「平成 16 年度　教育課程実施状況調査」の結果を踏まえて

栃木の子どもの学力向上を図る授業改善プラン
―中学校・数学科―　vol. 3

平成 18 年 1 月　栃木県総合教育センター

平成 16 年度教育課程実施状況調査（中学校第２学年段階の内容）のペーパーテスト調査結果から、今回は、「図形」の領域について、指導のポイントを示します。

調査結果からみえた「図形」の課題

意識調査の結果から

図形の学習内容について、苦手意識を持つ傾向がみられる。

・「平行線や角の性質や多角形の角の性質を理解すること」「合同条件を用いて図形を証明すること」「三角形や平行四辺形の性質を理解すること」について、「よく分かっている」と回答している生徒は４割程度です。また、「円周角と中心角の関係を理解すること」について、「よく分かっている」と回答している生徒は４割弱にとどまっています。

ペーパーテストの結果から

筋道を立てて論理的に考えることが苦手である。

・図形領域の問題は 21 問あり全国の通過率を５％上回っている問題数は１問、５％下回っている問題は 12 問ありました。

出題のねらい	本県通過率	全国通過率
合同な図形をかくための条件を考える	**63.1%**	**58.0%**
三角形の合同条件を指摘する	**71.5%**	**73.1%**
多角形の内角の和の求め方を文字式で表す	**48.2%**	**60.6%**
平行四辺形になるための条件を理解しているかをみる	**40.3%**	**51.6%**
問題に示された条件を満たす図形がかけるかをみる	**57.8%**	**63.9%**
半円の弧に対する円周角の性質を理解しているかをみる	**38.6%**	**50.5%**

推論の過程を大切にし、的確に表現する力を高めさせましょう

図形指導のポイント

図形領域の指導では、単に公式や定義・定理を暗記させるのでなく、最低限のことを理解させることが大切です。例えば、三角形の内角の和は 180°であることや平行線の錯角・同位角がそれぞれ等しいこと、三角形の合同条件・相似条件、平行四辺形の性質、平行四辺形になるための条件などを実感を伴って理解させましょう。これらのことを実感を伴って理解していれば、ｎ角

形の内角の和などは公式を覚えていなくても三角形に分けて考えることにより解答が導かれるはずです。

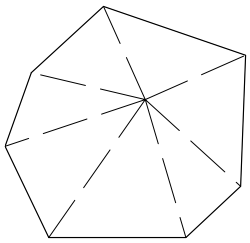
ただ単に、公式や定義・定理を覚えさせ、同じような問題で演習を繰り返しても効果的な学習指導は望めません。「なぜ、そうなるのか」、「どうしてそうなるのか」を生徒に問いかけ続けることが教師に求められます。そのためには、発問を工夫した授業を計画したり、導入問題や練習問題にも工夫していくことが必要ではないでしょうか。また、学習を振り返る場面を意識的に設定し、学習内容の定着を図る工夫をしていきましょう。

1　三角形の内角の和に帰着して考えることができるようにしましょう

問題１

学級のみんなで、三角形の内角の和をもとにして、七角形の内角の和を求める方法を考えました。次の各問に答えなさい。

(1) 政美さんは、次の図のように線を引いて求めました。



アにあてはまる数値を［　　］の中に書きなさい。

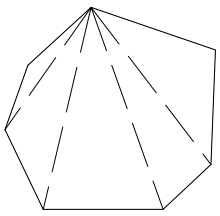
七角形の内部に三角形を７つつくると、七角形の内角の和は、

180°×７－［　ア　］°

と表せます。

本県通過率	**50.4%**	全国通過率	**53.4%**

(2) 和夫さんは、政美さんと異なる考え方でも求められると言って、右のような図を書きました。和夫さんのかいた図を使って、七角形の内角の和を求める考え方と式を［　　］の中に書きなさい。



本県通過率	**51.4%**	全国通過率	**58.4%**

(3) 政美さんや和夫さんの考え方をもとにして、ｎ角形の内角の和を求める式をｎを使って表し、［　　］の中に書きなさい。

本県通過率	**48.2%**	全国通過率	**60.6%**

この問題は、公式に当てはめ多角形の内角の和を求めることをねらいとしているのではなく、(1)(2)では与えられた図から三角形の内角の和に着目して多角形の内角の和を考察することができるかをみています。また、(3)は(1)(2)をもとに、多角形の内角の和を文字ｎを用いて一般化できるかをみています。これらの問題は、教科書でも取り上げられ学習していますが通過率は約 50%にとどまっています。多角形の内角に関する問題は、多角形を三角形に分割して考えることを利

用して、図で表されたものを式と関連させて考察していくことに多くの生徒が困難を示していることが分かります。

このような角度を求める問題は、三角形の内角の和に着目して考えることができるように日頃から指導していきましょう。生徒は、補助線を引いて考察することに苦手意識をもっています。補助線の難しさは、「生徒にとって、その必要性がわからない」という点にあります。問題を解くためには、ある程度解き方の方針が立たないと補助線を引くことができません。補助線を引くヒントは、生徒に「結論を出すためには、何がいえればよいか」という思考を、すなわち、結果から解析する思考を育てていくことが必要です。

また、生徒に考えやすくするように教師が十分教材研究をし、生徒の実態にあったヒントの出し方を考えていくことが必要です。また、公式を暗記して活用することも大切ですが、その公式がどのようにして導かれたかをよく考えさせましょう。

発展的課題で考え方を深めさせましょう～星形５角形の指導のポイント～

生徒の考え方を深めさせるためにも発展的な課題を生徒に与え、今まで学習したことを活用して問題を解く場面を設定することが必要です。その例として星形５角形は適切な問題の一つです。生徒に５つの角の和の求め方をいろいろな方法で考えさせることにより、数学への興味関心と考え方を身に付けさせることができます。ここでは、次のことを教師側が理解して指導にあたることが求められます。

◎求め方は大きく２通りになること

・∠ａ～∠ｅの５つを含む図形の角を合計し、不要なところを除くという考え方。

・∠ａ～∠ｅを１つの図形に集めるという考え方。

◎数学的な見方や考え方

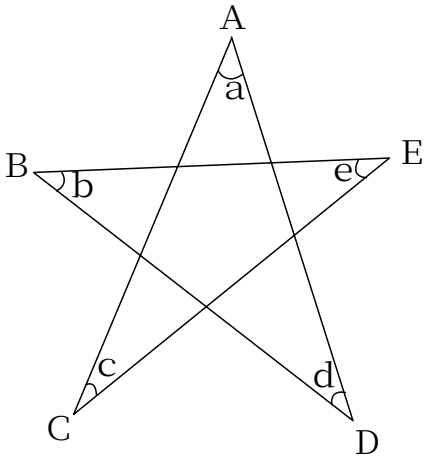
・補助線を引く。

・図形の中の図形に目を付ける。

・図を外に広げる。

・２つの角をセットで考える。

・２つの三角形で、対頂角を除いた２つの角の和は等しい。



◎解決のために使う定理

・三角形の内角の和は 180°

・多角形の内角の和は 180° ×(ｎ－２)

・多角形の外角の和は 360°

・三角形の内角と外角の関係

・ブーメランの定理

・平行線の錯角・同位角

・対頂角

・一直線は 180 °

・１周りは 360 °

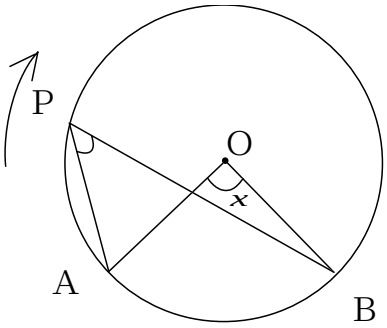
2　観察、操作を通して、円周角の性質の理解を深めさせましょう

問題２

右の図で、３点Ａ、Ｂ、Ｐは円Ｏの周上にある点で、点Ｐは点Ａから点Ｂまで円周上を動きます。

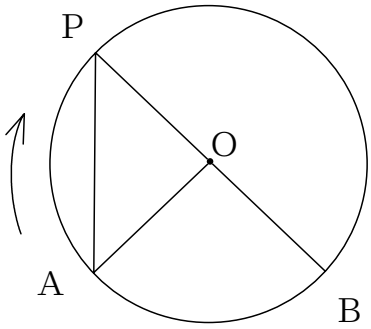
(1) ∠ＡＰＢ＝55°のとき、∠xの大きさを求めなさい。

本県通過率	65.9%	全国通過率	74.9%



(2) 線分ＢＰが中心Ｏを通るとき、∠ＰＡＢの大きさを求めさい。

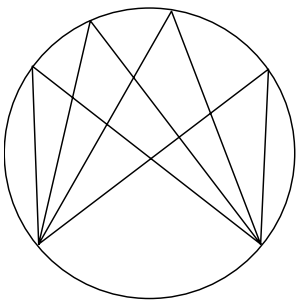
本県通過率	38.6%	全国通過率	50.5%

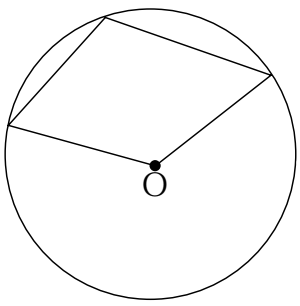


この問題は、「円周角と中心角の関係を理解しているか」、「半円の弧に対する円周角の性質を理解しているか」を問う問題です。現在の学習指導要領では、１年生におうぎ形の学習の際に中心角を学習し、２年生で円周角を学習します。おうぎ形と中心角、円と円周角から、生徒が円の中心角と円周角がうまく結びついていないような傾向がみられます。指導する際は、どのような角を円周角と呼ぶのか、また、中心角と呼ぶのかを十分確認して指導に当たる必要があります。

円周角の定理で重要なことは、一つの円では円周角が弧に依存して決まるという対応に着目させることです。弧の長さと中心角は比例するから、これを円周角と中心角の関係に置き換えることができます。これらのことを理解させるためには、生徒自身の観察、操作や実験を通して円周角と中心角の関係に気付かせ、弧の長さとの対応も意識させましょう。

特に円周角の導入場面では、右図のような学習場面を設定し、円周角や中心角を実測させることから学習を始め、興味関心を高めることが必要です。





・一つの弧に対する円周角をいろいろな位置に変えて角の大きさを分度器を用いて測ること

・弧の位置や中心角の大きさをいろいろ変えた場合について対応する中心角や円周角をとってその大きさを分度器で確認してみること

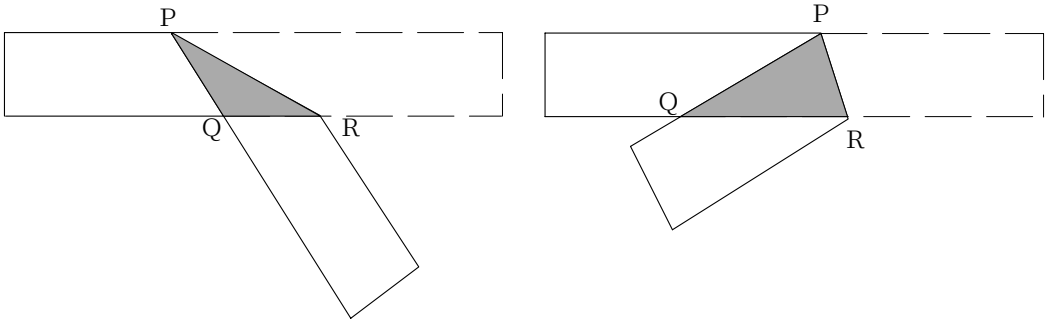
次の段階として、二等辺三角形などの基本的な性質をもとに証明させることが必要です。この場面では、生徒に演繹的な手法で証明することのよさを知らせることが求められます。そのためには、定理や証明を与える指導ではなく、生徒自らが活動を通して見いだした円周角と中心角の関係を予想し、その根拠となることを分析しながら、その根拠になっている基本的な性質を明らかにするような授業が望まれます。円周角は本当に一定になっているのか、それは何によって保証されるのかということに関心をもたせるように指導していきましょう。また、この証明で気をつけたいことは、まだ２年生なので、証明をしっかり書かせることにより、教科書に書いてある証明をじっくり読ませその内容を理解させる指導をしていきましょう。また、この性質の証明に当たっては、円周角と中心角の位置関係の場合分けによる証明を無理に扱う必要はありません。

３　帰納的な考えから、演繹的な思考への橋渡しを丁寧に指導しましょう

問題３

下の図のように、長方形の紙テープをいろいろと折ってみました。アにあてはまることばを書きなさい。

重なった部分の△ＰＱＲがいつでも［　ア　］になることに気がつき、次のように証明しました。



本県通過率	49.5%	全国通過率	59.2%

この問題は、「二角が等しい三角形の性質を理解し、図形の性質を見いだすことができるか」「角が等しいことの根拠を示すことができるか」を問う問題です。△ＰＱＲを二等辺三角形と分かる生徒は５割にとどまっています。二等辺三角形はどのような三角形であるかはほとんどの生徒は理解しているはずです。しかし、この問題のように図形が変化すると、二等辺三角形であることを見いだせない現状があります。これは、テープの向かい合う辺が平行であることを利用して、錯角が等しいこと、重なった部分が等しいことを考察することができないためと考えられます。

実際の指導場面では、紙テープなどを折らせて考えさせる操作的な活動を取り入れていきましょう。まずは根拠がなくてもよいから直感的な判断で答えさせ、次に、根拠を明らかにし、演繹的に考えさせるように指導しましょう。

4　演繹的に考えさせる問いかけを工夫しましょう

演繹的に考えるときには、根拠となる既知の性質や、条件は何かを明確にとらえさせましょう。生徒に、「どんなことが分かっているのか」、「どんなことが使えるのか」ということを考えさせることが求められます。

演繹的に考えさせるときには、分かっていることをもとに、「それからどんなことがいえるか」という仮定と結論から考えていく総合的な思考と、「そのことがいえるのは、何がいえればよいのか」というように結論から仮定を考えていく分析的な思考が使われることを教師が認識し指導に当たることを心がけましょう。これらの考え方の進め方についても、練習問題等を通して意識的に進めていきましょう。

演繹的に考えさせる発問例

- 分かっていること（分かること）を基にして考えてみよう。
- これがいえるにはどのようなことが分かればよいか。
- これでよい（これは誤りだ、成り立たない場合がある）と説明できないか。
- どんなことを根拠として考えたか。分かっていることを基にして説明できないか。

5　証明では、命題が例外なしに成り立つことを理解させましょう

問題４

ある学級で、「三角形の内角の和は 180 ° である。」ことを次のように証明しました。

△ＡＢＣの辺ＢＣを延長した直線上の点をＤとし、点Ｃから辺ＢＡに平行に引いた直線をＣＥとする。

平行線の錯角は等しいから

$\angle a = \angle a'$

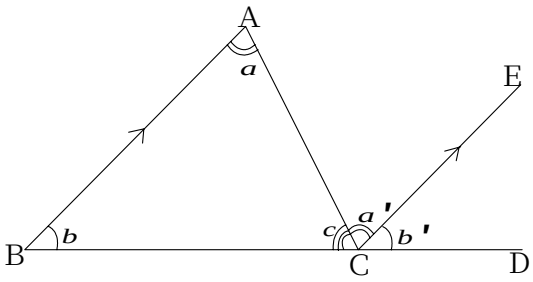
平行線の同位角は等しいから

$\angle b = \angle b'$

したがって、$\angle a + \angle b + \angle c$

$= \angle a' + \angle b' + \angle c$

$= 180°$



この証明のあと、次のア～オの考えが出されました。適切でないものを１つ選び、その記号をかきなさい。

ア　すべての三角形で成り立つことを示している。

イ　他の三角形で成り立つことを証明しなくてもよい。

ウ　平行線の性質をもとにして説明している。

エ　直角三角形については、別に証明する必要がある。

オ　実際に角の大きさを測って調べなくともよい。

本県通過率	36.6%	全国通過率	37.9%

この問題は、「証明の意義について考えることができるか」を問うものです。しかし、通過率は４割弱になっています。すでに学んでいる当たり前に思える図形の性質にかかわる証明問題であるため、図形を証明する意味や意義が十分理解されていないと思われます。なぜ証明するのか、何が証明されたのかを確認しながら学習を進めていく必要があります。

何をどのように証明すべきかを知るポイントとして主に次の二点が考えられます。

(1) 仮定と、仮定からどんなことがいえるかを明らかにする。

(2) 何がわかればその結論に達するか、あるいは、結論を言うための結論の別のよい表し方を明らかにする。

証明問題を指導する際、証明の仕方に困難を感じている生徒には、証明の例をあげその解説を十分に行い、証明されたことの意味をよく考えさせましょう。そして、証明を読みその意味を理解できるように指導していきましょう。

また、証明については、その必要感という観点からは、生徒が理解すべき点が二点あります。

(1)「例外なくいつも成り立つか」（普遍性の理解）

(2)「その事実が何によって認められているのか」（明確な根拠）

これらのことを踏まえ、生徒には、自分が納得したことを他人にも納得してもらえるように説明することの大切さを強調し、証明の意義やその仕組みについて理解させていくことが必要です。

６　論証の記述指導は段階を踏んで丁寧に指導しましょう

論証の指導をするときに、「論証」と「論証の記述」を混同して考えてはいないでしょうか。論証の学習は小学校からはじまっており、中学１年生でも取り組んでいました。一方、論証の記述の学習は、それまでの指導では十分でなかったはずです。２年生で、平行線の錯角や同位角、三角形の合同や平行四辺形の性質について学習しながら「論証の記述」を学習していくような学習の流れになっていることを確認してください。

生徒が証明問題を解くためには、文字を使って一般的に考え、合同条件などを根拠として考え、証明を組み立てていく力など、論理的に考えて、それを表現する力を育てていくことが必要です。さらに、自分の考えたことを他人に的確に伝わるように表現するためには、どのような事柄をどのように表現することが必要なのかなど指導していきましょう。生徒にとって証明の難しさの一つは、自分が考えた順番と証明する際の記述の順番の間に相違があるところにあります。したがって、まず、自分が思いついたり気が付いたりした順番で考えたことを表現させることが大切です。そして、自分の考えたことを他の人に理解してもらうためには、前提になることや根拠を先に示して、それらに基づいて演繹的に説明したほうが分かりやすく簡潔に表現できることを明らかにし、初めの素朴な説明を再構成して、証明の形式に改めていく過程を体験する学習活動を意識して行いましょう。

説明や証明を振り返り、条件や仮定がどのように関わっているかなどについて明らかにすることを通して、説明したり証明したりしたことの意味や意義についての理解を深めさせましょう。さらに、説明や証明をよりどころとした知識を他の知識と結びつける活動をすることを通して、説明や証明の有用性やはたらきなどそのよさが分かるようにしていきましょう。

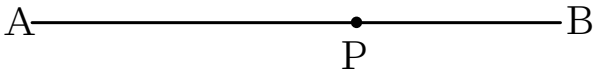
7　問題の図を分析的に考えさせる指導を心がけましょう

問題５

次の［　　］の中の性質を証明するときは、下線をつけた部分にあう図をかくと証明の見通しがたてやすくなります。

「線分ＡＢ上にある点Ｐがある。ＡＰ、ＰＢをそれぞれ１辺とする正三角形ＡＣＰ、正三角形ＰＤＢをかき、点Ａと点Ｄ、点Ｃと点Ｂを結ぶとき、ＡＤ＝ＣＢとなる。

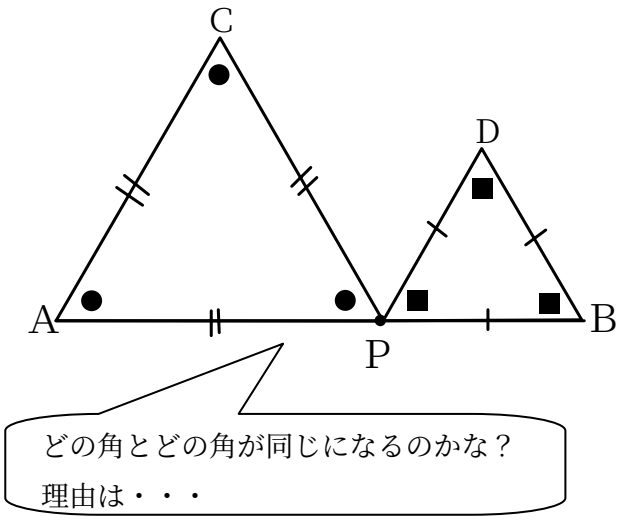
［　　］の中に、下線をつけた部分にあう図をかきなさい。ただし、証明する必要はありません。



本県通過率	57.8%	全国通過率	63.9%

この問題は、「問題に示された条件をみたす図をかくことができるか」を問うものです。しかし、通過率は６割弱です。文章を読んでその内容を図にすることが苦手なことが分かります。教科書の証明問題では、図が親切にかかれている場合がほとんどです。生徒は、与えられた図に対してその図がどのような経過でかかれたか十分理解しないまま、証明問題に取り組んでいます。図をかいて考える力を身に付けさせるためには、問題を提示するときに、あえて図を与えないで考えさせることが有効です。

かかれた図を分析的に見させるためには、図を与えずに問題を提示し、与えられた文章から命題にあった図をかかせる学習を取り入れていくことが必要です。この学習活動を繰り返すことで、図を時間の経過に沿って分析的に見る力が育成されます。さらに、作成した図に、しるしを入れたりすることで、命題の仮定や結論を明確に捉えさせることができるようになります。



平成 16 年度教育課程実施状況調査の結果を踏まえて作成した「栃木の子どもの学力向上を図る授業改善プラン」も、今回が３回シリーズの最終となります。第１回(H17.5、冊子)、第２回(H17.9、リーフレット)とともにご活用ください。