事例３　「積分」の導入段階での指導の工夫

1　事例の概要

教育課程実施状況調査や国際的な学力調査によると、基礎的な計算技能の定着については低下傾向は見られなかったが、計算の意味を理解することなどに課題が見られた。このことは以前から指摘されていたことであり、本研究においても、これまで数学Ⅰのいくつかの分野について、計算の意味が理解できるような授業実践に取り組んできた。本年度の取組では、計算方法の習得に終始し、その意味が理解しにくいと言われていた数学Ⅱ「積分」において、導入の工夫に取り組んだ。

積分の導入については、学習指導要領解説には、次のように述べられている。

「微分の逆の演算として不定積分を導く。」

「定積分については、具体的なイメージを与えるため、面積を求める例などと関連付けて導入することも考えられる。」

「区分求積法の考えに基づいて定積分の定義を直感的に扱うことも考えられる。」

これを受け、多くの教科書では、原始関数を定義し、原始関数を求めること、すなわち、微分の逆の演算として不定積分を導き、定積分を定義し、面積の計算へと指導を展開していく。しかし、このような教科書通りの学習の進め方では、教師が定義を説明し、生徒は黙々と計算に苦しみ、積分を単純な計算と捉え、微分・積分のおもしろさが分かる前に、苦手意識をもってしまうことがある。そこで、導入の段階で「積分の探求」という小単元を設定することで、積分の計算の意味が実感を伴って理解できるように工夫した。授業では、生徒の主体的活動である数学的活動を通して、「微分積分学の基本定理」に生徒自身が気付き、そして、積分の概念を創り上げることをめざした。授業では、ワークシートを活用して生徒一人一人の活動を促すとともに、コンピュータを利用してイメージを膨らませる。その過程で、生徒自身が規則性を発見し、微分、積分の理解が深まることを期待した。

2　指導の展開

(1)　単元の計画

「数学Ⅱは、大きく４つの内容に分かれ、それを４単位で実施するには時間があまりない」という声をよく耳にする。そのような状況の中で、数学的活動を取り入れた授業を実践するためには、従来の時間数と同程度の時間数で実施できること。さらに、授業を実践することで、生徒の理解を深められるようにしなければならない。これらのことを前提に次のような計画を立てた。

小単元名	指導内容	従来の指導	生徒の数学的活動を取り入れた指導	
		時間数	時間数	
			理系	文系
積分の探求	**積分の導入**	**－**	**5**	**4**
不定積分と定積分	不定積分の計算 定積分 定積分の性質 微分と積分の関係	7	4	4
面　　積	面積と定積分 ２曲線間の面積 演習	6	4	5
合　　計		１３	１３	１３

「積分」の導入として、小単元「積分の探求」を位置付け、理系、文系のそれぞれのクラスで同じ内容ではあるが、扱いを変えて実施した。「積分の探求」の指導計画は以下の通りである。また、授業ではワークシートを用いて進めた。

「積分の探求」の計画（時間数）

授業内容 ＼ クラス 時間数	積分の探求１	積分の探求２	積分の探求３	積分の探求４	積分の探求５
	区分求積法による面積の探求	コンピュータによる面積の解析	区分求積法による面積の計算	ニュートンの発見(微分積分学の基本定理の探求)	ラクラク積分と記号作りの名人の登場
理系クラス	1.5	0.5	1.5	0.5	1.0
文系クラス	1.0	0.5	1.0	0.5	1.0

「積分の探求」では、区分求積法を用いて面積を考察させ、そこから微分積分学の基本定理に気付かせ、積分の記号を定義した。原始関数、不定積分には触れずに定積分を定義し、その後教科書に戻り、「積分の探求」で見出したことを確認しながら授業を進めた。「不定積分の計算」と「定積分」では、新たに説明することも少なく、演習中心に進めることができたので、「不定積分と定積分」では３時間、「面積」では２時間（文系は１時間）時間を短縮することができた。

(2) 指導の実際　～積分の探求～

①積分の探求１「区分求積法による面積の探求」

授業のねらい

曲線を含む図形の面積を求める方法を考察することによって、区分求積法の考え方に気付かせる。

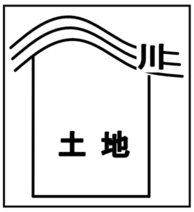
授業を進める際の留意事項

面積については、小学校第４学年で初めて学習する。その際、単位の大きさとなる正方形（１cm^2、１m^{2}などの正方形）の個数として面積を学習する。その後、三角形、円の面積、立体の表面積等を学習すると、生徒は面積の定義を忘れ、公式だけに頼るようになってしまう。そこで、面積の定義を振り返らせ、それをもとに曲線で囲まれた図形の面積の求め方について考えさせていく。具体的な土地の面積、放物線と直線で囲まれた図形の面積を考えさせることによって、区分求積法の考え方に導いていく。また、様々な考え方が出されたら、ユークリッドの「原論」にある「取り尽くし法」、アルキメデスの求積法についての話など数学的な歴史についても触れ、興味・関心を喚起させる。

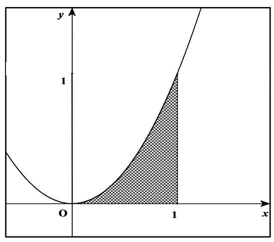
積分の探求１「区分求積法による面積の探求」

（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）

○右図の「土地」の面積を求めるためにはどうしたらよいだろう？
自分の考えを記入してみよう。



○２次関数 $y=x^2$ と x 軸、直線 $x=1$ とで囲まれた図形の面積を求めてみよう。



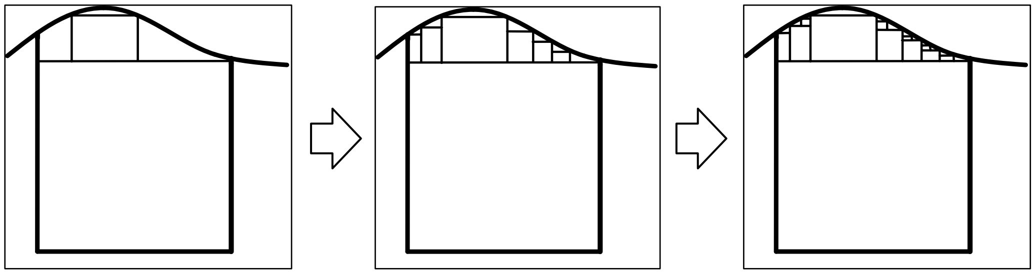
放物線と直線で囲まれた面積については、土地の面積の求め方を参考に考察させる。四角形を作ることはすぐに思いつくと予想されるが、正方形、長方形、平行四辺形、台形など様々な四角形の中で、どの四角形で考えることが有効かを考えさせたい。

実際の授業の場面

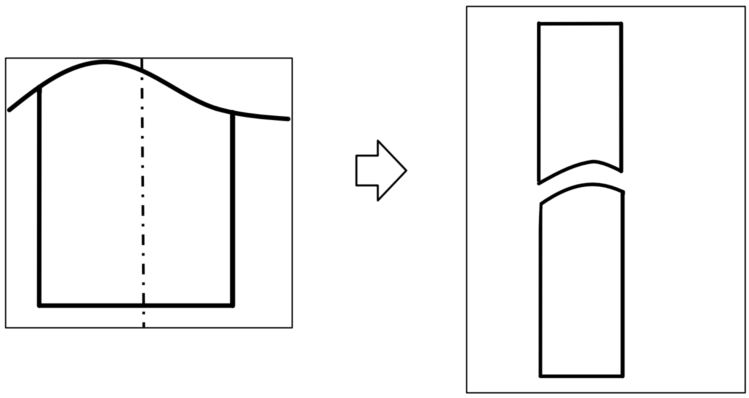
○土地の面積を求める場面

生徒からは、次の２つの考えが出された。

・細かい長方形ですき間を埋めていき、それらの面積を加えて求める。

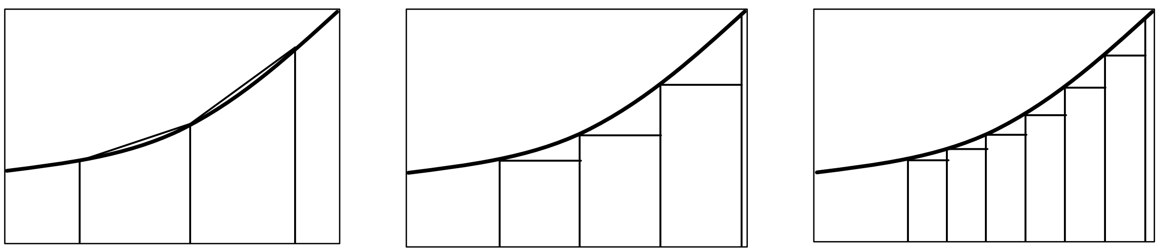


・縦に２つに切って、曲線部分を貼り合わせて、長方形を作り面積を求める。



○２次関数と直線とで囲まれた図形の面積を考察する場面

土地の面積の求め方を参考にして、２次関数と直線とで囲まれた図形の面積を考察させた。最初は、生徒から「台形を使って面積を求めるとよいのではないか。」との意見が出た。そこで、「すき間が少ないので、面積に限りなく近い値が求められそうだね。」と認めたあと、「しかし、計算が大変そうだね。他に何かいいアイディアはないかな」と問いかけた。長方形で考えた生徒は、「これではすき間が大きすぎてしまうのでうまくいかない」と考えていた。そこで、長方形で考えた場合、どうすればすき間が小さくなるかを考えさせた。ある生徒から、「細い長方形をたくさん作れば、すき間は小さくなる」との意見が出たので、その考えに基づいて考察を進めることにした。



・生徒発案の台形で埋め尽くす方法。

・長方形で埋め尽くしたがすき間が大きすぎる。

・細い長方形にすると、すき間が小さくなった。

このあと、さらに細い長方形で考えるためにコンピュータを用いて考えていくことにした。また、長方形の作り方にも２種類あることに触れ、それぞれの作り方について考えていくことを伝えた。

理系のクラスでは、時間をかけて生徒たちの意見を引き出した。文系のクラスでは、教師からヒントを出しながら進めた。いずれにしても、考え方にたどり着くまでに時間と手間がかかった。しかし、それは、それだけ先人たちの功績が偉大だったことを実感できた場面でもあった。

②積分の探求２「コンピュータによる面積の解析」

授業のねらい

コンピュータを用いて、左端区分求積法、右端区分求積法による面積を考察させ、両者の値が放物線と直線とで囲まれた図形の面積に限りなく近づくことを実感させる。

授業を進める際の留意事項

左端区分求積法、右端区分求積法による面積の値が、徐々に近づいていくこと、また、図形的にその値が放物線と直線とで囲まれた図形の面積の値に限りなく近づくことを、コンピュータを用いて実感させる。また、両者の値が、$\frac{1}{3}$に限りなく近づくことに気付かせたい。授業では、ｎ＝４のときの左端区分求積法の値は、生徒に電卓を使って実際に求めさせ、その後、コンピュータを用いてｎの値を１から順に大きくし、ｎ＝４、８、16、128、1024 のときの図形とその値を表示させ、その値を表に記述させる。

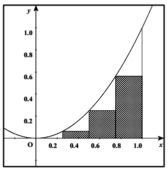
また、数学Ⅱでは、無限（∞）についての扱いはないので、ここの場面で簡単に触れておく必要がある。

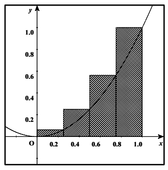
積分の探求２「コンピュータによる面積の解析」

（　）組（　）番　氏名（　　　　　）

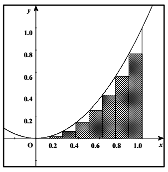
○ｎ個の長方形の面積の和

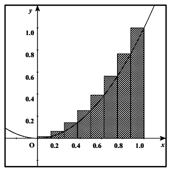
ｎ＝４　Ｓ＝　　Ｓ＝



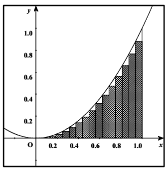


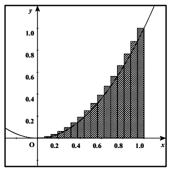
ｎ＝８　Ｓ＝　　Ｓ＝





ｎ＝16　Ｓ＝　　Ｓ＝





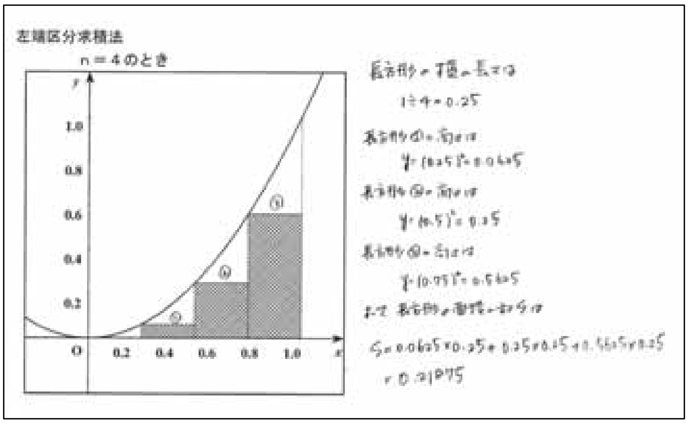
○ｎ個の長方形の面積の和

n	4	8	16	…	128	…	1024	…	∞
左端 区分求積法									
右端 区分求積法									

実際の授業の場面

○ｎ＝４のとき、左端区分求積法で長方形の面積の和を求める場面

この場面では、電卓を使って面積の和を求めた。長方形の横の長さから、長方形の左下の点のx座標を求め、それを用いてグラフから長方形の縦の長さを導いていた。多くの生徒が熱心に取り組んでいたが、「大変なだけで、



求めたい部分の面積とはずいぶん違うと思う。」という感想を述べていた。

○コンピュータによる面積の考察の場面

コンピュータを用いて、左端区分求積法、右端区分求積法によって長方形の面積の和を求め、表にまとめた。その後、ｎの値を限りなく大きくすると図形はどうなるか、また、それぞれの値はどんな値になるかを考えさせた。

n	4	8	16	…	128	…	1024	…	∞
左端 区分求積法	0.219	0.273	0.303		0.329		0.332		
右端 区分求積法	0.469	0.398	0.365		0.337		0.334		

ｎの値を限りなく大きくすると、全ての長方形を加えたものは放物線と直線とで囲まれた図形になること、そして、左端区分求積法と右端区分求積法の値はそれぞれ同じ値$\frac{1}{3}$になることを、理系のクラス、文系のクラスの生徒ともに気付いた。極限についての知識が十分でないため表現としては曖昧な表現であるが、生徒は感覚的に気付いたようである。また、スクリーン上でシミュレーションした際には、非常に興味を示し、ｎが 50 を超えたころから、「すごい、ほとんど同じようになった」との声が上がった。

③積分の探求３「区分求積法のよる面積の計算」

授業のねらい

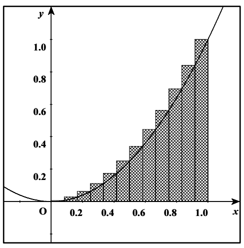
コンピュータを用いて確認した$\frac{1}{3}$を、数学的に処理し確認する。また、区間を［0, x］に拡張し、そのときの極限値に気付かせる。

積分の探求３「区分求積法による面積の計算」

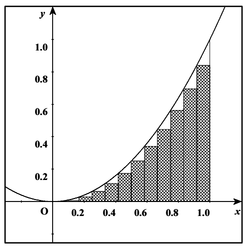
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　　　）

○ｎ個の長方形の面積の和

（右端区分求積法）



（左端区分求積法）



授業を進める際の留意事項

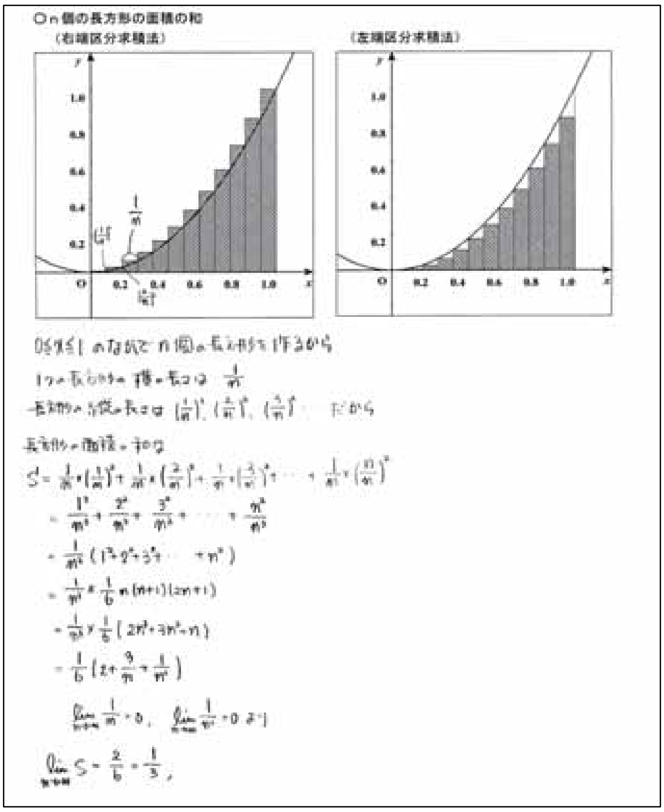
ｎ個の長方形の面積の和を求める際には、数列の和の公式、極限の計算が必要となる。授業の前に、次の２つについて確認した。

- $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$

授業を進めるにあたっては、適宜助言を与えながら、計算することが主となることがないように配慮して進める。また、理系のクラスでは、右端区分求積法、左端区分求積法による面積の和を個々の生徒に計算させたが、文系のクラスでは、生徒に発言させながら黒板で右端区分求積法による面積の和を計算し、左端区分求積法については結果は同じであることを述べるにとどめた。

また、区間を［0, x］に拡張するときには、コンピュータを活用し、区間［0, 2］、［0, 3］、［0, 4］、［0, 5］、［0, 10］の場合の値を確認し、区間［0, x］の場合を推測させた。

実際の授業の場面



○ｎ個の長方形の面積の和を求める場面

理系のクラスの授業では、長方形の個数、横の長さ、縦の長さを確認したあとに、個々の生徒が面積の和を求めた。その際、確認した数列の和、極限については、板書しておき、随時確認させた。机間指導の際に生徒の状況を確認すると、$\frac{1}{n^3}$でくくる場面、極限の計算をする場面で戸惑う生徒はいたが、おおむねスムーズに取り組んでいた。その後、左端区分求積法による長方形の面積の和を計算させた。

一方、文系のクラスでは、１つ１つ確認しながら、黒板に示していった。文系の生徒でもイメージはつかめたようである。

○コンピュータを用いて区間を［0，x］に拡張する場面

区間［0，2］、［0，3］、［0，4］、［0，5］、［0，10］の場合について、左端区分求積法、右端区分求積法による面積の値をそれぞれコンピュータで表示させ（ｎ＝1024で表示させた）、その値を推測させた。

区間［0，　2］のとき　　2.666…　すなわち$\frac{8}{3}$

区間［0，　3］のとき　　9

区間［0，　4］のとき　　21.333…　すなわち$\frac{64}{3}$

区間［0，　5］のとき　　41.666…　すなわち$\frac{125}{3}$

区間［0，10］のとき　　333.333…　すなわち$\frac{1000}{3}$

そこで、区間［0，x］のときについて確認したところ、多くの生徒が$\frac{1}{3}x^3$に気付いた。

④積分の探求４「ニュートンの発見（微分積分学の基本定理の探求）」

授業のねらい

定数関数、１次関数、２次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積を求め、そこから、微分積分学の基本定理である「微分と積分が互いに逆の操作・演算である」ことに気付かせる。

授業を進める際の留意事項

定数関数、１次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積については、長方形、三角形、台形の面積として求めさせる。また、２次関数については前時に導いた結果を用いる。これらの

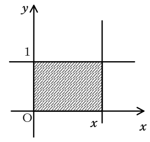
結果を見比べて、どのような関係にあるのかを気付かせる。また、微分積分学の基本定理に気付いた後、「積分」という言葉を紹介するとともに、その発見者と言われているニュートンの話など、数学的な歴史についても触れ、興味・関心を喚起させる。ここでは、「積分」という言葉の紹介にとどめ、「原始関数」、「不定積分」、「定積分」という表現は扱わないこととする。「定積分」については積分の探求５で、また、「原始関数」、「不定積分」については「積分の探求」終了後に、教科書に戻ったときに確認する。

積分の探求４「ニュートンの発見」

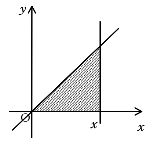
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）

○次の斜線の部分の面積を求めてみよう。

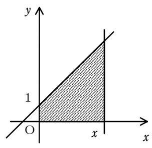
(1) $y=1$　（定数関数）について



(2) $y=x$　（１次関数）について



(3) $y=x+1$　（１次関数）について



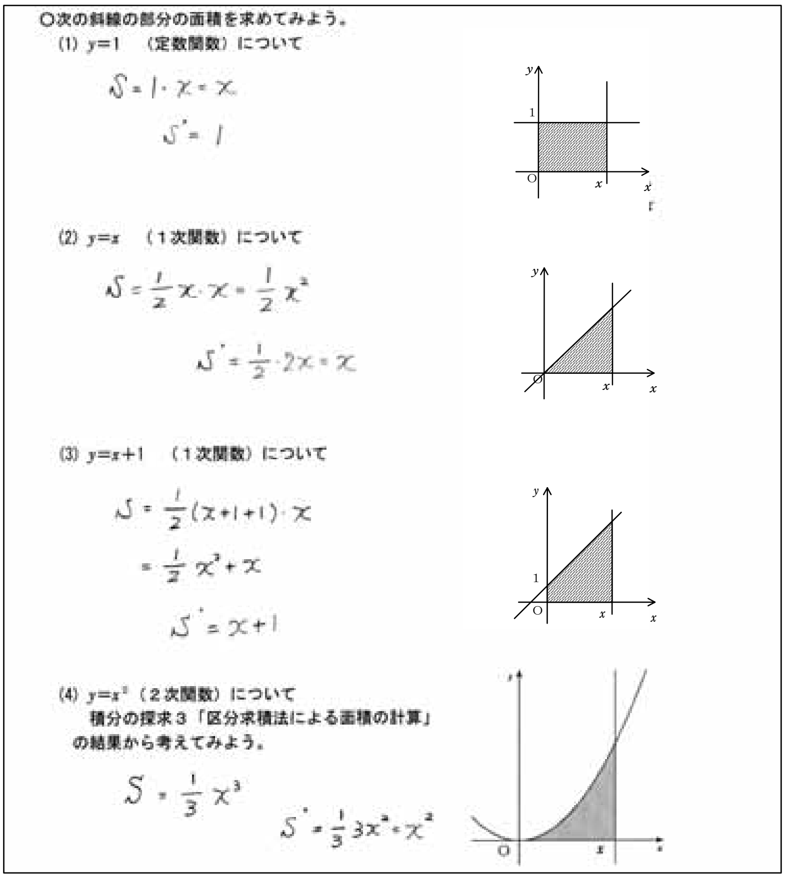
(4) $y=x^2$（２次関数）について
積分の探求３「区分求積法による面積の計算」の結果から考えてみよう。

＜微分積分学の基本定理＞

実際の授業の場面

○微分積分学の基本定理に気付く場面

(1)から(4)までの式を導けた時点で、教師から「(1)から(4)の結果から何か気付くことはないだろうか？」とだけ問いかけたところ、理系のクラス、文系のクラスとも、何人かの生徒から、「面積の式を微分すると、もとの式に戻る」との意見が出された。気付かなかった生徒もいたが、その意見を聞いて、「本当だ」、「何で微分が出てくるの」との声が上がった。その後、「積分」という言葉を紹介し、積分が図形の面積を表していること、微分と積分が逆の演算であること（微分積分学の基本定理）、それがニュートンによる発見だったこと、さらに、そのニュートンは万有引力の法則を発見した人物であることなどについて話をした。生徒は、興味深く聞いていた。


○次の斜線の部分の面積を求めてみよう。

(1) $y=1$　（定数関数）について

$S=1\cdot x=x$

$S'=1$

(2) $y=x$　（１次関数）について

$S=\frac{1}{2}x\cdot x=\frac{1}{2}x^2$

$S'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$

(3) $y=x+1$　（１次関数）について

$S=\frac{1}{2}(x+1+1)\cdot x$

$=\frac{1}{2}x^2+x$

$S'=x+1$

(4) $y=x^2$（２次関数）について
積分の探求３「区分求積法による面積の計算」の結果から考えてみよう。

$S=\frac{1}{3}x^3$

$S'=\frac{1}{3}3x^2=x^2$

⑤積分の探求５「ラクラク積分と記号作りの名人の登場」

授業のねらい

区間［0, x］における面積を微分の逆の演算であることから求め、そこから、面積を求めることができるようにさせる。さらに、それを記号を用いて表すことを知るとともに、その記号の意味を理解させる。

授業を進める際の留意事項

前時までの学習内容をもとに、微分の逆の演算であることを用いて、面積を求める。また、$y=x^2$、$x=1$、$x=2$、x 軸で囲まれた部分の面積は、減法で表すことができることを生徒に気付かせ、そこから、ライプニッツの表現につなげる。その際、記号化された式の意味について確認する。「∫(インテグラル)」については、和を表す「summation」の頭文字であること、また、「dx」については、ただの記号ではなく、図形的な意味があることを伝える。これらのことによって、積分の計算のイメージを持たせる。

実際の授業の場面

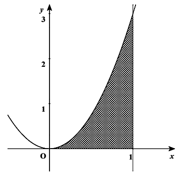
○面積を求める問題に取り組んだ場面

面積を求めることについての理解の状況は概ね良好であった。また、問題（３）についても、多くの生徒が減法であることに気付き、面積を求めることができた。また、問題（１）の曲線を含む面積が整数になったことに驚いていた生徒もいた。

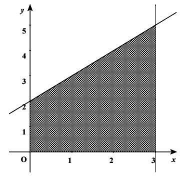
積分の探求５「ラクラク積分と記号作りの名人の登場」①
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）

○様々な面積を求めてみよう。（図の斜線部分）

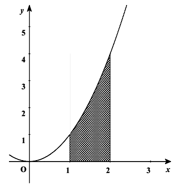
(1) $y=3x^2$



(2) $y=x+2$



(3) $y=x^2$



積分の探求５「ラクラク積分と記号作りの名人の登場」②
（　）組（　）番　氏名（　　　　　　）

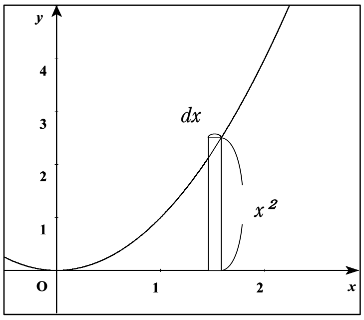
○「記号作りの名人」ライプニッツの登場

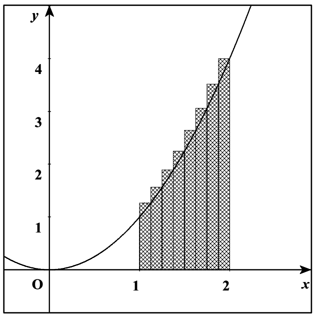
ライプニッツは(3)の計算を次のように書きました。

もともと積分とは、区分求積法に見られるように、いくつもの長方形に分け、１つ１つの面積を計算し、最後にそれらを合計する（細かく分けて、かけて、たす）ことでした。ライプニッツは、図のように細かく分けた長方形のうち、ある１つの長方形を

$$x^2dx$$

と表し、長方形を端から端までたすことを「インテグラル」と表しました。





(3) $y=x^2$

微分してx^2になるのは $\frac{1}{3}x^3$

$S(x)=\frac{1}{3}x^3$

$x=2$を代入して

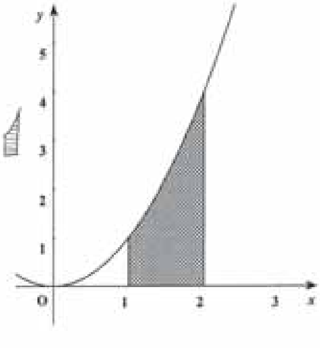
$S(2)=\frac{1}{3}\times 2^3=\frac{8}{3}$

$x=1$を代入して

$S(1)=\frac{1}{3}\times 1^3=\frac{1}{3}$

したがって求める面積は

$S(2)-S(1)=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$



○積分の記号化の場面

積分の記号の定義については、全員が納得していた。そして、記号１つ１つの意味についても、感動した生徒が多かった。ライプニッツについては、ニュートンと同時期に微分・積分について発見、発明をしていたこと、さらに、記号化していたことを話した。また、彼が、数学者、科学者、哲学者など幅広い分野で活躍した学者であるとともに、政治家、外交官でもあったことなどを話したところ、多くの生徒が興味を示していた。

3　指導の結果と成果

今回の取組後に、生徒にアンケートを実施し生徒の変容を確認した。

(1) 生徒へのアンケート調査結果

授業後に生徒にアンケートを実施し、成果の検証を行った。アンケートは、「授業を受けて思ったこと・感じたこと」を自由記述で書かせた。

以下に理系、文系のクラスの主なものを挙げた。

理系のクラスの生徒のコメント

初め、いろいろな長方形を作り、求めていくことに感動したけど
授業を進めていくにつれて、もっと簡単な求め方が分かり感動した。
コンピュータを使うと、人がいくらの年月をかけてもできないことがすぐにできた
これで、未知の世界が見れた様な気がする。
ニュートンの発見で、難解だった積分学が進展したというのを聴いて
ニュートンのすごさがわかった。
ライプニッツも、頭が柔いのだなぁと思った

実際の歴史と同じ順番で学んでいくことで
積分が何のためにあるのかがよく分かった
これからの授業は自分自身微分積分の疑問を
解くときに、問題がどのようなものかイメージ
するのを助けてくれると思いました。
他の分野でも数学が「何のために」どの
ようにして使われているのかを教えてくれると助かると思います。

文系のクラスの生徒のコメント

いつもの授業とはちがい、コンピュータや、プリントなどをつかったのが、たのしかったです。
高校の授業は、本質をすぐ言ってしまうことが多いけれど今回は、
自分で考えることができたのがよかったです。
そして自分で悩み考えることで昔の人の偉大さがわかりました。
進め方も、じっくり考える時間があったのでまちがっていたとしても
自分の考えをもってから答えを聞くことができたのでとてもよかったと
思います。

数学は、どちらかというと苦手な方だけど、ただ数式を暗記するよりも
抵抗なく、授業が「楽しい」と感じた。
コンピュータによる区分求積法はとてもわかりやすかった。

見たことのない記号や公式がでてきて、最初は
とても混乱しました。けれどソニズ゛を使った説明
を聞いていくうちに、なんとなく式の意味が分かって
きました。昔の人は本当に頭が良かったのだなぁ
と思いました。曲線で囲まれた面積も出せることが
できるのは、とてもすごいと思ったし日常のいろいろな事にも役立つと思った。

アンケートでは、理系のクラスでは、「ニュートン、ライプニッツの偉大さなど先人の業績に感動した」、「数学が、何のために、どのようにしてできたかを学べて、数学を学ぶ意味が分かった」、「積分の計算のイメージを持つことができた」とするコメントが多かった。また、文系のクラスでは、「数学の授業の楽しさを知った」、「自ら考えるということと分かるということが分かった」というコメント等が多かった。多くの生徒が好意的に受け止めるとともに、改めて数学のおもしろさを感じ取ってくれたことが読み取れた。

また、「積分の探求」後は、学習したことを生かしながら、教科書に沿って授業を進めたが、単に計算をするだけではなく、１つ１つの計算の意味をイメージしながら取り組むことができた。

(2) 実践を通して

当たり前のことではあるが、生徒は「分かりたい」という思いを強く持っている。それは、問題が解けるようになることだけでなく、計算過程の意味が分かること、計算結果の意味が分かることも強く望んでいるということである。生徒の「分かりたい」という気持ちに応えるためには、新しい概念、定理、公式を生徒自身に見出させ、そして、それを実感させることが大切となる。今回の取組において、生徒は考え、発見する場面も多々あった。しかし、疑問を抱き、難しさに閉口したこともあった。すなわち、それが生徒自身の数学的活動であり、その数学的活動があったからこそ、最後には、大きな感動とともに「積分」とは何かを実感してくれたことと思われる。積分は計算方法に習熟すれば、パーパーテストで点数を取ることは可能である。しかし、それでは、そのとき限りの知識となり、生徒の心に根付かない。生徒の心に根付く知識となるような取組が、生徒の「分かりたい」という気持ちに応え、そして、その気持ちを育てることにつながると考える。

また、生徒の「分かりたい」という気持ちに応えるためには、十分な教材研究が必要である。教師が教材の背景を理解するとともに、どの場面でどのように考えさせるのか、そして、生徒自身が考えることに主体的に取り組んでいるということをどう実感させるかが大切となる。ときには、コンピュータを駆使してイメージを膨らませることもある。また、生徒が自分で考えたことと先人が考えたことをオーバーラップさせ、先人の偉業を確認させることもある。その中で、生徒に感動を与え、数学の楽しさを実感させていくことが大切となる。