ｎ＝1024 で表示させた）、その値を推測させた。

区間［0,　2］のとき　　2.666…　すなわち $\dfrac{8}{3}$

区間［0,　3］のとき　　9

区間［0,　4］のとき　　21.333…　すなわち $\dfrac{64}{3}$

区間［0,　5］のとき　　41.666…　すなわち $\dfrac{125}{3}$

区間［0，10］のとき　　333.333…　すなわち $\dfrac{1000}{3}$

そこで、区間［0，x］のときについて確認したところ、多くの生徒が $\dfrac{1}{3}x^3$ に気付いた。

④積分の探求４「ニュートンの発見（微分積分学の基本定理の探求）」

授業のねらい

定数関数、１次関数、２次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積を求め、そこから、微分積分学の基本定理である「微分と積分が互いに逆の操作・演算である」ことに気付かせる。

授業を進める際の留意事項

定数関数、１次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積については、長方形、三角形、台形の面積として求めさせる。また、２次関数については前時に導いた結果を用いる。これらの

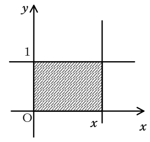
結果を見比べて、どのような関係にあるのかを気付かせる。また、微分積分学の基本定理に気付いた後、「積分」という言葉を紹介するとともに、その発見者と言われているニュートンの話など、数学的な歴史についても触れ、興味・関心を喚起させる。ここでは、「積分」という言葉の紹介にとどめ、「原始関数」、「不定積分」、「定積分」という表現は扱わないこととする。「定積分」については積分の探求５で、また、「原始関数」、「不定積分」については「積分の探求」終了後に、教科書に戻ったときに確認する。

積分の探求４「ニュートンの発見」

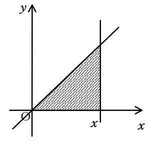
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　　）

○次の斜線の部分の面積を求めてみよう。

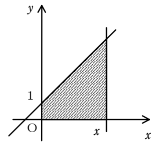
(1) $y=1$　（定数関数）について



(2) $y=x$　（１次関数）について



(3) $y=x+1$　（１次関数）について



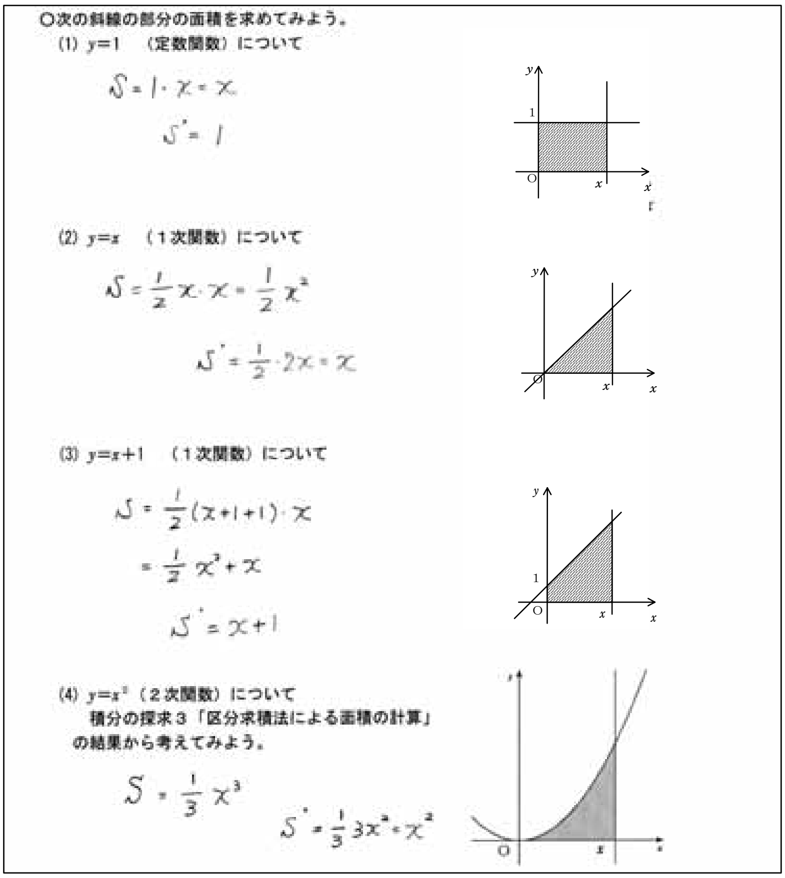
(4) $y=x^2$（２次関数）について
積分の探求３「区分求積法による面積の計算」の結果から考えてみよう。

＜微分積分学の基本定理＞

実際の授業の場面

○微分積分学の基本定理に気付く場面

(1)から(4)までの式を導けた時点で、教師から「(1)から(4)の結果から何か気付くことはないだろうか？」とだけ問いかけたところ、理系のクラス、文系のクラスとも、何人かの生徒から、「面積の式を微分すると、もとの式に戻る」との意見が出された。気付かなかった生徒もいたが、その意見を聞いて、「本当だ」、「何で微分が出てくるの」との声が上がった。その後、「積分」という言葉を紹介し、積分が図形の面積を表していること、微分と積分が逆の演算であること（微分積分学の基本定理）、それがニュートンによる発見だったこと、さらに、そのニュートンは万有引力の法則を発見した人物であることなどについて話をした。生徒は、興味深く聞いていた。


○次の斜線の部分の面積を求めてみよう。

(1) $y=1$　（定数関数）について

$S = 1 \cdot x = x$

$S' = 1$

(2) $y=x$　（１次関数）について

$S = \frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}x^2$

$S' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$

(3) $y=x+1$　（１次関数）について

$S = \frac{1}{2}(x+1+1) \cdot x$

$= \frac{1}{2}x^2 + x$

$S' = x+1$

(4) $y=x^2$（２次関数）について
積分の探求３「区分求積法による面積の計算」の結果から考えてみよう。

$S = \frac{1}{3}x^3$

$S' = \frac{1}{3}3x^2 = x^2$

⑤積分の探求５「ラクラク積分と記号作りの名人の登場」

授業のねらい

区間［0, x］における面積を微分の逆の演算であることから求め、そこから、面積を求めることができるようにさせる。さらに、それを記号を用いて表すことを知るとともに、その記号の意味を理解させる。

授業を進める際の留意事項

前時までの学習内容をもとに、微分の逆の演算であることを用いて、面積を求める。また、$y=x^2$、$x=1$、$x=2$、x 軸で囲まれた部分の面積は、減法で表すことができることを生徒に気付かせ、そこから、ライプニッツの表現につなげる。その際、記号化された式の意味について確認する。「∫(インテグラル)」については、和を表す「summation」の頭文字であること、また、「dx」については、ただの記号ではなく、図形的な意味があることを伝える。これらのことによって、積分の計算のイメージを持たせる。

実際の授業の場面

○面積を求める問題に取り組んだ場面

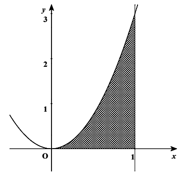
面積を求めることについての理解の状況は概ね良好であった。また、問題（3）についても、多くの生徒が減法であることに気付き、面積を求めることができた。また、問題（1）の曲線を含む面積が整数になったことに驚いていた生徒もいた。

積分の探求５「ラクラク積分と記号作りの名人の登場」①

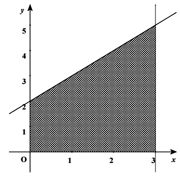
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　　）

○様々な面積を求めてみよう。(図の斜線部分)

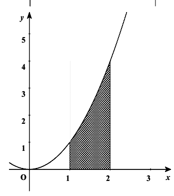
(1) $y=3x^2$



(2) $y=x+2$



(3) $y=x^2$



積分の探求５「ラクラク積分と記号作りの名人の登場」②

（　）組（　）番　氏名（　　　　　　　）

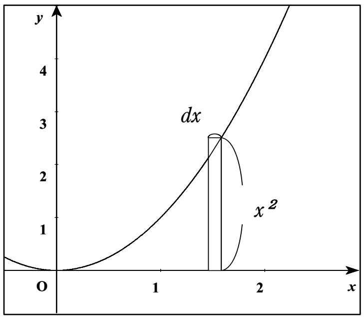
○「記号作りの名人」ライプニッツの登場

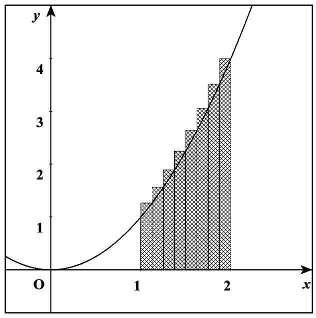
ライプニッツは(3)の計算を次のように書きました。

もともと積分とは、区分求積法に見られるように、いくつもの長方形に分け、１つ１つの面積を計算し、最後にそれらを合計する（細かく分けて、かけて、たす）ことでした。ライプニッツは、図のように細かく分けた長方形のうち、ある１つの長方形を

x^2dx

と表し、長方形を端から端までたすことを「インテグラル」と表しました。





(3) $y=x^2$

微分して x^2 になるのは $\frac{1}{3}x^3$

$S(x)=\frac{1}{3}x^3$

$x=2$ を代入して

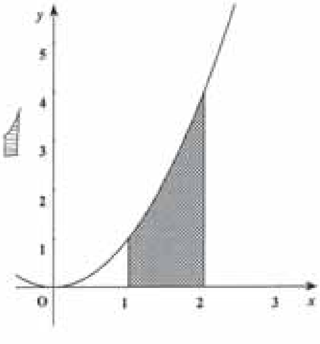
$S(2)=\frac{1}{3}\times 2^3=\frac{8}{3}$

$x=1$ を代入して

$S(1)=\frac{1}{3}\times 1^3=\frac{1}{3}$

したがって 求める面積は

$S(2)-S(1)=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$



○積分の記号化の場面

積分の記号の定義については、全員が納得していた。そして、記号１つ１つの意味についても、感動した生徒が多かった。ライプニッツについては、ニュートンと同時期に微分・積分について発見、発明をしていたこと、さらに、記号化していたことを話した。また、彼が、数学者、科学者、哲学者など幅広い分野で活躍した学者であるとともに、政治家、外交官でもあったことなどを話したところ、多くの生徒が興味を示していた。

3　指導の結果と成果

今回の取組後に、生徒にアンケートを実施し生徒の変容を確認した。

(1) 生徒へのアンケート調査結果

授業後に生徒にアンケートを実施し、成果の検証を行った。アンケートは、「授業を受けて思ったこと・感じたこと」を自由記述で書かせた。

以下に理系、文系のクラスの主なものを挙げた。

理系のクラスの生徒のコメント

初め、いろいろな長方形を作り、求めていくことに感動したけど 授業を進めていくにつれて、もっと簡単な求め方が分かり感動した。 コンピュータを使うと、人がいくらの年月をかけてもできないことが、すぐにできた これで、未知の世界が見れた様な気がする。 ニュートンの発見で、難解だった積分学が進展したというのを聴いて ニュートンのすごさがわかった。 ライプニッツも、頭が良いのだなあと思った
実際の歴史と同じ順番で学んでいくことで 積分が何のためにあるのかがよく分かった これからの授業は自分の微分積分の疑問を 解くときに、問題がどのようなものかイメージ するのを助けてくれると思いました。 他の分野でも数学が「何のためか」どの ように使っているのかを教えてくれると助かると思います。

文系のクラスの生徒のコメント

いつもの授業とはちがい！コンピュータや、プリントなどをつかったのが、たのしかったです 高校の授業は、本質をすぐ言ってしまうことが多いけれど今回は、 自分で考えることができたのがよかったです そして自分で悩み考えることで昔の人の偉大さがわかりました。 進め方も、じっくり考える時間があったのでまちがっていたとしても 自分の考えをもってから答えを聞くことができたのでとてもよかったと 思います。
数学は、どちらかというと苦手な方だけど、ただ数式を暗記するよりも 抵抗なく、授業が「楽しい」と感じた。 コンピュータによる区分求積法はとてもわかりやすかった。
見たことのない記号や公式がでてきて、最初は とても混乱しました。けれどソニズ゛を使った説明 を聞いていくうちに、なんとなく式の意味が分かって きました。昔の人は本当に頭が良かったのだなあ と思いました。曲線で囲まれた面積も出せることが できるのはとてもすごいと思ったし日常のいろいろな事に も役立つと思った。

アンケートでは、理系のクラスでは、「ニュートン、ライプニッツの偉大さなど先人の業績に感動した」、「数学が、何のために、どのようにしてできたかを学べて、数学を学ぶ意味が分かった」、「積分の計算のイメージを持つことができた」とするコメントが多かった。また、文系のクラスでは、「数学の授業の楽しさを知った」、「自ら考えるということと分かるということが分かった」というコメント等が多かった。多くの生徒が好意的に受け止めるとともに、改めて数学のおもしろさを感じ取ってくれたことが読み取れた。

また、「積分の探求」後は、学習したことを生かしながら、教科書に沿って授業を進めたが、単に計算をするだけではなく、１つ１つの計算の意味をイメージしながら取り組むことができた。

(2) 実践を通して

当たり前のことではあるが、生徒は「分かりたい」という思いを強く持っている。それは、問題が解けるようになることだけでなく、計算過程の意味が分かること、計算結果の意味が分かることも強く望んでいるということである。生徒の「分かりたい」という気持ちに応えるためには、新しい概念、定理、公式を生徒自身に見出させ、そして、それを実感させることが大切となる。今回の取組において、生徒は考え、発見する場面も多々あった。しかし、疑問を抱き、難しさに閉口したこともあった。すなわち、それが生徒自身の数学的活動であり、その数学的活動があったからこそ、最後には、大きな感動とともに「積分」とは何かを実感してくれたことと思われる。積分は計算方法に習熟すれば、パーパーテストで点数を取ることは可能である。しかし、それでは、そのとき限りの知識となり、生徒の心に根付かない。生徒の心に根付く知識となるような取組が、生徒の「分かりたい」という気持ちに応え、そして、その気持ちを育てることにつながると考える。

また、生徒の「分かりたい」という気持ちに応えるためには、十分な教材研究が必要である。教師が教材の背景を理解するとともに、どの場面でどのように考えさせるのか、そして、生徒自身が考えることに主体的に取り組んでいるということをどう実感させるかが大切となる。ときには、コンピュータを駆使してイメージを膨らませることもある。また、生徒が自分で考えたことと先人が考えたことをオーバーラップさせ、先人の偉業を確認させることもある。その中で、生徒に感動を与え、数学の楽しさを実感させていくことが大切となる。

おわりに

生徒の数学の学習状況について次のような言葉を耳にすることがある。

「家庭学習の時間が短く、学習習慣が身に付いていない」

「計算力が低下していて、基礎基本が定着していない」

これらの課題を解決することは、教師としては永遠の課題であるが、その課題解決の第一歩は、「授業の改善」に他ならない。今回の取組から、授業改善の視点を次のように挙げることができる。

1　生徒の主体的活動を取り入れた授業展開の工夫

生徒の数学の学習状況を改善するためには、数学に対する関心や意欲を高めること、学習内容を深く理解することが不可欠である。そのためには、数学科の授業において、生徒が主体的に数学の学習に取り組むことできるような指導を工夫することが大切である。本研究では、「数学的活動の充実」、「数学的コミュニケーションの活用」、「コンピュータの活用」に視点を当てて授業の実践に取り組んだ。これらは全て、授業の中で生徒の主体的活動を取り入れるための工夫である。

事例１では、数学的コミュニケーションを生かした授業展開を試みた。授業の中で、自らの考えを記述させたり、数学について友達と議論したりすることによって、数学的な表現力を向上させることは、今後の高等学校数学科の授業改善の１つの方向性を示唆するものである。数学的コミュニケーションを生かした授業は、特別な手法を要する授業ではない。生徒の発言を重視するとともに、発言を引き出すために教師の発問を工夫することが重要である。これらの指導のより、数学科の授業が活気溢れる授業となることが望まれる。

事例２では、コンピュータの動的操作性やシミュレーション性を活用することによって、生徒自身が数学的な関係や性質を探求する場面を授業の中に設定し、生徒の思考を促した。グラフの合成の様子を見ることで、三角関数の合成の特徴を探求し、数式化することができた。コンピュータを活用する場面で大切なことは、「何を見せるか」ではなく、「何を考えさせるか」である。今後も様々な場面におけるコンピュータの活用が望まれる。

事例３では、ワークシート、コンピュータを利用しながら数学的活動を充実させ、生徒自身が数学を創りあげる授業展開を目指した。教師による定理や性質の説明から授業が始まるのではなく、具体的な例を基に、成り立つ関係や性質を生徒自身が推測、考察した。授業では、生徒自身が微分積分学の基本定理に気付き、記号化していくことで、積分を学ぶ意義を実感することができた。生徒のアンケートに、「感動」という言葉がいくつも書かれていたことが成果を表している。

本研究では、３つの視点に基づいて授業に取り組んだ。各学校でも、生徒の学習状況に応じた指導を適切に用いて、生徒が数学に活発に取り組むことができるように、授業展開を工夫していくことが今後さらに求められる。

2　授業研究のすすめ

授業の質を高めるために、教材研究をすることはもちろん大切であるが、授業を公開し、客観的に分析し、評価することも効果がある。今回の取組でも、授業の様子をビデオに撮って、11 月に行った第３回委員会において、研究協力委員と担当指導主事で、教師の発問、生徒の反応、発言、生徒の学びが成立しているかどうかを視点として成果の検証を行った。そこでは、活発な意見交換が行われ、授業改善の方策が話し合われた。最後に、研究協力委員から有意義な授業研究会であったという感想をいただいた。

現在、多くの学校で、公開授業、研究授業が実施されるようになってきている。授業研究の際には、感想を述べ合うだけでなく、生徒の学びを視点として授業を分析し、それを授業の改善に生かしていくことが大切である。

＜参考文献＞

・『高等学校学習指導要領解説　数学編理数編』
・『平成 14、17 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書』（国立教育政策研究所）
・『数学的コミュニケーション能力の育成』（明治図書　金本良通著）
・『数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究』（風間書房　江森英世著）

高等学校における教科指導の充実
数　学　科
生徒の主体的活動を取り入れた授業展開の工夫

発　行　　平成20年3月
栃木県総合教育センター　研究調査部
〒320-0002　栃木県宇都宮市瓦谷町1070
TEL 028-665-7204　　FAX 028-665-7303
URL http://www.tochigi-edu.ed.jp/center/